

Électronique non linéaire

JR Seigne MP*, Clemenceau
Nantes

September 3, 2023

① Loi d'Ohm

Modèle de Drude

Les deux formes de la loi d'Ohm

Magnétorésistance

② Effet Joule

③ Puissance

④ Théorème de Millmann

⑤ Composants non linéaires

Multiplieur

Amplificateur opérationnel

Soustracteur

Intégrateur

Filtre de Sallen-Key

Comparateur simple

La diode

Hypothèses

On considère un électron d'un milieu conducteur. Il subit les forces :

- Poids négligé : $m\vec{g}$
- Force électrique : $-e\vec{E}$
- Force magnétique négligée : $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$
- Force exercée par l'environnement assimilée à une force de frottement fluide : $-h\vec{v}$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - h\vec{v} + m\vec{g}$$

Le référentiel du conducteur est supposé galiléen.

Simplification

On néglige le poids. On fait apparaître la pulsation cyclotron

$\vec{\omega}_c = \frac{e\vec{B}}{m}$. L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E} + \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$$

Nous étudierons deux cas de figure : sans champ magnétique (ou en négligeant son effet) et avec prise en compte du champ magnétique (effet de magnétorésistance).

Champ électrique statique et uniforme

Loi d'Ohm

Modèle de Drude

Les deux formes de la
loi d'Ohm

Magnétorésistance

Effet Joule

Puissance

Théorème de
MillmannComposants
non linéaires

Multiplieur

Amplificateur
opérationnel

Soustracteur

Intégrateur

Filtre de Sallen-Key

Comparateur simple

La diode

On pose $\tau = m/h$, l'équation différentielle est donc :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}$$

La solution générale est de la forme $\vec{v}_g = \vec{A} \exp -\frac{t}{\tau}$, la solution particulière $\vec{v}_p = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$. Avec les conditions initiales, on trouve l'expression suivante :

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_0 + \frac{e\tau}{m} \vec{E} \right) \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) - \frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

Champ électrique harmonique et uniforme

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m} \vec{E}_0 \exp j\omega t \text{ avec } \underline{\vec{E}}_0 = \vec{E}_0 \exp j\varphi_0.$$

La solution générale est toujours de la forme $\vec{v}_g = \vec{A} \exp -\frac{t}{\tau}$, la solution particulière \vec{v}_p doit être cherchée sous forme complexe :

$$(j\omega + \frac{1}{\tau})\underline{\vec{v}}_p = -\frac{e}{m} \underline{\vec{E}}_0 \exp j\omega t$$

ce qui donne :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{A}} \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) - \frac{e\tau}{m(1 + j\omega\tau)} \underline{\vec{E}}$$

Par définition, la *densité volumique de courant* est :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} = -ne \vec{v}$$

où ρ_m est la charge volumique mobile, n est la densité volumique de particules chargées mobiles par unité de volume du conducteur (on ne considère que des électrons). On a donc :

$$\vec{j} \text{ est en } \text{A} \cdot \text{m}^{-2} \text{ et que } i = \iint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

Régime permanent

Au bout de quelques $\tau \ll 10^{-10}$ s, on peut considérer que $\exp -t/\tau \simeq 0$. Le régime transitoire est terminé. La vitesse de l'électron est proportionnelle au champ électrique :

$$\text{Statique} \quad \vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E} = \gamma_0 \vec{E}$$

$$\text{Harmonique} \quad \vec{v} = -\frac{e\tau}{m(1+j\omega\tau)} \vec{E} = \underline{\gamma} \vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau} \vec{E}$$

Statique ou ARQS

La densité de courant \vec{j} est proportionnelle au champ électrique \vec{E} :

$$\text{Loi d'Ohm locale : } \vec{j} = \gamma \vec{E} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}$$

où γ en $\Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$ est la conductivité électrique du conducteur.

À cette loi locale, valable en tout point du conducteur, correspond une loi globale pour la totalité du conducteur :

$$\text{Loi d'Ohm globale : } u = Ri$$

avec $R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{S}$ pour un conducteur de section S et de longueur ℓ . R en Ω est la résistance électrique du conducteur.

L'équation différentielle avec présence d'un champ magnétique est pour la densité de courant :

$$\tau \frac{d\vec{j}}{dt} + \vec{j} = \gamma \left(\vec{E} - \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

En statique, on obtient :

$$\vec{j} = \gamma \left(\vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

Avec $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$, on arrive à :

$$\vec{j} = -\gamma R_H j_z B_\theta \vec{e}_r + \gamma (E_z + R_H j_r B_\theta) \vec{e}_z$$

La densité de courant \vec{j} n'est plus colinéaire au champ électrique \vec{E} .

