# Ondes - Diffusion

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

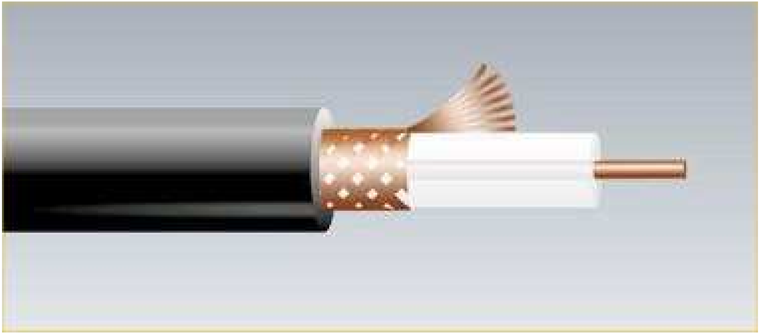
September 12, 2024

En 1747, le physicien et mathématicien français Jean Le Rond D'Alembert (1717-1783) détermine la solution de l'équation générale des cordes vibrantes. D'Alembert a été l'auteur de nombreux travaux dans le domaine des mathématiques en particulier dans celui du calcul différentiel. En Physique, il a été l'auteur de nombreux traités comme ceux de l'équilibre et du mouvement des fluides, de la théorie générale des vents, ou encore de la précession des équinoxes.

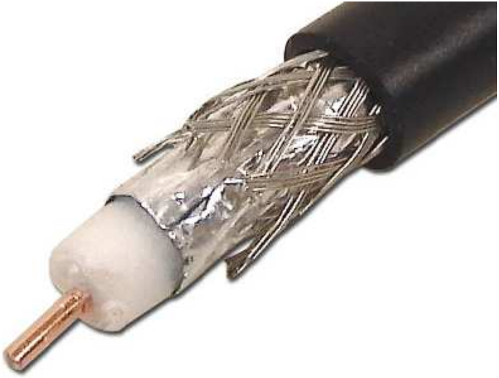
Une onde se propage dans un milieu de propagation : cela signifie qu'au passage de l'onde des propriétés de ce milieu de propagation sont modifiées. Par exemple :

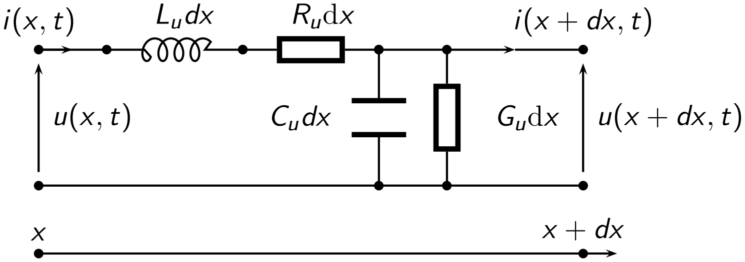
- Le long d'une corde, le passage d'une onde correspond au passage d'une déformation du profil de la corde par rapport à sa position de repos. L'ordonnée et la vitesse d'un point de la corde sont modifiées.
- Dans une ligne électrique, c'est la tension et l'intensité qui sont modifiées au passage de l'onde.
- Dans l'air, vitesse de déplacement d'une couche d'air et pression sont affectées par l'onde sonore.
- Dans le vide, le champ électrique et le champ magnétique sont modifiés lors du passage d'une onde électromagnétique, lumineuse par exemple.

On s'intéresse à la propagation d'une tension électrique dans un câble coaxial qui se présente comme on peut le voir sur les photographies qui suivent.



Le signal est transporté par le fil de cuivre central (âme). Ce dernier est entouré d'un isolant plastique. Autour de l'isolant, on trouve un conducteur qui assure la fermeture du circuit. Ce conducteur est souvent relié à la masse des appareils auxquels le câble coaxial est branché. Nous verrons plus tard que ce conducteur périphérique protège, par phénomène de blindage, le signal des perturbations électromagnétiques. Enfin, le câble est entouré d'une gaine de protection plastique.






