# Électronique non linéaire

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

September 1, 2024

# Hypothèses

On considère un électron d'un milieu conducteur. Il subit les forces :

- Poids négligé : $m\vec{g}$
- Force électrique : $-e\,\vec{E}$
- Force magnétique négligée : $-e\,\vec{v}\wedge\vec{B}$
- Force exercée par l'environnement assimilée à une force de frottement fluide : $-h\,\vec{v}$

L'équation différentielle du mouvement est :

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\,\vec{E} - e\vec{v}\wedge\vec{B} - h\,\vec{v} + m\vec{g}$$

Le référentiel du conducteur est supposé galiléen.

# Simplification

On néglige le poids. On fait apparaître la pulsation cyclotron $\vec{\omega}_c = \dfrac{e\vec{B}}{m}$. L'équation différentielle devient alors :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\,\vec{E} + \vec{\omega}_c \wedge \vec{v}$$

Nous étudierons deux cas de figure : sans champ magnétique (ou en négligeant son effet) et avec prise en compte du champ magnétique (effet de magnétorésistance).

# Champ électrique statique et uniforme

On pose $\tau = m/h$, l'équation différentielle est donc :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\,\vec{E}$$

La solution générale est de la forme $\vec{v}_g = \vec{A}\exp -\frac{t}{\tau}$, la solution particulière $\vec{v}_p = -\frac{e\tau}{m}\,\vec{E}$. Avec les conditions initiales, on trouve l'expression suivante :

$$\vec{v} = \left(\vec{v}_0 + \frac{e\tau}{m}\vec{E}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{e\tau}{m}\vec{E}$$

# Champ électrique harmonique et uniforme

$$\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\vec{v}}{\tau} = -\frac{e}{m}\,\underline{\vec{E}_0} \exp j\omega t \text{ avec } \underline{\vec{E}_0} = \vec{E}_0 \exp j\varphi_0 .$$

La solution générale est toujours de la forme $\vec{v}_g = \vec{A} \exp -\frac{t}{\tau}$, la solution particulière $\vec{v}_p$ doit être cherchée sous forme complexe :

$$(j\omega + \frac{1}{\tau})\underline{\vec{v}_p} = -\frac{e}{m}\underline{\vec{E}_0} \exp j\omega t$$

ce qui donne :

$$\underline{\vec{v}} = \underline{\vec{A}} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \frac{e\tau}{m(1+j\omega\tau)}\underline{\vec{E}}$$

# Densité de courant

Par définition, la *densité volumique de courant* est :

$$\vec{j} = \rho_m \vec{v} = -ne\,\vec{v}$$

où $\rho_m$ est la charge volumique mobile, $n$ est la densité volumique de particules chargées mobiles par unité de volume du conducteur (on ne considère que des électrons). On a donc :

$$\vec{j} \text{ est en } \mathrm{A\cdot m^{-2}} \text{ et que } i = \iint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

# Régime permanent

Au bout de quelques $\tau \ll 10^{-10}\,\mathrm{s}$, on peut considérer que $\exp -t/\tau \simeq 0$. Le régime transitoire est terminé. La vitesse de l'électron est proportionnelle au champ électrique :

$$\text{Statique} \qquad \vec{v} = -\frac{e\tau}{m}\,\vec{E}$$

$$\vec{j} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E} = \gamma_0\vec{E}$$

$$\text{Harmonique} \qquad \underline{\vec{v}} = -\frac{e\tau}{m(1+j\omega\tau)}\underline{\vec{E}} = \underline{\gamma}\,\underline{\vec{E}}$$

$$\underline{\vec{j}} = \frac{\gamma_0}{1+j\omega\tau}\underline{\vec{E}}$$

# Statique ou ARQS

La densité de courant $\vec{j}$ est proportionnelle au champ électrique $\vec{E}$ :

$$\text{Loi d'Ohm locale : } \vec{j} = \gamma\,\vec{E} = \frac{ne^2\tau}{m}\,\vec{E}$$

où $\gamma$ en $\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ est la conductivité électrique du conducteur.