Diminution de la conductivité

En identifiant les composantes de \vec{j} , on a :

$$\begin{cases} j_r = -\gamma R_H B_\theta j_z \\ j_z = \gamma(E_z + R_H B_\theta j_r) \end{cases}$$

$$j_z = \frac{\gamma}{1 + \gamma^2 R_H^2 B_\theta^2} E_z$$

Tout se passe comme si la conductivité était diminuée par rapport à la situation où le champ magnétique est nul $B_\theta = 0$ et où la conductivité était γ .

Calcul de la résistance

L'intensité est donnée par :

$$i = \iint \vec{j} \cdot d\vec{S} = \iint \vec{j} \cdot dS \vec{e}_z = \iint j_z(r) r dr d\theta$$

L'invariance par rotation d'angle θ et la relation $u = E_z \ell$ permet d'écrire :

$$i = u \frac{\gamma \pi}{\ell} \int_0^a \frac{2r}{1 + \frac{\gamma^2 B_0^2 r^2}{n^2 e^2 a^2}} dr$$

On pose $x = \frac{\gamma B_0 r}{nea}$, l'intégrale devient :

$$i = u \frac{\gamma \pi a^2}{\ell} \frac{n^2 e^2}{\gamma^2 B_0^2} \int_0^{\frac{\gamma B_0}{ne}} \frac{2x}{1 + x^2} dx = u \frac{\gamma \pi a^2}{\ell} \frac{n^2 e^2}{\gamma^2 B_0^2} \ln\left(1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}\right)$$

Magnétorésistance

En l'absence de champ magnétique : $R = \frac{u}{i} = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{\pi a^2}$.

En présence du champ magnétique proposé ici, on trouve :

$$R = \frac{1}{\gamma} \frac{\ell}{\pi a^2} \frac{\frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}}{\ln\left(1 + \frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}\right)}$$

$y^2 \geq \ln(1 + y^2)$, la résistance est plus élevée. On retrouve le cas sans champ magnétique $B_0 = 0$ en effectuant un développement limité de $\ln(1 + y^2) \simeq y^2$.

Puissance mécanique

La puissance de la force électrique est :

$$P_{1e^-} = -e \vec{E} \cdot \vec{v}$$

En régime permanent, nous avons vu que $\vec{v} = -\frac{e\tau}{m} \vec{E}$. La puissance fournie à un électron est donc proportionnelle au carré du champ électrique :

$$P_{1e^-} = \frac{e^2\tau}{m} \vec{E}^2$$

Si l'on raisonne par unité de volume :

$$p_{Vol} = \frac{ne^2\tau}{m} \vec{E}^2 = \gamma \vec{E}^2 = \vec{j} \cdot \vec{E} = \frac{\vec{j}^2}{\gamma}$$

Puissance électrique

Comme pour la loi d'Ohm, il y a une forme locale et une forme globale pour la loi de Joule :

$$\text{Loi de Joule locale : } p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma}$$

En calculant la puissance globale pour le conducteur de volume $S\ell$, on a :

$$p_{\text{Joule}} = (\vec{j} \cdot \vec{E})S\ell = (E\ell)(jS)$$

$$\text{Loi de Joule globale : } p_{\text{Joule}} = ui$$

Puissance moyenne

La puissance instantanée est $p(t) = u(t)i(t)$, très souvent seule la puissance moyenne est significative :

$$\text{Évolution quelconque : } P_{\text{moy}} = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} u(t)i(t) dt$$

$$\text{Évolution périodique : } P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0 + T} u(t)i(t) dt$$

La puissance dans un conducteur ohmique en continu est :

$$P = P_{\text{moy}} = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

puisque $i(t) = I$ et $u(t) = U = RI \forall t$.

