Changement de référentiel

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

November 30, 2024

Définition

Un référentiel est un système indéformable, c'est-à-dire un solide. Cette propriété permet de faire des repérages qui ne seront pas remis en cause par les déformations éventuelles du système. On utilise fréquemment :

- les murs de la pièce où se déroule l'étude mécanique
- la Terre car l'évolution de sa forme est marginale dans les durées d'étude et par rapport aux longueurs prises en compte
- un système de trois axes perpendiculaires assimilé à un solide $\mathcal{R} = Oxyz$
- le référentiel géocentrique d'origine le centre de la Terre et muni de trois axes pointant vers trois étoiles. . . fixes pour avoir un solide
- . . .

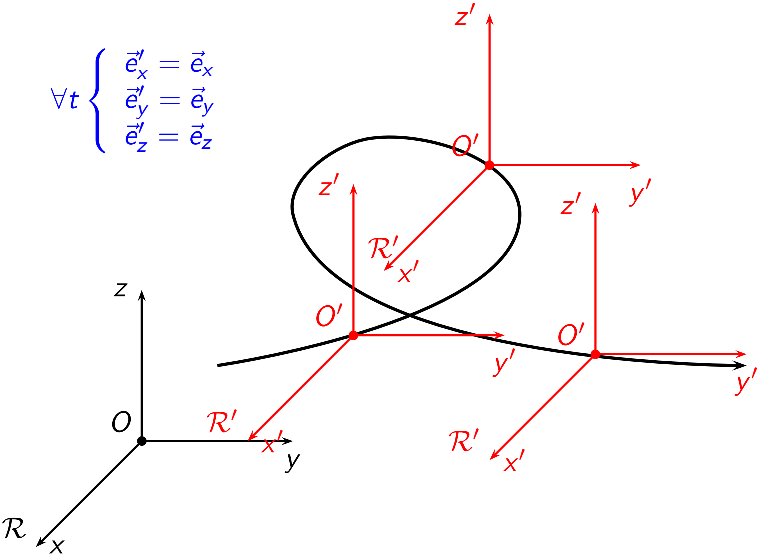
Soit $\mathcal{R}$ un référentiel que l'on considère comme fixe. Les murs de la pièce sont fixes…dans une certaine mesure ! En effet, si l'étude mécanique dure trop longtemps, on pourra se rendre compte que cela n'est pas le cas puisque les murs suivent le mouvement de la Terre par rapport au Soleil. La notion de référentiel fixe sera précisée plus loin.

Soit un second référentiel $\mathcal{R}'$ en mouvement par rapport à $\mathcal{R}$. Ce mouvement peut être de plusieurs natures :

- $\mathcal{R}'$ en translation par rapport à $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}'$ en rotation par rapport à $\mathcal{R}$
- $\mathcal{R}'$ en translation et rotation par rapport à $\mathcal{R}$

La translation est caractérisée par un vecteur au sens classique du terme, la rotation par un *pseudo-vecteur* en général noté $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$ que nous définirons.

$$\forall t \begin{cases} \vec{e}\,'_x = \vec{e}_x \\ \vec{e}\,'_y = \vec{e}_y \\ \vec{e}\,'_z = \vec{e}_z \end{cases}$$



Translation et dérivation

En relativité de Galilée, le temps s'écoule de la même façon dans tous les référentiels (*ceci n'est plus vrai en relativité restreinte d'Einstein*). Une conséquence :

$$x \text{ grandeur salaire quelconque : } \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Pour un vecteur quelconque $\vec{u}$, cela peut être différent dans le cas général. Tout le problème se situe dans les changements d'orientation du vecteur dans l'espace. Les modifications de l'orientation peuvent être différentes dans le référentiel $\mathcal{R}$ de ce qu'elles sont dans le référentiel $\mathcal{R}'$.