À cette loi locale, valable en tout point du conducteur, correspond une loi globale pour la totalité du conducteur :

$$\text{Loi d'Ohm globale : } u = R\,i$$

avec $R = \dfrac{1}{\gamma}\dfrac{\ell}{S}$ pour un conducteur de section $S$ et de longueur $\ell$. $R$ en $\Omega$ est la résistance électrique du conducteur.

L'équation différentielle avec présence d'un champ magnétique est pour la densité de courant :

$$\tau \frac{\mathrm{d}\vec{j}}{\mathrm{d}t} + \vec{j} = \gamma \left( \vec{E} - \frac{1}{ne} \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

En statique, on obtient :

$$\vec{j} = \gamma \left( \vec{E} + R_H \vec{j} \wedge \vec{B} \right)$$

Avec $\vec{B} = B_\theta \vec{e}_\theta$ et $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$, on arrive à :

$$\vec{j} = -\gamma R_H j_z B_\theta \, \vec{e}_r + \gamma (E_z + R_H j_r B_\theta) \, \vec{e}_z$$

La densité de courant $\vec{j}$ n'est plus colinéaire au champ électrique $\vec{E}$.

# Diminution de la conductivité

En identifiant les composantes de $\vec{j}$, on a :

$$\begin{cases} j_r = -\gamma R_H B_\theta j_z \\ \\ j_z = \gamma(E_z + R_H B_\theta j_r) \end{cases}$$

$$j_z = \frac{\gamma}{1+\gamma^2 R_H^2 B_\theta^2} E_z$$

Tout se passe comme si la conductivité était diminuée par rapport à la situation où le champ magnétique est nul $B_\theta = 0$ et où la conductivité était $\gamma$.

# Calcul de la résistance

L'intensité est donnée par :

$$i = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint \vec{j} \cdot \mathrm{d}S\vec{e}_z = \iint j_z(r) r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

L'invariance par rotation d'angle $\theta$ et la relation $u = E_z \ell$ permet d'écrire :

$$i = u\frac{\gamma\pi}{\ell}\int_0^a \frac{2r}{1+\frac{\gamma^2 B_0^2 r^2}{n^2 e^2 a^2}}\mathrm{d}r$$

On pose $x = \dfrac{\gamma B_0 r}{nea}$, l'intégrale devient :

$$i = u\frac{\gamma\pi a^2}{\ell}\frac{n^2e^2}{\gamma^2 B_0^2}\int_0^{\frac{\gamma B_0}{ne}} \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = u\frac{\gamma\pi a^2}{\ell}\frac{n^2e^2}{\gamma^2 B_0^2}\ln(1+\frac{\gamma^2 B_0^2}{n^2e^2})$$

# Magnétorésistance

En l'absence de champ magnétique : $R = \frac{u}{i} = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{\pi a^2}$.

En présence du champ magnétique proposé ici, on trouve :

$$R = \frac{1}{\gamma}\frac{\ell}{\pi a^2}\,\frac{\dfrac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}}{\ln\left(1+\dfrac{\gamma^2 B_0^2}{n^2 e^2}\right)}$$

$y^2 \geq \ln(1+y^2)$, la résistance est plus élevée. On retrouve le cas sans champ magnétique $B_0 = 0$ en effectuant un développement limité de $\ln(1+y^2) \simeq y^2$.

# Puissance mécanique

La puissance de la force électrique est :

$$P_{1\mathrm{e}^-} = -e\,\vec{E}\cdot\vec{v}$$

En régime permanent, nous avons vu que $\vec{v} = -\dfrac{e\tau}{m}\vec{E}$. La puissance fournie à un électron est donc proportionnelle au carré du champ électrique :

$$P_{1\mathrm{e}^-} = \frac{e^2\tau}{m}\vec{E}^2$$

Si l'on raisonne par unité de volume :

$$p_{vol} = \frac{ne^2\tau}{m}\vec{E}^{\,2} = \gamma\,\vec{E}^{\,2} = \vec{j}\cdot\vec{E} = \frac{\vec{j}^{\,2}}{\gamma}$$