$L_u$ s'exprime en $\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $R_u$ en $\Omega\cdot\mathrm{m}^{-1}$, $C_u$ en $\mathrm{F}\cdot\mathrm{m}^{-1}$ et $G_u$ en $\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$. Ce sont des paramètres intensifs qui caractérisent les propriétés du milieu de propagation. On les appelle encore constantes réparties. Si le câble a été réalisé correctement, il est homogène. Ces paramètres sont les mêmes en tout point du câble.

On écrit la loi des mailles et la loi des nœuds :

$$-\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L_u \frac{\partial i(x,t)}{\partial t} + R_u\, i(x,t)$$

$$-\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C_u \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + G_u\, u(x,t)$$

On effectue toujours un calcul à l'ordre le plus bas, ce qui nous amène à confondre par exemple $C_u \dfrac{\partial u(x+\mathrm{d}x,t)}{\partial t}$ avec $C_u \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}$

Cette équation a été établie par le physicien et mathématicien français Henri Poincaré (1854-1912) :

$$\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} = L_u C_u \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} + (L_u G_u + R_u C_u)\frac{\partial i}{\partial t} + R_u G_u\, i$$

Cette équation porte sur $i = i(x,t)$. On obtient exactement la même forme pour $u(x,t)$. L'équation des télégraphistes ne possède pas de solution simple.

Si l'on commence par étudier un câble coaxial parfait, l'équation des télégraphistes se simplifie. Par parfait, on en entend un câble où l'énergie n'est pas dissipée. Cela correspond à $R_u = 0$ et $G_u = 0$. On obtient alors l'équation de D'Alembert pour $i(x,t)$ ou $u(x,t)$ :

$$\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial x^2} = L_u C_u \frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 i(x,t)}{\partial t^2}$$

L'analyse dimensionnelle fait apparaître une célérité $c = \dfrac{1}{\sqrt{L_u C_u}}$.

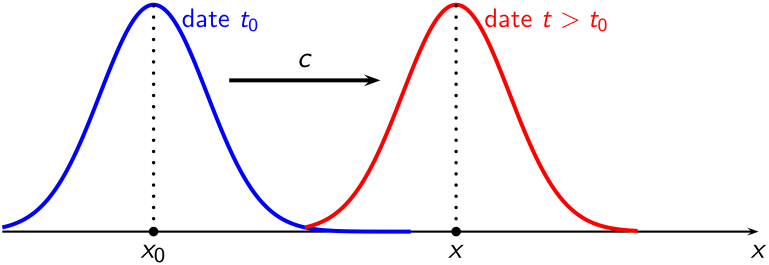
Dans le cas de la propagation d'une onde dans un milieu à trois dimensions $(x, y, z)$, la forme de l'équation de D'Alembert évolue et fait apparaître un opérateur mathématique le laplacien noté $\Delta$ qui peut être scalaire ou vectoriel. Dans le cas d'une onde, par exemple sonore, à 3 dimensions où $s(x, y, z, t)$ est la grandeur vibratoire scalaire, on a :

$$\Delta s(x,y,z,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s(x,y,z,t)}{\partial t^2}$$

$$\text{où } \Delta s(x,y,z,t) = \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

L'expression du laplacien dépend du système de coordonnées choisi. Son expression diffère pour les coordonnées cylindriques et pour les coordonnées sphériques.

Propagation à la célérité $c$ sans modification de l'onde puisque le milieu est parfait :




$s(x_0, t_0) = s(x, t)$ et $t = t_0 + \dfrac{x - x_0}{c}$ d'où :

$x_0 - ct_0 = x - ct$ propagation dans le sens $x$ croissant

$x_0 + ct_0 = x + ct$ propagation dans le sens $x$ décroissant

Pour résoudre $\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial t^2}$, il est tout à fait judicieux d'effectuer un changement de variable :

$$u = x - ct \text{ et } v = x + ct$$

avec la recherche de solutions de la forme $s(x,t) = s(u,v)$

Le changement de variables $(x,t) \rightarrow (u,v)$ impose des règles de calcul pour les dérivées :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial t} = c\left(-\dfrac{\partial}{\partial u} + \dfrac{\partial}{\partial v}\right) \end{cases}$$