Résistance en régime sinusoïdal

On considère la résistance $R = 1/G$ alimentée par l'intensité $i(t) = I_m \cos \omega t$, la puissance instantanée est $p(t) = RI_m^2 \cos^2 \omega t$. La puissance moyenne est donnée par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = RI_m^2 \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \omega t dt$$

Nous savons que la moyenne de la fonction $\cos^2 \omega t$ est $1/2$:

$$\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \cos^2(\omega t) (\omega dt) = \frac{1}{2}$$

$$P_{moy} = R \frac{I_m^2}{2} = \frac{U_m^2}{2R} = G \frac{U_m^2}{2} = R I_{eff}^2 = G U_{eff}^2$$

Valeur efficace

Son carré S_{eff}^2 est la moyenne du carré de la grandeur instantanée $s^2(t)$:

$$S_{eff}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} s^2(t) dt$$

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Tension efficace : } U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$$

Utile pour les calculs des valeurs moyennes $\langle \frac{1}{2} m \vec{v}^2 \rangle$, $\langle \frac{1}{2} k x^2 \rangle$,
 $\langle \frac{1}{2} C u^2 \rangle$, $\langle \frac{1}{2} L i^2 \rangle \dots$

Grandeurs mesurées

Contrôleur numérique

mode *DC* U_0

mode *AC + DC* $\sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$

mode *AC* $\frac{U_1}{\sqrt{2}}$

Oscilloscope numérique

average mode *DC* U_0

average mode *AC* 0

RMS mode *DC* $\sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$

RMS mode *AC* $\frac{U_1}{\sqrt{2}}$

Loi d'Ohm

Modèle de Drude

Les deux formes de la
loi d'Ohm

Magnétorésistance

Effet Joule

Puissance

Théorème de Millmann

Composants non linéaires

Multiplieur

Amplificateur
opérationnel

Soustracteur

Intégrateur

Filtre de Sallen-Key

Comparateur simple

La diode

Cas général en régime sinusoïdal

Une impédance $\underline{Z} = R + jX = 1/\underline{Y}$, dont le module est $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$, est traversée par l'intensité $i(t) = I_m \cos \omega t$.
La tension à ses bornes est :

$$u(t) = |\underline{Z}| I_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \varphi = \arg \frac{u}{i} = \arg \underline{Z} = \arctan \frac{X}{R}$$

Avec $U_m = |\underline{Z}| I_m$, la puissance moyenne dissipée est :

$$P_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) dt = \frac{U_m I_m}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) dt$$

$$P_{\text{moy}} = U_{\text{eff}} I_{\text{eff}} \cos \varphi = \Re(\underline{Z}) I_{\text{eff}}^2 = \Re(\underline{Y}) U_{\text{eff}}^2$$

Utilisation des complexes

On peut utiliser les complexes pour obtenir la **puissance moyenne** mais il ne faut pas les utiliser pour la puissance instantanée :

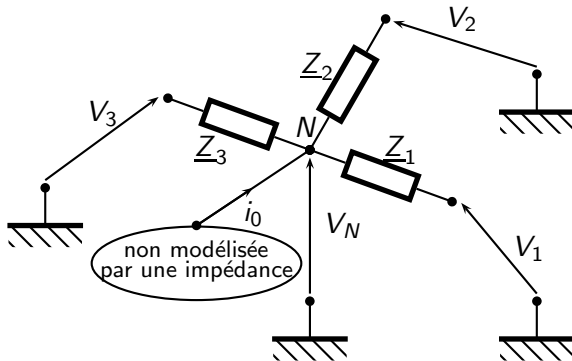
$$\begin{cases} \underline{i}(t) = I_m \exp j\omega t \\ \underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\langle p(t) \rangle = \langle i(t)u(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re [i(t)\underline{u}^*(t)]$$

$$P_{moy} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re [U_m I_m \exp -j\varphi] = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

Loi des noeuds en terme de potentiel...

On travaille sur l'exemple du nœud suivant :



... encore appelée théorème de Millmann

Loi d'Ohm

Modèle de Drude

Les deux formes de la
loi d'Ohm

Magnétorésistance

Effet Joule

Puissance

Théorème de Millmann

Composants non linéaires

Multiplieur

Amplificateur
opérationnel

Soustracteur

Intégrateur

Filtre de Sallen-Key

Comparateur simple

La diode

La loi des noeuds donne :

$$i_0 + \frac{V_1 - V_N}{Z_1} + \frac{V_2 - V_N}{Z_2} + \frac{V_3 - V_N}{Z_3} = 0$$

