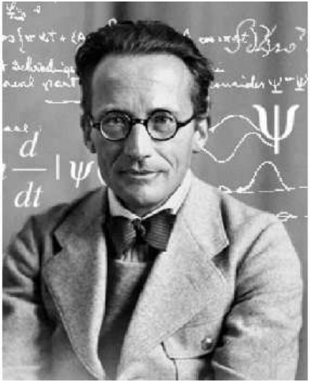
Mécanique quantique : introduction

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

March 6, 2025

Introduction à la Mécanique quantique



Louis de Broglie (1892-1987) Erwin Schrödinger (1887-1961)

En 1859 Kirchhoff étudie les émissions de rayonnement par les corps chauffés. Il est amené à définir un corps noir. Il s'agit d'un corps qui absorbe toute l'énergie qu'il reçoit. Ce corps ne sera à l'équilibre à la température T que s'il émet autant d'énergie qu'il en reçoit. En 1879, Stefan montre que la puissance surfacique rayonnée par un corps noir :

$$j_{ray} = \sigma\, T^4$$

Dans le même temps, Wien montre que dans le spectre du rayonnement du corps noir est polychromatique et que le maximum est obtenu à une longueur d'onde que l'on relie à la température par :

$$\lambda_{max}\, T = 2\,895\ \mu\mathrm{m} \cdot \mathrm{K}$$

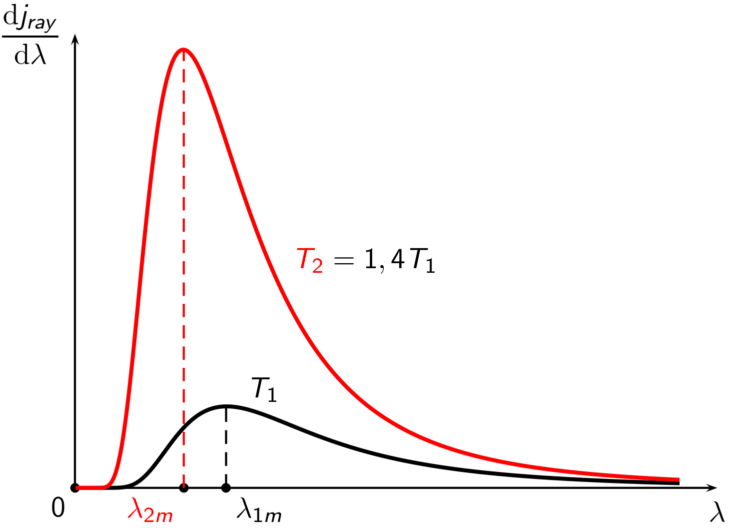
Les physiciens de la fin du XIX$^{\text{e}}$ proposent alors différentes formes de la densité spectrale $\dfrac{\mathrm{d}j_{ray}}{\mathrm{d}\nu}$ où ν est la fréquence :

$$\frac{\mathrm{d}j_{ray}^{\text{Wien}}}{\mathrm{d}\nu} = A\,\nu^3 \exp\left(-\frac{B\nu}{T}\right) \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}j_{ray}^{\text{Rayleigh-Jeans}}}{\mathrm{d}\nu} = C\,\nu^2\,T$$

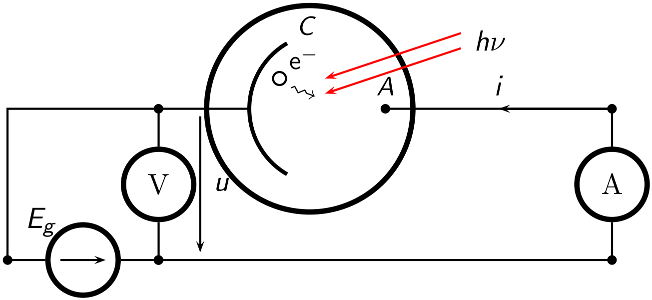
C'est Planck qui, en 1900, propose la modélisation la plus adaptée aux constatations expérimentales :

$$\frac{\mathrm{d}j_{ray}^{\text{Planck}}}{\mathrm{d}\nu} = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{\exp\left(\dfrac{h\nu}{k_B\,T}\right) - 1}$$

Allure du spectre de rayonnement du corps noir



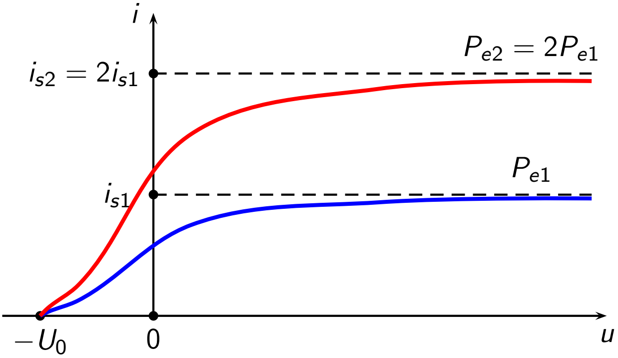
À la fin du XIX$^{\text{e}}$, on a étudié l'interaction entre la lumière et la matière en envoyant du rayonnement sur des différents métaux. Le dispositif est schématisé sur la figure ci-dessous :



En imposant une tension négative $u = -U_0$, on arrive à empêcher les électrons émis d'atteindre l'anode.