# Puissance électrique

Comme pour la loi d'Ohm, il y a une forme locale et une forme globale pour la loi de Joule :

Loi de Joule locale : $p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \, \vec{E}^{\,2} = \dfrac{\vec{j}^{\,2}}{\gamma}$

En calculant la puissance globale pour le conducteur de volume $S\,\ell$, on a :

$$p_{\text{Joule}} = (\vec{j} \cdot \vec{E}) S\ell = (E\ell)\,(jS)$$

Loi de Joule globale : $p_{\text{Joule}} = u\,i$

# Puissance moyenne

La puissance instantanée est $p(t) = u(t)i(t)$, très souvent seule la puissance moyenne est significative :

$$\text{Évolution quelconque : } P_{moy} = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\text{Évolution périodique : } P_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)i(t)\,\mathrm{d}t$$

La puissance dans un conducteur ohmique en continu est :

$$P = P_{moy} = RI^2 = \frac{U^2}{R}$$

puisque $i(t) = I$ et $u(t) = U = RI\ \forall t$.

# Résistance en régime sinusoïdal

On considère la résistance $R = 1/G$ alimentée par l'intensité $i(t) = I_m \cos\omega t$, la puissance instantanée est $p(t) = RI_m^2 \cos^2\omega t$. La puissance moyenne est donnée par :

$$P_{moy} = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} p(t)\mathrm{d}t = RI_m^2 \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2\omega t \,\mathrm{d}t$$

Nous savons que la moyenne de la fonction $\cos^2\omega t$ est $1/2$ :

$$\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2\omega t \,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \cos^2(\omega t)\,(\omega \mathrm{d}t) = \frac{1}{2}$$

$$P_{moy} = R\frac{I_m^2}{2} = \frac{U_m^2}{2R} = G\frac{U_m^2}{2} = R\,I_{eff}^2 = G\,U_{eff}^2$$

# Valeur efficace

Son carré $S_{eff}^2$ est la moyenne du carré de la grandeur instantanée $s^2(t)$ :

$$S_{eff}^2 = \langle s^2(t) \rangle = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} s^2(t)\,\mathrm{d}t$$

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{Tension efficace : } U_{eff} = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2}}$$

Utile pour les calculs des valeurs moyennes $\langle \frac{1}{2} m\vec{v}^{\,2} \rangle$, $\langle \frac{1}{2} kx^2 \rangle$, $\langle \frac{1}{2} Cu^2 \rangle$, $\langle \frac{1}{2} Li^2 \rangle$...

# Grandeurs mesurées

| Contrôleur numérique | | Oscilloscope numérique | |
|---|---|---|---|
| mode $DC$ | $U_0$ | average mode $DC$ | $U_0$ |
| | | average mode $AC$ | $0$ |
| mode $AC+DC$ | $\sqrt{U_0^2+\frac{U_1^2}{2}}$ | RMS mode $DC$ | $\sqrt{U_0^2+\frac{U_1^2}{2}}$ |
| mode $AC$ | $\frac{U_1}{\sqrt{2}}$ | RMS mode $AC$ | $\frac{U_1}{\sqrt{2}}$ |

# Cas général en régime sinusoïdal

Une impédance $\underline{Z} = R + jX = 1/\underline{Y}$, dont le module est $|\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2}$, est traversée par l'intensité $i(t) = I_m \cos \omega t$. La tension à ses bornes est :

$$u(t) = |\underline{Z}| I_m \cos(\omega t + \varphi) \text{ avec } \varphi = \arg \frac{\underline{u}}{\underline{i}} = \arg \underline{Z} = \arctan \frac{X}{R}$$

Avec $U_m = |\underline{Z}| I_m$, la puissance moyenne dissipée est :

$$P_{moy} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} p(t) \mathrm{d}t = \frac{U_m I_m}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} cos \omega t \cos(\omega t + \varphi) \mathrm{d}t$$

$$P_{moy} = U_{eff} I_{eff} \cos \varphi = \Re(\underline{Z})\, I_{eff}^2 = \Re(\underline{Y})\, U_{eff}^2$$