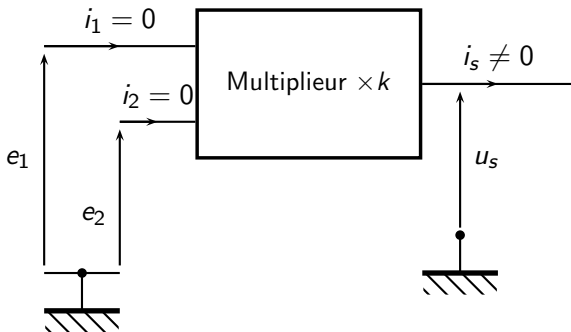
Appliquer le théorème de Millmann consiste à exprimer le
potentiel au nœud N :

$$V_N = \frac{i_0 + \frac{V_1}{\underline{Z}_1} + \frac{V_2}{\underline{Z}_2} + \frac{V_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{i_0 + \underline{Y}_1 V_1 + \underline{Y}_2 V_2 + \underline{Y}_3 V_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Il fournit en sortie une tension image du produit des deux tensions d'entrée :

$$u_s(t) = k u_{e1}(t) \times u_{e2}(t) = \frac{u_{e1}(t) \times u_{e2}(t)}{V_0}$$

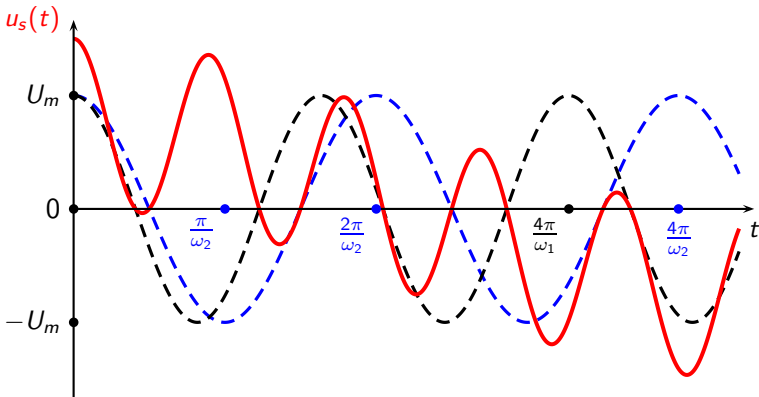
Le coefficient k - inverse d'une tension - correspond à une tension $V_0 = 10 \text{ V}$ pour le multiplieur très courant AD534.



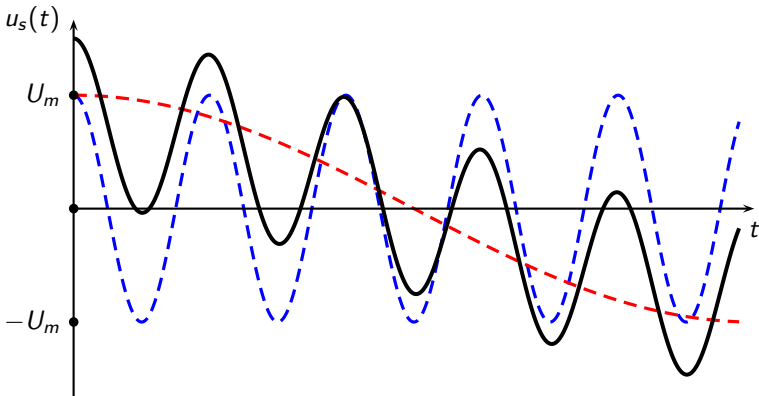
On multiplie $u_{e1}(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t$ et $u_{e2}(t) = U_{m2} \cos \omega_2 t$:

$$u_s(t) = \frac{U_{m1} U_{m2}}{V_0} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t$$

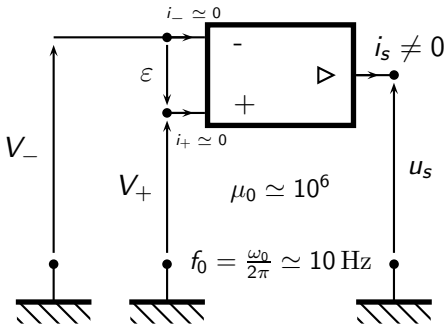
$$u_s(t) = \frac{U_{m1} U_{m2}}{2V_0} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t]$$



On constate sur le graphique que la tension $u_s(t)$ issue du produit de signaux de pulsations ω_1 et ω_2 est bien la superposition d'un signal **haute fréquence** correspondant à $\omega_1 + \omega_2$ et d'un signal **basse fréquence** $\omega_1 - \omega_2$:

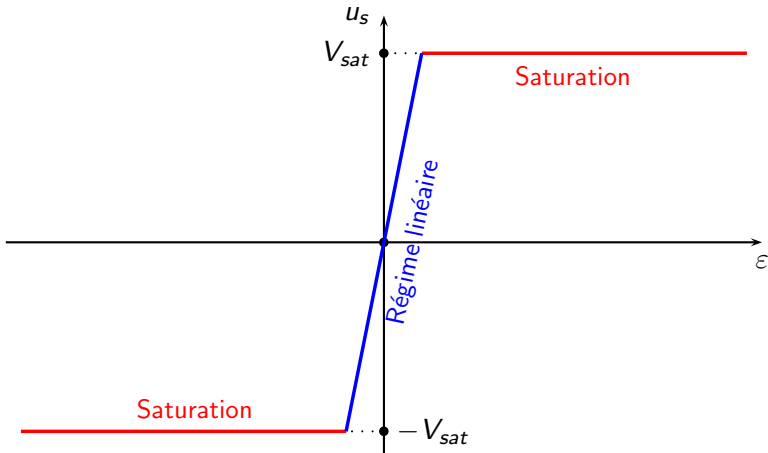


Conçu pour réaliser des opérations mathématiques courantes.



$$\text{Régime linéaire : } u_s = \underline{\mu} \varepsilon = \underline{\mu} (V_+ - V_-) = \frac{\mu_0}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \varepsilon$$

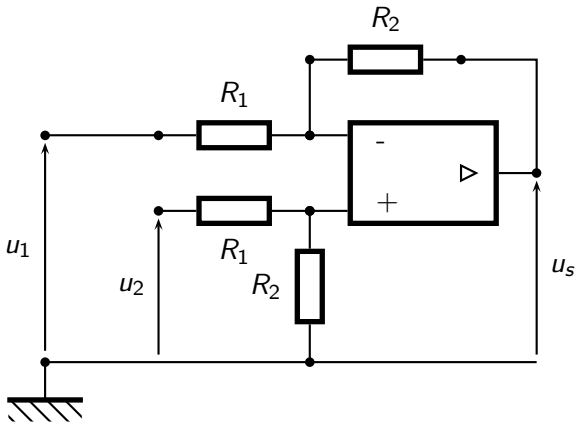
$$\text{Régime de saturation : } u_s = +V_{sat} \text{ et } u_s = -V_{sat} \text{ pour } \varepsilon > 0 \text{ resp. } < 0.$$



Régime linéaire : $u_s = \underline{\mu} \varepsilon$ avec $|\underline{\mu}| \gg 1$ autorise à considérer $\varepsilon \simeq 0$.

Régime de saturation : $u_s = +V_{sat}$ pour $\varepsilon > 0$ et
 $u_s = -V_{sat}$ pour $\varepsilon < 0$.

Soustracteur



Montage soustracteur en régime linéaire :

$$u_s = \frac{R_2}{R_1} (u_2 - u_1)$$

Calcul du soustracteur

$$V_- = \frac{u_1}{\frac{R_1}{1} + \frac{R_2}{1}} \quad \text{et} \quad V_+ = \frac{u_2}{\frac{R_1}{1} + \frac{R_2}{1}} + \frac{0}{\frac{R_1}{1} + \frac{R_2}{1}}$$

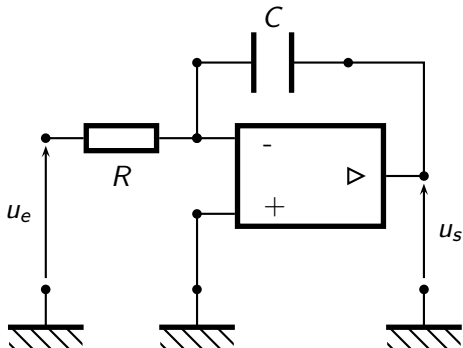
L'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \quad \text{donc} \quad V_+ = V_-$$

On peut donc en déduire le lien entre les tensions d'entrée u_1 et u_2 et la tension de sortie :

$$u_s = \frac{R_2}{R_1} (u_2 - u_1)$$

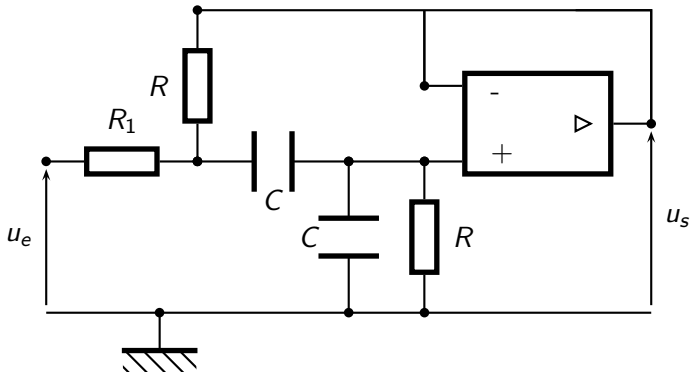
Le montage est un véritable soustracteur pour $R_1 = R_2$.