On a donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial v^2} + 2\dfrac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} = c^2 \left( \dfrac{\partial^2 s}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 s}{\partial v^2} - 2\dfrac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} \right) \end{cases}$$

Après le test de ce changement de variable dans l'équation de D'Alembert, on obtient la condition $\dfrac{\partial^2 s}{\partial u \partial v} = 0$ qui prouve que la solution générale est :

$$s(x,t) = f(u) + g(v) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

- Une onde est dite **progressive** dans le cas où $x - ct$ (indifféremment $t - \dfrac{x}{c}$) et $x + ct$ (indifféremment $t + \dfrac{x}{c}$) fixent la valeur de $s(x,t)$. Le sens est $x$ croissant pour $x - ct$ et $x$ décroissant pour $x + ct$.
- Une onde est dite **plane** lorsqu'à une date $t$ fixée, la valeur de la grandeur vibratoire $s$ est la même partout dans un plan. Elle est **sphérique** si $s$ est la même partout sur une sphère.
- Une onde est dite **sinusoïdale** ou encore **harmonique** lorsque la fonction $f$ ou la fonction $g$ est de forme sinusoïdale :

$$s(x,t) = s_0 \cos \omega (t - \frac{x}{c}) \text{ ou bien } \underline{s}(x,t) = s_0 \exp j\omega (t - \frac{x}{c})$$

On parle d'Onde Plane Progressive Sinusoïdale de sigle OPPS !

L'OPPS est caractérisée par une forme $s(x,t) = s_0 \cos\left(\omega t - \dfrac{\omega}{c}x\right)$. On l'écrit plus souvent :

$$s(x,t) = s_0 \cos\left(\omega t - kx\right)$$

ou bien sous forme complexe :

$$s(x,t) = s_0 \exp j\left(\omega t - kx\right)$$

$\omega$ est la **pulsation temporelle** de l'onde, grandeur invariable de celle-ci dans les milieux linéaires. La période temporelle de l'onde est $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$k$ est la pulsation spatiale ou **vecteur d'onde**, grandeur qui dépend du milieu. La période spatiale est la longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$, elle dépend du milieu de propagation.

La forme pour une propagation à 3D de l'OPPS est :

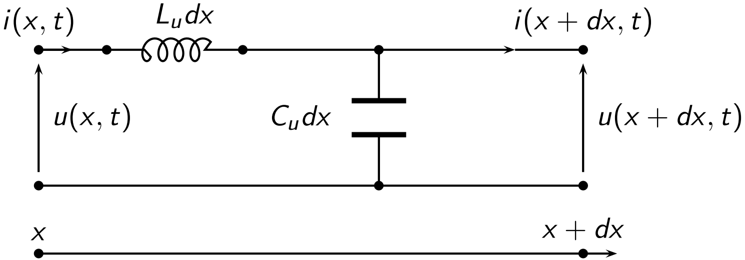
$$s(\vec{r},t) = s_0 \exp j\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$$

où le vecteur d'onde est $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z$ et le vecteur position $\vec{r} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$ si l'on travaille en cartésien. La norme du vecteur d'onde vérifie :

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Une OPPS n'a pas de sens physique du fait de son caractère monochromatique et de son extension spatiale infinie dans le plan d'onde perpendiculaire à $\vec{k}$. Seul un paquet d'ondes descriptible en une somme discrète ou plus souvent continue de composantes monochromatiques a un sens physique. **L'OPPS est une forme de base fondamentale pour étudier les ondes !**

Le modèle du câble idéal est celui représenté sur le schéma suivant :




$$\begin{cases} -\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial x} = L_u \dfrac{\partial i(x,t)}{\partial t} \\[2ex] -\dfrac{\partial i(x,t)}{\partial x} = C_u \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} \end{cases}$$