# Utilisation des complexes

On peut utiliser les complexes pour obtenir la puissance moyenne mais il ne faut pas les utiliser pour la puissance instantanée :

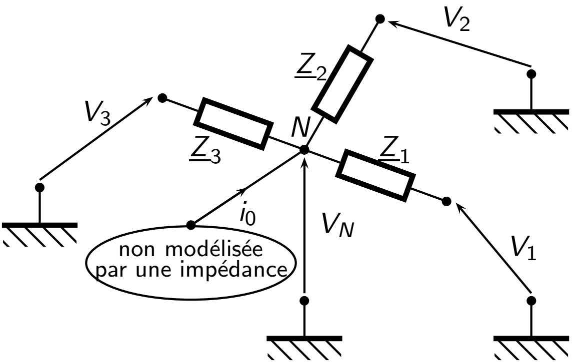
$$\begin{cases} \underline{i}(t) = I_m \exp j\omega t \\ \underline{u}(t) = U_m \exp j(\omega t + \varphi) \end{cases}$$

$$\langle p(t) \rangle = \langle i(t) u(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[ \underline{i}(t) \underline{u}^*(t) \right]$$

$$P_{moy} = \langle p(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[ U_m I_m \exp -j\varphi \right] = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

# Loi des noeuds en terme de potentiel…

On travaille sur l'exemple du nœud suivant :



# ...encore appelée théorème de Millmann

La loi des noeuds donne :

$$i_0 + \frac{V_1 - V_N}{Z_1} + \frac{V_2 - V_N}{Z_2} + \frac{V_3 - V_N}{Z_3} = 0$$

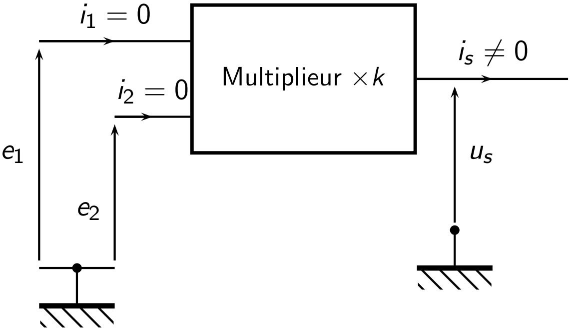
Appliquer le théorème de Millmann consiste à exprimer le potentiel au nœud $N$ :

$$V_N = \frac{i_0 + \frac{V_1}{\underline{Z}_1} + \frac{V_2}{\underline{Z}_2} + \frac{V_3}{\underline{Z}_3}}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3}} = \frac{i_0 + \underline{Y}_1 V_1 + \underline{Y}_2 V_2 + \underline{Y}_3 V_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

Il fournit en sortie une tension image du produit des deux tensions d'entrée :

$$u_s(t) = k\, u_{e1}(t) \times u_{e2}(t) = \frac{u_{e1}(t) \times u_{e2}(t)}{V_0}$$

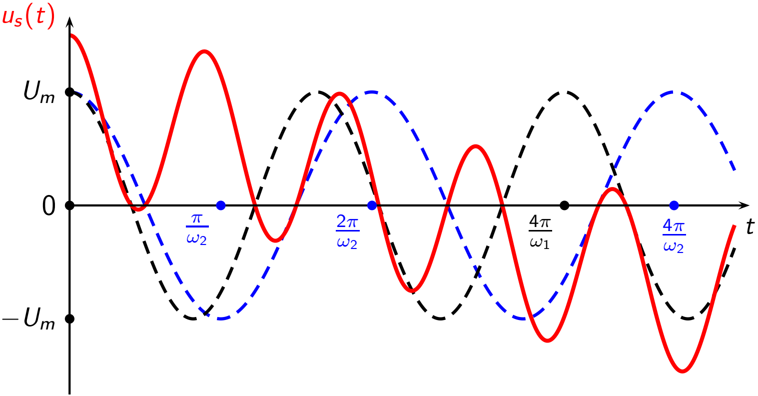
Le coefficient $k$ - inverse d'une tension - correspond à une tension $V_0 = 10\,\mathrm{V}$ pour le multiplieur très courant AD534.



