Quantité de mouvement - Grandeurs cinétiques

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

November 30, 2024

De l'importance de la quantité de mouvement et des grandeurs cinétiques

Quantité de mouvement

Les études en mécanique ont montré que la quantité pertinente était une quantité prenant en compte à la fois l'inertie du système et sa vitesse, c'est la quantité de mouvement.

Quantité de mouvement d'un point : $\vec{p}_{M/\mathcal{R}} = m\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$

Système discontinu : $\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \sum_i m_i\,\vec{v}_{M_i/\mathcal{R}}$

Système continu : $\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \int_\Sigma \mathrm{d}m\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$

Centre d'inertie

Le barycentre des masses encore appelé centre d'intertie G d'un système matériel est très utile pour exprimer la quantité de mouvement du système. Un barycentre est une moyenne pondérée, ici par les masses. On a :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{m_{tot}} \text{ ou encore } \overrightarrow{OG} = \frac{\int_\Sigma \mathrm{d}m \, \overrightarrow{OM}}{m_{tot}}$$

Quantité de mouvement d'un système : $\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} = m_{tot} \, \vec{v}_{G/\mathcal{R}}$

$$m_{tot} \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_\Sigma \mathrm{d}m \, \overrightarrow{OM}\right) = \int_\Sigma \mathrm{d}m \left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}$$

Ondes

En 1923, Louis de Broglie propose la dualité onde-particule par la formule $\lambda = \dfrac{h}{p}$. En utilisant le vecteur d'onde $\vec{k} = \dfrac{2\pi}{\lambda}\vec{u}$ et la constante réduite de Planck $\hbar = \dfrac{h}{2\pi}$, on arrive à une relation très utile dans l'étude des ondes, de la Mécanique ondulatoire et de la Mécanique quantique :

Quantité de mouvement associée à une onde de vecteur d'onde $\vec{k}$:

$$\vec{p} = \hbar\,\vec{k}$$

Relativité restreinte

En 1905 dans la théorie de la relativité restreinte, Einstein impose une nouvelle expression de la quantité de mouvement. La particule possède la masse m, la vitesse v, la quantité de mouvement p. c est la vitesse de la lumière dans le vide.

$$p = \gamma\, m\, v = \frac{m\, v}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$$

Si $v \ll c$, on retrouve la quantité de mouvement de la Mécanique classique $p = mv$ en considérant que $\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}} \simeq 1$.

Définition

Le moment cinétique du point M de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}$, calculé au point O est défini par :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}_{/\mathcal{R}} = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Pour un système Σ de points solide ou non, on somme les contributions des moments cinétiques de tous les points en attribuant la masse élémentaire $\mathrm{d}m$ à une portion infinitésimale du système que l'on décrit ici comme un continuum :

$$\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}} = \int_{\Sigma} \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m\vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Expression

Le moment cinétique du système Σ n'est, en général, pas simple à exprimer. Pour les solides, il fait intervenir une matrice appelée *matrice d'inertie* et la vitesse de rotation du solide :

$$\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}} = \left[\begin{array}{c} \text{Matrice} \\ \text{d'inertie} \end{array} \right] \vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$$

Δ est un axe fixe de rotation tel que $\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \omega \vec{e}_\Delta$. Projeté sur cet axe, on obtient le moment cinétique scalaire L_Δ :

$$L_\Delta = \vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_\Delta = J_\Delta \, \omega$$

J_Δ est le moment d'inertie du solide sur l'axe Δ de rotation.

Les trois grandeurs cinétiques

Les grandeurs cinétiques sont au nombre de trois que ce soit pour un point ou pour un système de points. La quantité de mouvement est encore appelée résultante cinétique.

$$\left\{\begin{array}{ll}\text{Quantité de mouvement} & \vec{p}_{M-\Sigma/\mathcal{R}} \\ \text{Moment cinétique} & \vec{L}_{O,M-\Sigma/\mathcal{R}} \\ \text{Énergie cinétique} & E_{c,M-\Sigma/\mathcal{R}}\end{array}\right.$$

Un torseur est constitué de deux vecteurs : une résultante et le moment évalué en un point précisé de cette résultante. C'est un outil hors-programme très utile lorsque l'on approfondit les études en Mécanique.

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{Torseur cinématique en } O \text{ dans } \mathcal{R} & \left\{\vec{v}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}\,,\,\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}\right\} \\ \text{Torseur cinétique en } O \text{ dans } \mathcal{R} & \left\{\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}\,,\,\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}}\right\} \end{array}\right.$$

Énergie cinétique dans $\mathcal{R}$:

$$E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\left(\vec{v}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}\cdot\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}} + \vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}\cdot\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}\right)$$

L'énergie cinétique est le *demi-comoment* des torseurs cinétique et cinématique.

Énergie cinétique

On peut retrouver l'expression simple de l'énergie cinétique d'un point matériel ne particularisant l'expression précédente. On a $\vec{\omega} = \vec{0}$ puisqu'il faut une direction donc au moins deux points pour définir une vitesse de rotation[1]. On a :

$$E_{c,/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\,\vec{p}_{/\mathcal{R}} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}} = \frac{\vec{p}^{\,2}_{/\mathcal{R}}}{2m} = \frac{1}{2}\,m\,\vec{v}^{\,2}_{/\mathcal{R}}$$

Pour un solide en rotation autour d'un axe fixe Δ auquel appartient le point O ($\vec{v}_{O,/\mathcal{R}} = \vec{0}$), on a :

$$E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\,L_\Delta\,\omega = \frac{L_\Delta^2}{2J_\Delta} = \frac{1}{2}J_\Delta\,\omega^2$$

[1] Il ne faut pas confondre vitesse angulaire d'un point sur un cercle et vitesse de rotation.

Écrire les lois de la Mécanique consiste à identifier la dérivée par rapport au temps des grandeurs cinétiques avec des grandeurs associées aux interactions, aux forces :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_{\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} & = & \text{Somme des forces} \\[2ex] \left.\dfrac{\mathrm{d}\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} & = & \text{Somme des moments des forces en } O \\[2ex] \left.\dfrac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t}\right|_{/\mathcal{R}} & = & \text{Somme des puissances des forces} \end{array}\right.$$

L'écriture ci-dessus n'est pas complètement satisfaisante[2]. Elle illustre toutefois une certaine cohérence des lois dans une majorité de situations.

[2] Pour le moment cinétique, elle ne s'applique pas telle quelle si le point O est mobile dans $\mathcal{R}$.