Montage intégrateur en régime linéaire :

$$\text{En notation fréquentielle : } \underline{u}_s = -\frac{1}{jRC\omega} \underline{u}_e$$

$$\text{En notation temporelle : } u_s(t) = -\frac{1}{RC} \int u_e(t) dt$$



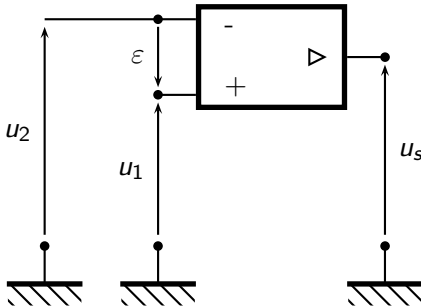
$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

$$H_0 = \frac{R}{2(R + R_1)}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}$$

$$Q = \frac{1}{2\sqrt{1 + \frac{R}{R_1}}}$$

Absence de rétroaction entre la sortie et les entrées + et -.
Régime de saturation : $\varepsilon = u_1 - u_2 \neq 0$

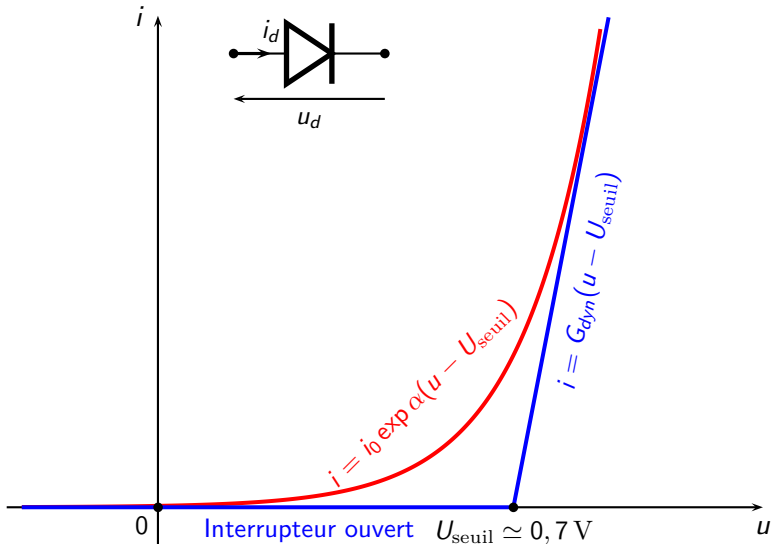
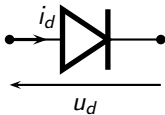


Montage comparateur simple en régime non linéaire :

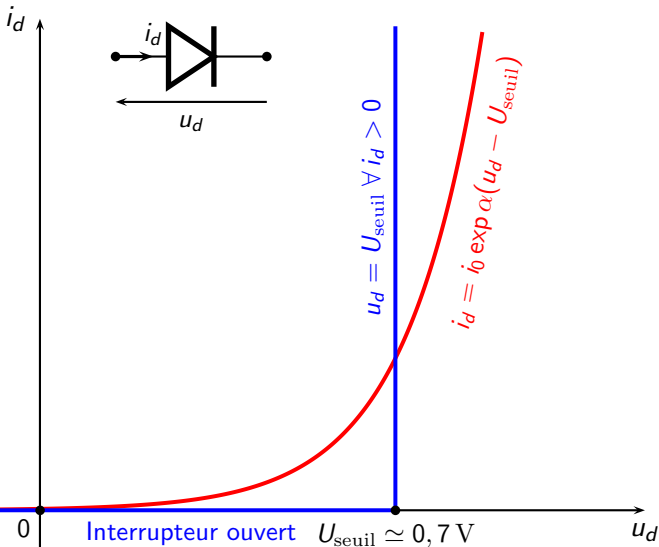
Saturation haute 1 : $u_1 > u_2$, $\varepsilon > 0$ et $u_s = +V_{sat}$

Saturation basse 0 : $u_1 < u_2$, $\varepsilon < 0$ et $u_s = -V_{sat}$

Les deux modèles initiaux



Modèle simplifié avec seuil



Modèle idéal