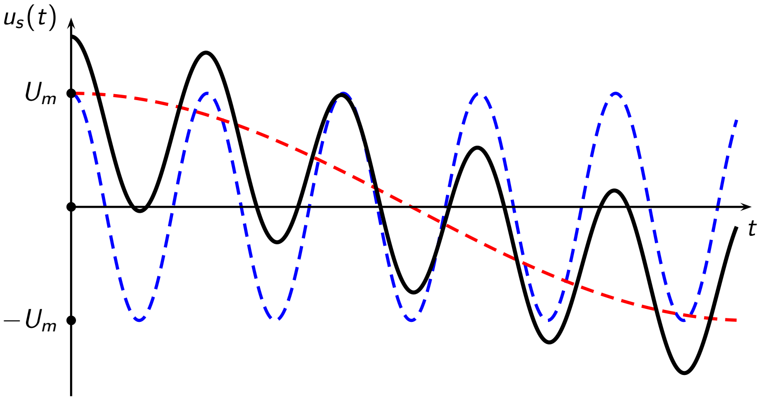
On multiplie $u_{e1}(t) = U_{m1}\cos\omega_1 t$ et $u_{e2}(t) = U_{m2}\cos\omega_2 t$ :

$$u_s(t) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{V_0}\cos\omega_1 t\,\cos\omega_2 t$$

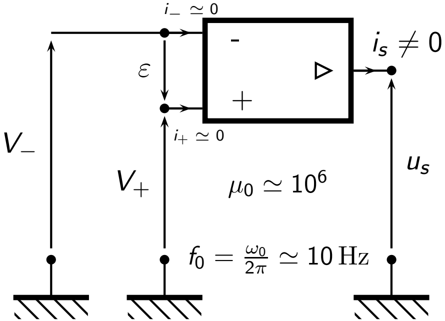
$$u_s(t) = \frac{U_{m1}U_{m2}}{2V_0}\left[\cos(\omega_1+\omega_2)t + \cos(\omega_1-\omega_2)t\right]$$



On constate sur le graphique que la tension $u_s(t)$ issue du produit de signaux de pulsations $\omega_1$ et $\omega_2$ est bien la superposition d'un signal haute fréquence correspondant à $\omega_1 + \omega_2$ et d'un signal basse fréquence $\omega_1 - \omega_2$ :

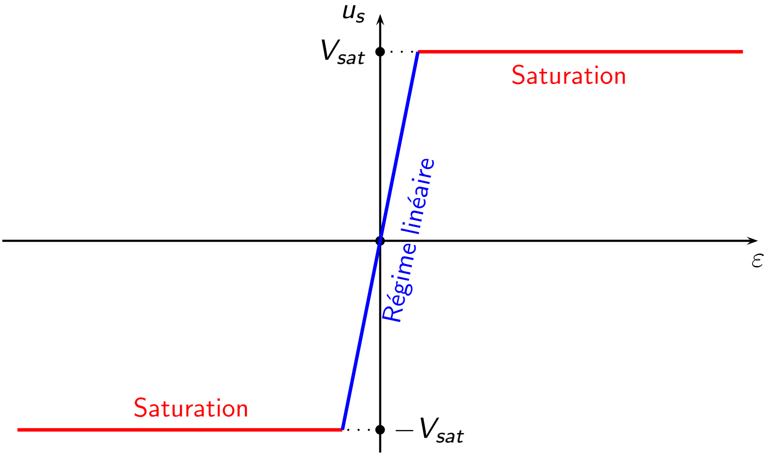


Conçu pour réaliser des opérations mathématiques courantes.