Impédance locale $\underline{Z}(x)$ en situation monochromatique :

$$\underline{Z}(x) = \frac{\underline{u}(x,t)}{\underline{i}(x,t)}$$

On se place dans le cas d'une onde progressive à $x$ croissant avec $k = \dfrac{\omega}{c} = \omega\sqrt{L_u C_u}$ :

$$\underline{u}(x,t) = \underline{U}_m \exp j(\omega t - kx) \text{ et } \underline{i}(x,t) = \underline{I}_m \exp j(\omega t - kx)$$

$$-\frac{\partial \underline{u}(x,t)}{\partial x} = L_u \frac{\partial \underline{i}(x,t)}{\partial t} \quad \rightarrow \quad jk\underline{u}(x,t) = L_u(j\omega)\underline{i}(x,t)$$

$$\underline{Z}(x) = \frac{L_u \omega}{k} = \sqrt{\frac{L_u}{C_u}}$$

Pour une onde à $x$ décroissant, on change $k$ en $-k$ :

$$\underline{Z}(x) = -\sqrt{\frac{L_u}{C_u}}$$

# Impédance caractéristique

L'impédance caractéristique d'un câble coaxial est :

Impédance caractéristique $Z_c = \sqrt{\dfrac{L_u}{C_u}}$

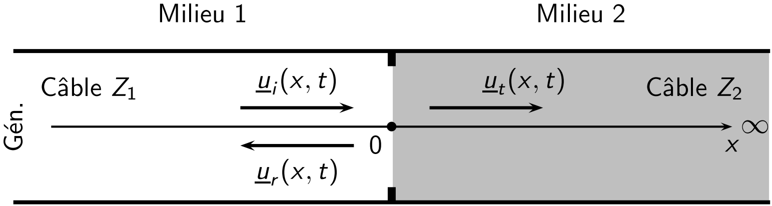
Pour un câble de TP : $Z_c = 50\,\Omega$. Pour un câble d'antenne télévision : $Z_c = 75\,\Omega$.

Impédance locale pour une onde à $x$ croissant : $\underline{Z}(x) = Z_c$ réelle indépendante de $x$.

Impédance locale pour une onde à $x$ croissant : $\underline{Z}(x) = -Z_c$ réelle indépendante de $x$.

# Liaison entre deux câbles

Cette situation correspond à un changement de milieu pour la propagation d'ondes.

# Conditions de continuité

La tension et le courant sont continus en $x = 0$ puisque la modélisation est réalisée avec condensateur et bobine :

$$\text{Continuité de la tension : } \underline{u}(x = 0^-, t) = \underline{u}(x = 0^+, t)$$

$$\text{Continuité de l'intensité : } \underline{i}(x = 0^-, t) = \underline{i}(x = 0^+, t)$$

$$\begin{cases} \text{Onde incidente} & \underline{u}_i = \underline{A}_1 \exp j(\omega t - k_1 x) \\ \text{Onde réfléchie} & \underline{u}_r = \underline{B}_1 \exp j(\omega t + k_1 x) \\ \text{Onde transmise} & \underline{u}_t = \underline{A}_2 \exp j(\omega t - k_2 x) \end{cases}$$

À ces ondes de tension correspondent des ondes de courant.

Les conditions de continuité donnent :

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0,t) + \underline{u}_r(0,t) = \underline{u}_t(0,t) \\ \\ \underline{i}_i(0,t) + \underline{i}_r(0,t) = \underline{i}_t(0,t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{u}_i(0,t) + \underline{u}_r(0,t) = \underline{u}_t(0,t) \\ \\ \dfrac{1}{Z_1}\left(\underline{u}_i(0,t) - \underline{u}_r(0,t)\right) = \dfrac{1}{Z_2}\underline{u}_t(0,t) \end{cases}$$

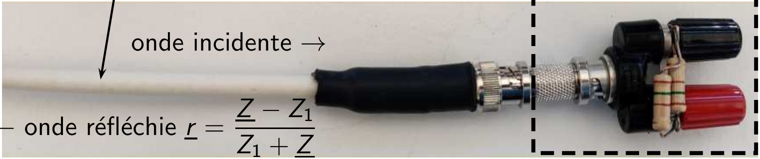
$$\begin{cases} \underline{A}_1 + \underline{B}_1 = \underline{A}_2 \\ \underline{A}_1 - \underline{B}_1 = \dfrac{Z_1}{Z_2}\underline{A}_2 \end{cases}$$