Translation et dérivation

Soit $\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ vecteur quelconque exprimé dans une base associée à $\mathcal{R}$. On souhaite calculer $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + x\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \\ +\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + y\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \\ +\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z + z\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \end{cases}$$

Translation et dérivation

Nous savons que $\vec{e}'_x \in \mathcal{R}'$, on a donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Mais comme $\forall t,\ \vec{e}'_x = \vec{e}_x$, on a donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}'_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Ceci étant valable pour x, y et z indifféremment, on a finalement :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

Translation et dérivation

Comme nous avons dans le même temps :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$$

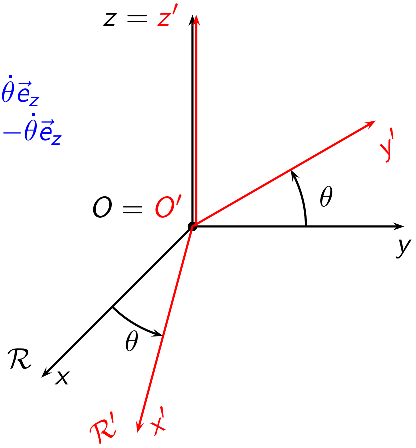
On peut conclure que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \qquad \text{TRANSLATION}$$

L'opération de dérivation est insensible au référentiel lorsque $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont en translation l'un par rapport à l'autre.

La rotation sera présentée dans le cas particulier où un seul angle est impliqué. L'angle est indispensable pour traduire les évolutions des directions repérées sur un solide ou sur un référentiel.

$$\begin{cases} \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\theta}\vec{e}_z \\ \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\dot{\theta}\vec{e}_z \end{cases}$$



Dérivation et rotation

Dans le calcul de $\left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$ avec $\vec{u} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$, il faut évaluer les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z = \vec{e}\,'_z$ par rapport à $\mathcal{R}'$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}\,'_z}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{0}$$

Par contre pour les dérivations de $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, les choses sont plus compliquées puisque ces deux vecteurs changent d'orientation au cours du temps par rapport aux directions références de $\mathcal{R}'$.

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \neq \vec{0} \text{ et } \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \neq \vec{0}$$

Dérivation et rotation

Pour calculer les dérivées précédentes, il faut commencer par projeter les vecteurs dans une base associée à $\mathcal{R}'$:

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}'_x - \sin\theta\,\vec{e}'_y \text{ et } \vec{e}_y = \sin\theta\,\vec{e}'_x + \cos\theta\,\vec{e}'_y$$

Les vecteurs $\vec{e}'_x$ et $\vec{e}'_y$ sont invariables dans $\mathcal{R}'$, il suffit de dériver l'angle $\theta(t)$. On a donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}'_x - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}'_y = -\dot{\theta}\vec{e}_y$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}'_x - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}'_y = \dot{\theta}\vec{e}_x$$

En utilisant $\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\dot{\theta}\vec{e}_z$, on constate que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_x}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{e}_x \text{ et } \left.\frac{\mathrm{d}\vec{e}_y}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{e}_y$$

Dérivation et rotation

On a donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z + \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge (x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z)$$

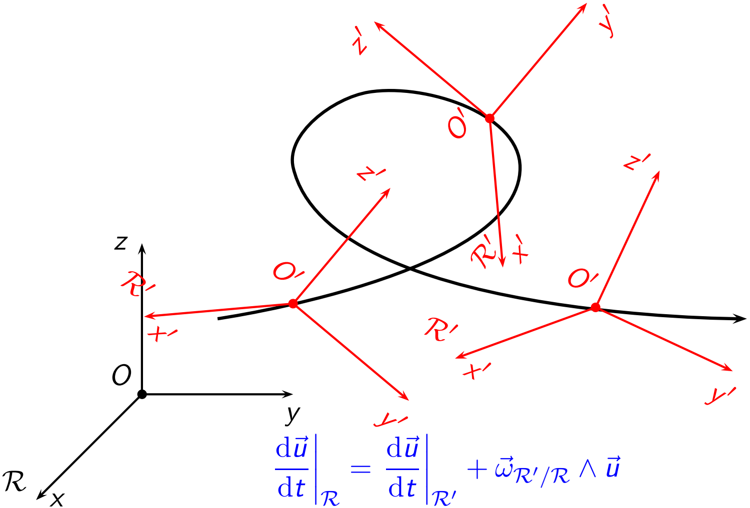
Cette loi de dérivation s'écrit encore :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{u}$$