Régime linéaire : $u_s = \underline{\mu}\,\varepsilon = \underline{\mu}\,(V_+ - V_-) = \dfrac{\mu_0}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}}\,\varepsilon$

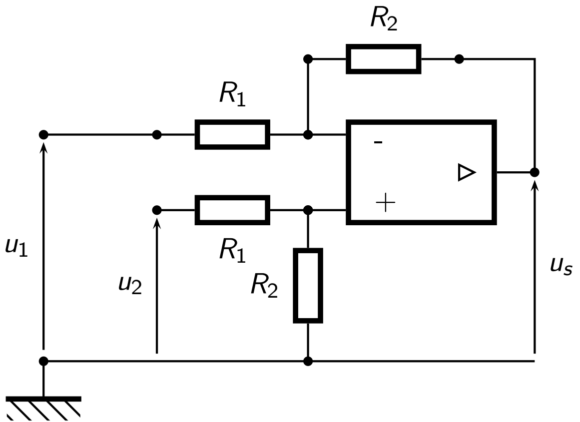
Régime de saturation : $u_s = +V_{sat}$ et $u_s = -V_{sat}$ pour $\varepsilon > 0\,\mathrm{resp.} < 0$.




Régime linéaire : $u_s = \underline{\mu}\,\varepsilon$ avec $|\underline{\mu}| \gg 1$ autorise à considérer $\varepsilon \simeq 0$.

Régime de saturation : $u_s = +V_{sat}$ pour $\varepsilon > 0$ et $u_s = -V_{sat}$ pour $\varepsilon < 0$.

# Soustracteur




Montage soustracteur en régime linéaire :

$$u_s = \frac{R_2}{R_1}(u_2 - u_1)$$

# Calcul du soustracteur

$$V_- = \frac{\dfrac{u_1}{R_1} + \dfrac{u_s}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}} \text{ et } V_+ = \frac{\dfrac{u_2}{R_1} + \dfrac{0}{R_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}}$$

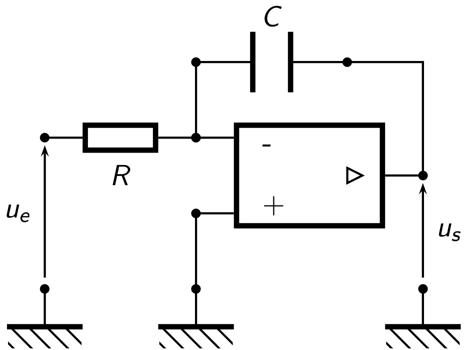
L'amplificateur opérationnel est idéal et en régime linéaire :

$$\varepsilon = V_+ - V_- = 0 \qquad \text{donc} \qquad V_+ = V_-$$

On peut donc en déduire le lien entre les tensions d'entrée $u_1$ et $u_2$ et la tension de sortie :

$$u_s = \frac{R_2}{R_1}\left(u_2 - u_1\right)$$

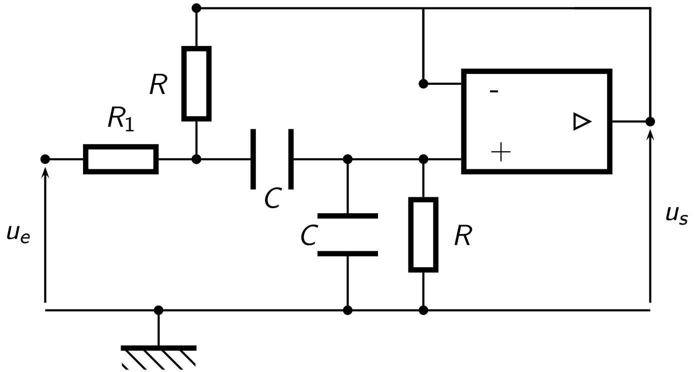
Le montage est un véritable soustracteur pour $R_1 = R_2$.