On définit un coefficient de réflexion d'amplitude de tension $\underline{r}$ et un coefficient de transmission $\underline{t}$ :

$$\begin{cases} \underline{r} = \dfrac{\underline{B}_1}{\underline{A}_1} = \dfrac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \\ \underline{t} = \dfrac{\underline{A}_2}{\underline{A}_1} = \dfrac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \end{cases}$$

# Adaptation d'impédance

La charge en bout de câble (circuit récepteur) est modélisé par une impédance $\underline{Z}$.




$$\begin{cases} \underline{r} = \dfrac{\underline{Z} - Z_1}{Z_1 + \underline{Z}} = 0 \\ \\ \text{Pas d'onde réfléchie pour } \underline{Z} = Z_1 \end{cases}$$

Équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

ou bien à 3D : $\Delta\, s(\vec{r},t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

Équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\, s$$

ou bien à 3D : $\Delta\, s(\vec{r},t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \dfrac{\omega_p^2}{c^2}\, s$

Équation de diffusion :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial t}$$

ou bien à 3D : $\Delta\, s(\vec{r},t) = \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial s}{\partial t}$

Équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\, s$$

ou bien à 3D : $\Delta\, s(\vec{r},t) = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \dfrac{1}{a}\dfrac{\partial s}{\partial t} + \dfrac{\omega_p^2}{c^2}\, s$

Établir la relation de dispersion, c'est tout d'abord supposer qu'une forme OPPS $s(x,t) = s_0 \exp j\,(\omega t - kx)$ est solution d'une équation différentielle. $\omega$ est fixée puisque c'est une grandeur caractéristique de l'onde, par contre $k$ reste libre. Il va en résulter une relation qui contraint les valeurs de $k$. Cette relation est la **relation de dispersion**.

Utilisons l'équation de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\omega_p^2}{c^2}\, s$$

On obtient :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Équation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

Équation de diffusion :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial t} \qquad k^2 = \frac{-j\omega}{a}$$

Équation des télégraphistes :

$$\frac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{1}{a}\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{\omega_p^2}{c^2}s \qquad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} - \frac{j\omega}{a}$$

On constate que $k$ peut être un réel $k = \pm\frac{\omega}{c}$ dans le cas de D'Alembert ou bien $k = \pm\sqrt{\frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ dans le cas de Klein-Gordon. Mais il peut aussi être complexe comme dans le cas de l'équation de diffusion ou celui de l'équation des télégraphistes.

## $k$ **réel**

On définit les deux vitesses suivantes :

$$\text{Vitesse de phase : } v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{Vitesse de groupe : } v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

La vitesse de phase $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ est la vitesse qui apparaît dans la phase. Elle correspond à la vitesse de propagation de la composante monochromatique (OPPS) de pulsation $\omega$. Rappelons que l'OPPS n'a pas de sens physique. La vitesse de phase n'a donc pas non plus de sens physique. On pourra fréquemment en électromagnétisme rencontrer des vitesses de phases supérieures à la vitesse de la lumière sans que cela fasse autant de bruit que pour celle des antineutrinos !

Nous montrerons que la vitesse de groupe $v_g = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$ correspond à la vitesse de propagation du paquet d'ondes. Nous verrons qu'elle s'identifie à la vitesse de propagation de l'énergie. La vitesse de groupe possède donc, elle, un sens physique !

Dans le cas de Klein-Gordon $k = \sqrt{\dfrac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}}$ et donc $v_\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{1 - \dfrac{\omega_p^2}{\omega^2}}} = v_\varphi(\omega)$. Toutes les OPPS de l'onde ne vont pas à la même vitesse :

**Déformation du paquet d'ondes = Dispersion**

Dans les milieux linéaires, le paquet d'ondes a tendance à s'étaler. Cela s'avère être un facteur limitant en télécommunications car deux paquets d'ondes successifs peuvent finir par se mélanger ! Dans des conditions spéciales, on peut arriver à comprimer un paquet d'ondes.

# Une image de la dispersion :

Peloton = Paquet d'ondes

Coureur = OPPS

Tous les coureurs vont à la même vitesse : le peloton reste en bloc. Une accélération se produit, provoquée par certains coureurs : le peloton s'étale !