En utilisant $\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = -\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$, on l'écrit :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u} \qquad \text{Loi de BOUR}$$

Translation et rotation



$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{u}$$

On considère un point M dont on étudie le déplacement. Par définition d'une vitesse, on a :

$$\text{Vitesse de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R} : \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Vitesse de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R}' : \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$$

Établir la loi de composition des vitesses consiste à faire le lien entre ces deux vitesses. Le processus est facile à deviner : on utilise la relation de Chasles des vecteurs : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$. Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Le terme $\left.\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$ est une quantité hybride dans le sens que l'origine O' du repérage de la position de M est celle du référentiel $\mathcal{R}'$ et que la dérivation s'effectue par rapport à $\mathcal{R}$! Il n'a pas de sens physique immédiat.

On utilise les relations entre les opérations de dérivation selon $\mathcal{R}$ et selon $\mathcal{R}'$:

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}(\,)}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} \text{ pour la TRANSLATION}$$

On a donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

Loi de composition des vitesses

Avec les résultats précédents, on relie les vitesses de M dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$:

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\underset{\text{absolue}}{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}} = \underset{\text{relative}}{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}} + \vec{v}_{\text{entraînement}}$$

Pour la translation : $\vec{v}_{\text{entraînement}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$

Par définition d'une accélération, on a $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. On dérive selon $\mathcal{R}$ l'expression de la vitesse obtenue avant. On a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$$

On voit à nouveau apparaître une quantité hybride référencée à la fois dans $\mathcal{R}$ et dans $\mathcal{R}'$. On utilise toujours la relation de dérivation selon $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ pour la translation et on écrit aisément :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'}$$

Le terme $\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$ possède un sens physique immédiat, c'est l'accélération de O' dans $\mathcal{R}$.

Loi de composition des accélérations

On aboutit à la relation suivante qui relie les accélérations de M dans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$:

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\underbrace{\vec{a}_{M/\mathcal{R}}}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}}_{\text{relative}} + \vec{a}_{\text{entraînement}}$$

Pour la translation : $\vec{a}_{\text{entraînement}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OO'}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}}$

On considère un point M dont on étudie le déplacement. Par définition d'une vitesse, on a :

$$\text{Vitesse de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R} : \ \vec{v}_{M/\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

$$\text{Vitesse de } M \text{ par rapport à } \mathcal{R}' : \ \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'}$$

Établir la loi de composition des vitesses consiste à faire le lien entre ces deux vitesses. Dans le cas de la rotation uniforme étudiée, on a $O = O'$ d'où :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Il apparaît à nouveau une quantité hybride.

Loi de composition des vitesses

On utilise la loi de Bour pour la dérivation :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\underset{\text{absolue}}{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}} = \underset{\text{relative}}{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}} + \vec{v}_{\text{entraînement}}$$

Pour la rotation : $\vec{v}_{\text{entraînement}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$

On a $\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$. On dérive selon $\mathcal{R}$ l'expression de la vitesse obtenue avant. On a :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} + \left.\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

La rotation étant uniforme, on a $\dfrac{\mathrm{d}\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ et donc :

$$\left.\frac{\mathrm{d}(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M})}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

On constate la présence de deux quantités hybrides que l'on va faire évoluer grâce à la relation de Bour.

Tout d'abord :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

Ensuite :

$$\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

En utilisant ces expressions, l'accélération de M dans $\mathcal{R}$ est :

$$\vec{a}_{M/\mathcal{R}} = \vec{a}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'} + \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M} + \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}\right)$$

Il ne reste plus qu'à réorganiser les termes.