Montage intégrateur en régime linéaire :

En notation fréquentielle : $\underline{u}_s = -\dfrac{1}{jRC\omega}\,\underline{u}_e$

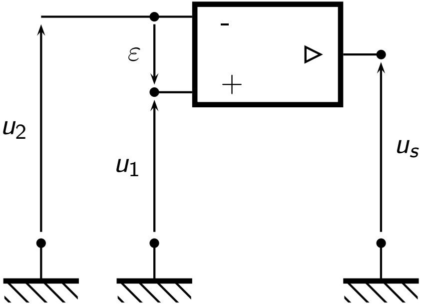
En notation temporelle : $u_s(t) = -\dfrac{1}{RC}\displaystyle\int u_e(t)\,\mathrm{d}t$




$$\underline{H}(j\omega) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$H_0 = \frac{R}{2(R+R_1)} \qquad \omega_0 = \frac{1}{RC}\sqrt{1+\frac{R}{R_1}} \qquad Q = \frac{1}{2\sqrt{1+\dfrac{R}{R_1}}}$$

*Absence de rétroaction* entre la sortie et les entrées $+$ et $-$.
Régime de saturation : $\varepsilon = u_1 - u_2 \neq 0$

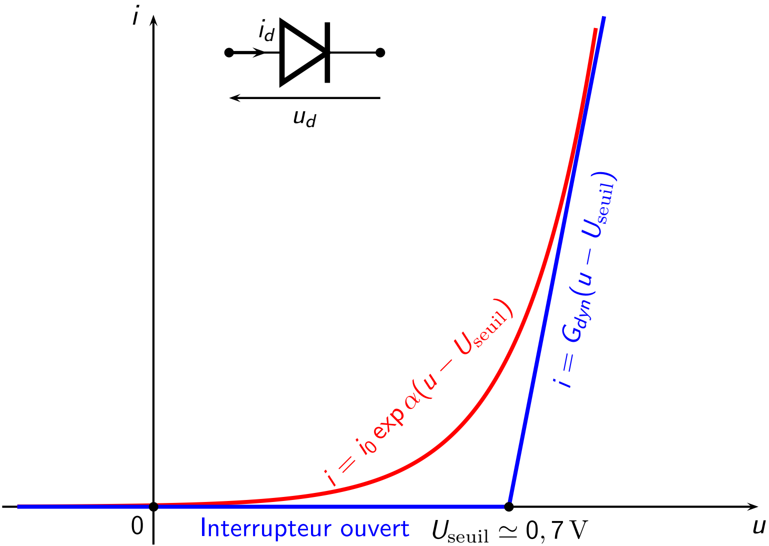



Montage comparateur simple en régime non linéaire :

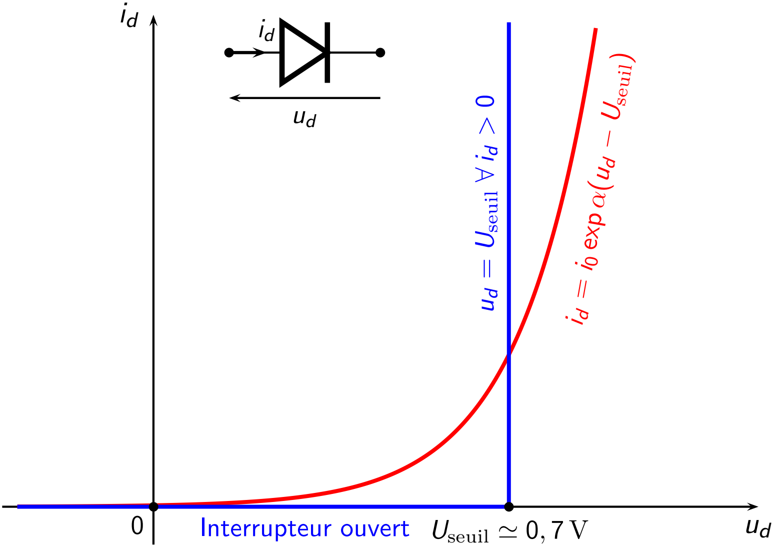
Saturation haute 1 : $u_1 > u_2$, $\varepsilon > 0$ et $u_s = +V_{sat}$

Saturation basse 0 : $u_1 < u_2$, $\varepsilon < 0$ et $u_s = -V_{sat}$

# Les deux modèles initiaux



# Modèle simplifié avec seuil



# Modèle idéal