Prenons un exemple : la relation de dispersion est $k^2 = \frac{-j\omega}{a}$ dans l'étude de la diffusion. Cette relation montre que $k$ est un complexe que l'on pose $k = k' + jk''$. Comme on est parti d'une forme $s(x,t) = s_0 \exp j\,(\omega t - kx)$, on obtient $s(x,t) = s_0 \exp k''x \exp j\,(\omega t - k'x)$. $k'' < 0$ correspond au sens physique le plus courant pour que l'exponentielle ne diverge pas. On pose $\delta = -1/k''$ et on définit :

L'épaisseur de peau $\delta$ caractéristique de l'atténuation de l'amplitude de l'onde est telle que :

$$s(x,t) = s_0 \exp -\frac{x}{\delta} \exp j\left(\omega t - k'x\right)$$

L'amplitude des OPPS s'atténue rapidement du fait de l'existence de la partie imaginaire du vecteur d'onde. Le paquet d'ondes va vite être amorti dans un tel cas. Cela se produira sur une longueur de l'ordre de quelques $\delta$.

# Mathématiques et stationnarité

En Mathématiques, une fonction de 2 variables indépendantes $r$ et $\theta$ notée $h(r,\theta)$ est dite stationnaire si elle peut s'écrire comme le produit d'une fonction d'un des deux paramètres par une fonction de l'autre.

$h(r,\theta)$ est STATIONNAIRE si l'on peut écrire que :

$$h(r,\theta) = f(r)\,g(\theta)$$

Le caractère stationnaire se comprend comme l'invariance de la valeur de $f(r)$ pour $r$ fixé $\forall\,\theta$ et réciproquement.

# Séparation des variables

On recherche des solutions des équations de propagation ou de diffusion à **variables séparées** :

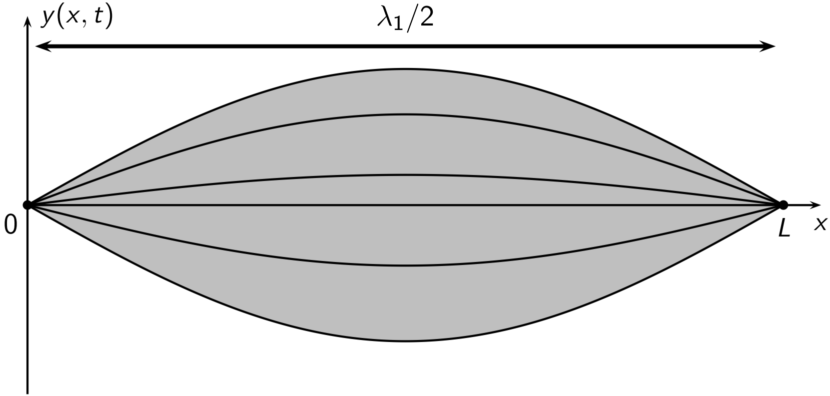
L'équation de D'Alembert $\dfrac{\partial^2 s(x,t)}{\partial x^2} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 s}{\partial t^2}$

possède des solutions de la forme :

$$s(x,t) = f(x)\,g(t)$$

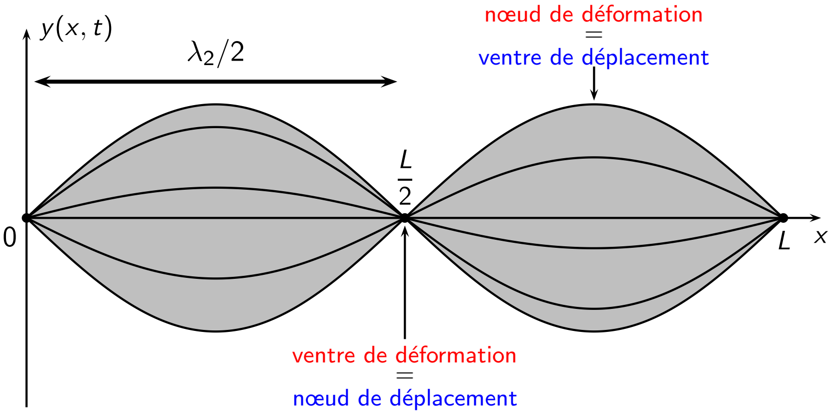
De telles solutions permettent d'expliquer le phénomène des ondes stationnaires comme celui si utile que l'on rencontre dans le domaine musical avec les tuyaux sonores ou les cordes vibrantes !