$$E_{c,i} = eU_0$$

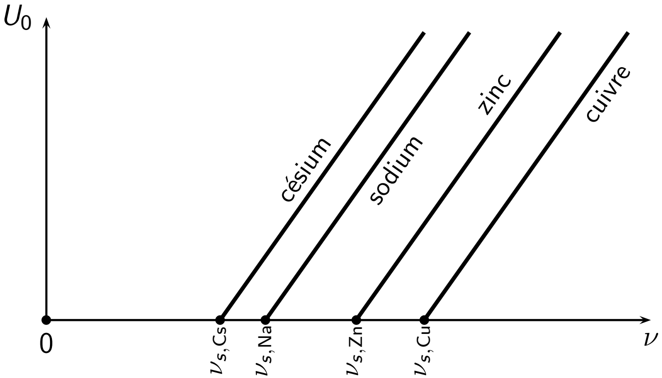
Le graphique $i(u)$ mesuré est le suivant :



Pour extraire des électrons du métal, il est nécessaire de fournir de l'énergie. On note W_s cette énergie appelée travail d'extraction. Le rayonnement apporte l'énergie $\mathcal{E}_r$. Le bilan énergétique est donc :

$$\mathcal{E}_r = W_s + E_{c,i} = W_s + eU_0$$

Face à l'incompréhension de la valeur fixe de U_0, on a étudié l'évolution de U_0 avec la fréquence ν du rayonnement éclairant le métal.



$$eU_0 = h\nu - W_s \text{ ou encore } U_0 = \frac{h}{e}(\nu - \nu_s)$$

Modèle du photon d'Einstein

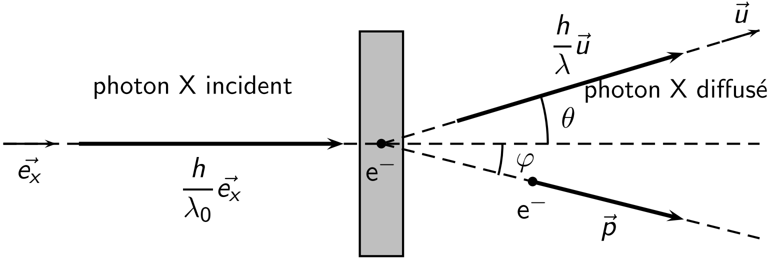
Photon : particule sans masse de vitesse c transportant une énergie et une quantité de mouvement données par :

$$\text{Énergie : } E = \hbar\omega = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\text{Quantité de mouvement : } \vec{p} = \hbar\vec{k} = \frac{h}{\lambda}\vec{u}$$

avec $\hbar = h/2\pi$. On note que pour le photon : $E = pc$. Cette relation n'est pas valable pour une particule de masse $m \neq 0$.

L'effet Compton est une collision élastique entre un photon de grande énergie – il appartient en terme de rayonnement au domaine des rayons X – et un électron faiblement lié à un noyau d'atome. Le dispositif expérimental est constitué d'une cible en graphite (C) :



Lois de conservation et résultat

La situation relève de la Mécanique relativiste d'Einstein. On écrit la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie :

$$\left\{\begin{array}{ccc} \dfrac{h}{\lambda_0}\vec{e_x} & = & \vec{p}+\dfrac{h}{\lambda}\vec{u} \\ \dfrac{hc}{\lambda_0}+mc^2 & = & \sqrt{\vec{p}^{\,2}c^2+m^2c^4}+\dfrac{hc}{\lambda} \end{array}\right.$$

$$\lambda-\lambda_0=\frac{h}{mc}\left(1-\cos\theta\right)=\Lambda\left(1-\cos\theta\right)$$

Les observations expérimentales de la fin du XIX$^{\mathrm{e}}$ siècle ont montré que les spectres atomiques présentaient des raies très fines et non pas un continuum. Rydberg en 1889 propose une loi empirique pour les raies de l'hydrogène :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Les mesures de l'époque ont fourni $R_H \simeq 1,1 \times 10^7 \,\mathrm{m}^{-1}$.

Ce modèle considère l'électron de charge $-e$, de masse m, en mouvement circulaire de rayon r autour du noyau constitué par un proton de charge $+e$. La seule force prise en compte est la force électrique de Coulomb.

Le principe fondamental de la Dynamique permet d'écrire que :

$$m\vec{a} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r} = -m\frac{v^2}{r}\vec{e_r}$$

Pour expliquer le spectre de raies, Bohr propose de quantifier le moment cinétique $\vec{L} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v} = mrv\vec{e_z}$:

$$L = mrv = n\frac{h}{2\pi} = n\hbar$$

À l'époque, cette hypothèse paraissait opportuniste et surtout déconnectée de toutes les théories physiques connues.

L'hypothèse de quantification du moment cinétique entraîne la quantification du rayon de la trajectoire de l'électron :

$$r = n^2\, r_B \quad \text{avec} \quad r_B = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m e^2} = 53\,\mathrm{pm}$$

et aussi de l'énergie :

$$E_m = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec} \quad E_0 = \frac{m e^4}{8 \varepsilon_0^2 h^2}$$

avec $E_0 = 13,6\,\mathrm{eV}$.

Les lois de quantification précédentes conduisent à une très bonne vérification de la loi de Rydberg. Lors qu'une transition s'effectue entre un niveau d'énergie haut n_1 et un niveau bas $n_2 < n_1$. La fréquence $\nu_{n_1 \to n_2} = c/\lambda_{n_1 \to n_2}$ du photon émis est :

$$h\nu_{n_1 \to n_2} = E_0 \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \quad \text{ou} \quad \frac{1}{\lambda_{n_1 \to n_2}} = \frac{E_0}{hc} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)$$

On peut identifier la constante de Rydberg :

$$R_H = \frac{E_0}{hc} = \frac{me^4}{8\varepsilon_0^2 h^3 c} = 1,094 \times 10^7 \,\mathrm{m}^{-1}$$

R_H est en excellent accord avec les mesures très précises effectuées sur les spectres... Comment gérer cette nécessité d'une quantification du moment cinétique $L = n\hbar$?...