Loi de composition des accélérations

$$\underset{\text{absolue}}{\vec{a}_{M/\mathcal{R}}} = \underset{\text{relative}}{\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}} + \vec{a}_{\text{entraînement}} + \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

Pour la rotation uniforme :

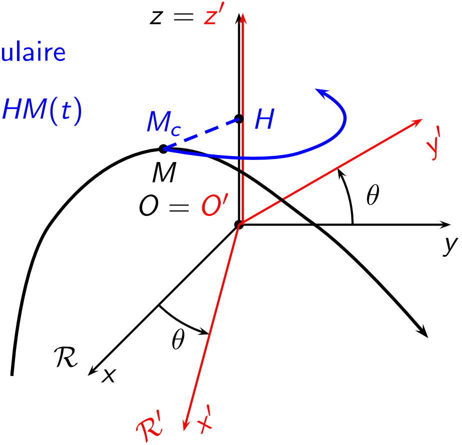
$$\vec{a}_{\text{entraînement}} = \vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \left(\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{O'M}\right)$$

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\,\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \vec{v}_{M/\mathcal{R}'}$$

La loi de composition conserve la même forme pour un mouvement quelconque de $\mathcal{R}'$ par rapport à $\mathcal{R}$ mais l'expression de l'accélération d'entraînement est modifiée au contraire de l'accélération de Coriolis qui est toujours définie comme ci-dessus.

À une date quelconque t, le point coincident est le point M_c qui est confondu avec M mais qui est attaché à $\mathcal{R}'$. Après la date t, M et M_c n'ont pas le même mouvement. Prenons l'exemple sur une rotation uniforme de $\mathcal{R}'$ par rapport à R.

M_c a un mouvement circulaire uniforme de rayon $HM_c = HM(t)$



Utilité du point coincident

Le point coincident permet de donne du sens physique à la vitesse d'entraînement et à l'accélération d'entraînement. En effet, la vitesse de M_c dans $\mathcal{R}$ et l'accélération de M_c dans $\mathcal{R}$ correspondent, respectivement, à la vitesse et à l'accélération d'entraînement :

$$\vec{v}_{\text{entraînement}} = \vec{v}_{M_c/\mathcal{R}} \text{ et } \vec{a}_{\text{entraînement}} = \vec{a}_{M_c/\mathcal{R}}$$

Reprenons l'exemple de la rotation uniforme vue avant. Le point M_c coincident avec M à une date t décrit un mouvement circulaire uniforme de rayon $HM_c = HM$ à la vitesse de rotation $\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}}$. On peut alors très facilement exprimer la vitesse et l'accélération d'entraînement.

Rotation uniforme

On note $\vec{e}_t$ le vecteur tangent au mouvement de M_c à la date t et $\vec{e}_h$ le vecteur radial. La vitesse et l'accélération d'entraînement sont simplement celles que l'on sait aisément déterminer pour le mouvement circulaire uniforme d'un point.

$$\vec{v}_{\text{entraînement}} = \omega\, HM\, \vec{e}_t$$

$$\vec{a}_{\text{entraînement}} = -\omega^2\, HM\, \vec{e}_h$$

Seul le mouvement de rotation uniforme est au programme. Si, toutefois, le mouvement était non uniforme, il suffirait d'ajouter une composante tangentielle à l'accélération en plus de la composante normale. On aurait :

$$\vec{a}_{\text{entraînement}} = -\omega^2\, HM\, \vec{e}_h + \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\, HM\, \vec{e}_t$$

On doit retenir que :

$$\underbrace{\vec{v}_{M/\mathcal{R}}}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}_{\text{relative}} + \vec{v}_{\text{entraînement}}$$

$$\underbrace{\vec{a}_{M/\mathcal{R}}}_{\text{absolue}} = \underbrace{\vec{a}_{M/\mathcal{R}'}}_{\text{relative}} + \vec{a}_{\text{entraînement}} + \vec{a}_{\text{Coriolis}}$$

La vitesse et l'accélération d'entraînement doivent être déterminées en utilisant la notion de point coincident. L'accélération de Coriolis doit être connue par cœur :

$$\vec{a}_{\text{Coriolis}} = 2\vec{\omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} \wedge \underbrace{\vec{v}_{M/\mathcal{R}'}}_{\text{relative}}$$