# Mode fondamental



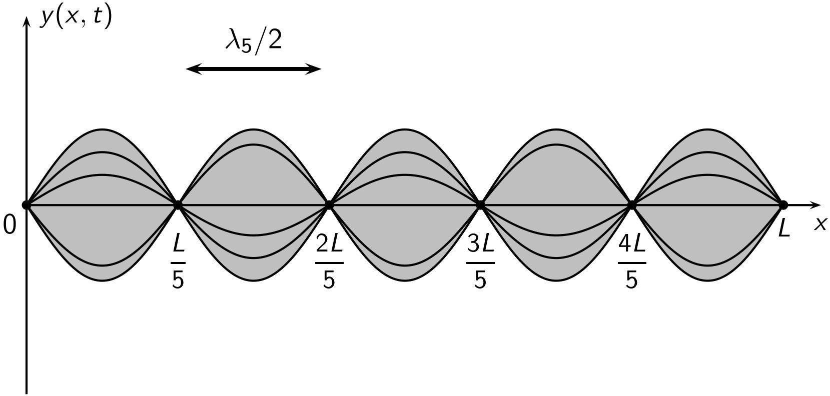

$$L = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{c}{2f_1} \text{ d'où } f_1 = \frac{c}{2L} \text{ fréquence du fondamental}$$

# Mode propre à 2 fuseaux




$$L = \lambda_2 = \frac{c}{f_2} \text{ d'où } f_2 = \frac{c}{L}$$

# Mode propre à 5 fuseaux




$$L = \frac{5\lambda_5}{2} = \frac{5c}{2f_5} \text{ d'où } f_5 = \frac{5c}{2L}$$

En testant une forme $y(x,t) = f(x)g(t)$, l'équation de D'Alembert $\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$ conduit dans un premier temps à :

$$\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2}\, g(t) = \frac{1}{c^2}\, f(x)\, \frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

En divisant[1] les deux membres de l'équation par $y(x,t) = f(x)g(t)$, on sépare complètement les variables dans la mise en équation :

$$\frac{c^2}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

[1] En repoussant à plus tard l'examen des situations où la fonction serait nulle. . .

L'équation différentielle $\frac{c^2}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}$ présente l'égalité entre une fonction de $x$ et une fonction de $t$ :

$$F(x) = G(t) \text{ vraie } \forall\, x \text{ et } \forall\, t$$

$x$ et $t$ étant des variables indépendantes, une seule solution est possible $F(x) = G(t) = K$ où $K$ est une constante :

$$\frac{c^2}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = K = \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2}$$

La séparation des variables entraîne l'apparition de 2 équations différentielles sur chacune des deux variables que l'on peut étudier séparément…

# Aspect temporel

On a l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2 g(t)}{\mathrm{d}t^2} - K\,g(t) = 0$$

L'équation caractéristique est : $r^2 - K = 0$ ou encore $r^2 = K$

- $K > 0$ : $g(t) = A \exp \sqrt{K}\,t + B \exp -\sqrt{K}\,t$
- $K = 0$ : $g(t) = A\,t + B$
- $K < 0$ : $g(t) = A \cos \sqrt{-K}\,t + B \sin \sqrt{-K}\,t$

# Sélection de $g(t)$

Les solutions acceptables ne peuvent pas diverger comme $g(t) = At + B$ ou $A \exp \sqrt{K} t$, ni tendre vers 0 comme $B \exp -\sqrt{K} t$ car le phénomène d'onde stationnaire disparaîtrait ce qui est contraire à la nature du milieu de propagation idéal qui n'absorbe pas d'énergie et qui ne constitue pas une source d'énergie non plus autorisant $g(t)$ à diverger. Finalement, la solution retenue est celle pour $K < 0$ :

$$g(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

où on a posé $\omega = \sqrt{-K}$, $\omega$ est logiquement la pulsation. On a donc $-K = \omega^2$.

La recherche des constantes d'intégration $A$ et $B$ ne peut se faire qu'en disposant de la forme complète de la solution...

# Aspect spatial

L'équation différentielle gérant $f(x)$ devient donc :

$$\frac{c^2}{f(x)}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = K = -\omega^2 \quad \text{ou} \quad \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2} f(x) = 0$$

On introduit le vecteur d'onde $k > 0$ tel que $k^2 = \dfrac{\omega^2}{c^2}$ comme on pouvait s'y attendre dans une situation de D'Alembert.

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + k^2 f(x) = 0$$

qui possède la solution :

$$f(x) = C\cos kx + D\sin kx$$

# Caractérisation de la solution

L'élongation de la corde est donnée par :

$$y(x,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)(C\cos kx + D\sin kx)$$

4 constantes d'intégration logiques avec la situation de gestion de 2 équations différentielles d'ordre 2.

Conditions aux limites : $y(x=0,t)$ et $y(x=L,t)$ stables $\forall\, t$

Conditions initiales : $y(x,t=0)$ profil initial d'élongation et $\left.\dfrac{\partial y}{\partial t}\right|_{(x,t=0)}$ profil initial de vitesse

# Aspect spatial

La corde est attachée aux deux extrémités :

$y(x=0,t) = y(x=L,t) = 0 \;\forall\, t$

On a donc $y(0,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\; C = 0$ d'où $C = 0$.

$y(L,t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\; D\sin kL = 0$ d'où $\sin kL = 0$

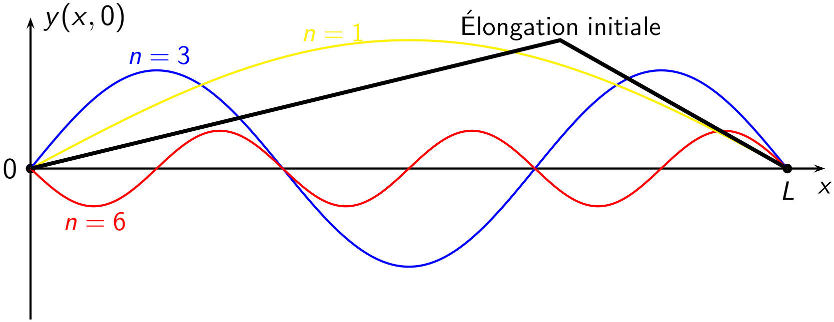
$$kL = n\pi \text{ avec } n \in \mathbb{N}^* \text{ donc } k = \frac{n\pi}{L} \text{ et } \omega = kc = \frac{n\pi c}{L}$$

$$y_n(x,t) = \left(a_n \cos\frac{n\pi c}{L}t + b_n \sin\frac{n\pi c}{L}t\right)\, \sin\frac{n\pi x}{L}$$

APPARITION DE LA QUANTIFICATION

# Profil initial d'élongation

On se place à la date $t = 0$, on a $y_n(x,0) = a_n \sin \dfrac{n\pi x}{L}$. Profil classique d'une corde pincée type clavecin, violon, guitare...




Aucune fonction $y_n(x,0)$ ne convient d'où l'idée de la :

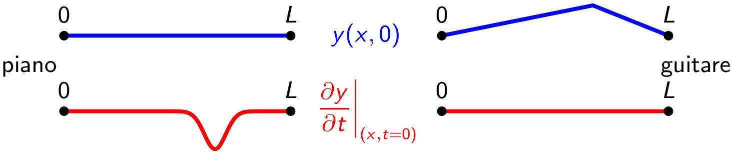
SUPERPOSITION

# Superposition des modes propres

La solution générale des ondes stationnaires sur une corde tendue attachée à ses deux extrémités est :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( a_n \cos \frac{n\pi c}{L} t + b_n \sin \frac{n\pi c}{L} t \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \right]$$

La façon d'exciter la corde à la date $t = 0$ va fixer les expressions de $a_n$ et $b_n$ et donc fixer le timbre de l'instrument.




plus riche en harmoniques
modèle créneau $(1/n)$

plus pur
modèle triangle $(1/n^2)$