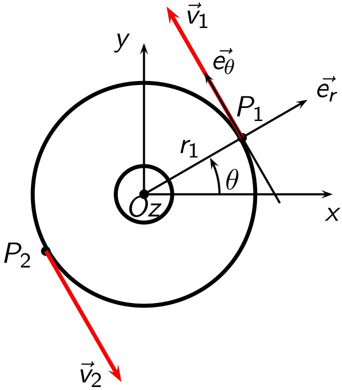
Rotation d’un solide

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

December 17, 2024

Rotation d'un solide autour d'un axe fixe

La quantité de mouvement ne suffit pas !



On a $m\vec{v}_1 + m\vec{v}_2 = \vec{0}$. La généralisation est :

$$\vec{p}_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}m\,\vec{v} = \vec{0}$$

Et pourtant, il tourne !...

Définition

Le moment cinétique pour un objet étendu correspond à la somme des contributions des différents éléments constituants le système :

$$\vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \vec{v}_{M_i/\mathcal{R}} \text{ ou } \vec{L}_{O/\mathcal{R}} = \int \overrightarrow{OM} \wedge \mathrm{d}m \vec{v}_{M/\mathcal{R}}$$

Pour un solide en rotation, on s'intéresse surtout à sa projection sur l'axe de rotation Δ :

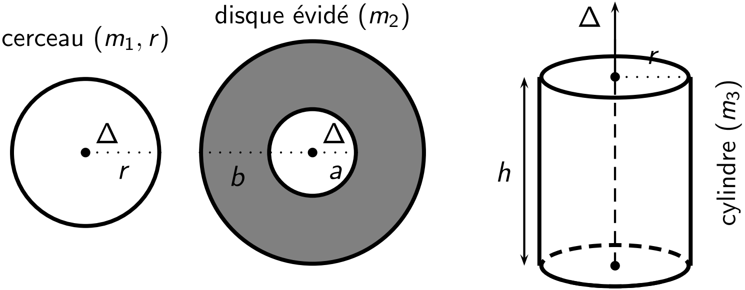
$$L_\Delta = \vec{L}_{O/\mathcal{R}} \cdot \vec{e}_\Delta = J_\Delta\, \omega$$

où J_Δ est le moment d'inertie du solide par rapport à l'axe Δ et ω la vitesse de rotation $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_\Delta$.

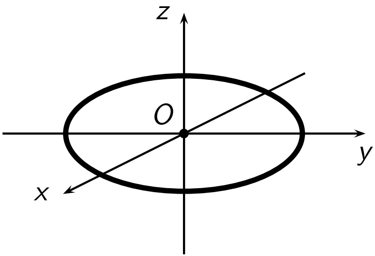
Rotation d'un solide

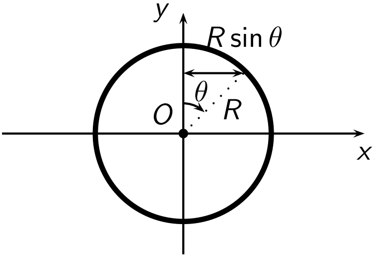
JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

Exemples



Cerceau	Disque évidé	Cylindre
$m_1 r^2$	$\frac{1}{2} m_2 (b^2 + a^2)$	$\frac{1}{2} m_3 r^2$





On a $J_{Oz} = mR^2$ et $J_{Ox} = J_{Oy} \neq mR^2$. Le calcul du moment d'inertie commence par $\mathrm{d}J_{Oy} = \mathrm{d}m\, R^2 \sin^2\theta$ avec $\mathrm{d}m = \frac{m}{2\pi}\mathrm{d}\theta$. On obtient alors :

$$J_{Oy} = \frac{mR^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \mathrm{d}\theta$$

et donc

$$J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{1}{2}mR^2$$

Cerceau homogène $\quad J_{Oz} = mR^2 \quad J_{Ox} = J_{Oy} = \frac{1}{2}mR^2$

Moment d'inertie d'une boule homogène de masse m, de rayon R par rapport à un axe représentant un de ses diamètres :

Boule homogène $\quad J_{Ox} = J_{Oy} = J_{Oz} = \frac{2}{5}mR^2$

Cylindre homogène d'axe Oz, de masse m, de rayon R et de hauteur h. Son moment d'inertie par rapport à l'axe Oz est :

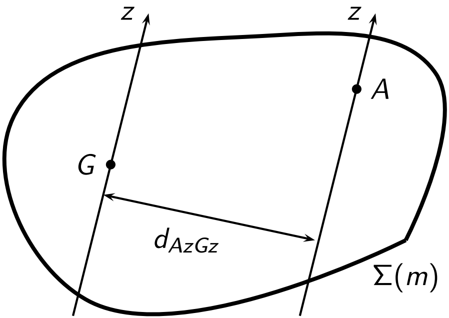
Cylindre homogène $\quad J_{Oz} = \frac{1}{2}mR^2$

On remarque son indépendance par rapport à h en raison de l'invariance par translation selon z de la distribution des masses.

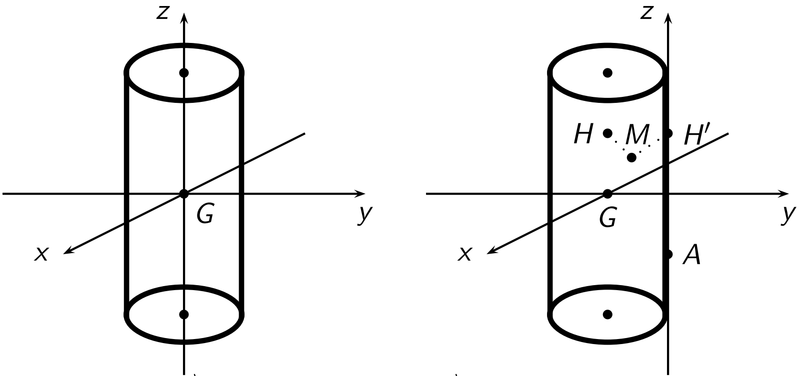
Ce théorème établit une relation entre deux moments d'inertie dans les conditions suivantes : on considère deux axes de rotation parallèles dont l'un passe obligatoirement par le centre d'inertie G du solide.

$$J_{Az} = J_{Gz} + m\, d_{GzAz}^2$$

où m est la masse du solide Σ et d_{GzAz} la distance séparant les axes Gz et Az.



Démonstration



$J_{Az} = \int \mathrm{d}m\overrightarrow{MH'}^2 = \int \mathrm{d}m(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HH'})^2$. En développant le carré : $J_{Az} = \int \mathrm{d}m\overrightarrow{HM}^2 + md^2 + 2\int \mathrm{d}m\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HH'}$. Or, $\int \mathrm{d}m\,\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HH'} = \int \mathrm{d}m(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GH}) \cdot \overrightarrow{HH'} = \int \mathrm{d}m\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{HH'}$ car $\overrightarrow{GH} \perp \overrightarrow{HH'}$. Mais $\int \mathrm{d}m\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{HH'} = \left(\int \mathrm{d}m\overrightarrow{MG}\right) \cdot \overrightarrow{HH'} = 0$ car $\int \mathrm{d}m\,\overrightarrow{GM} = \vec{0}$ par définition du barycentre G.

Particules élémentaires

D'après la formule $\vec{p} = \hbar \vec{k}$ avec $k = 2\pi/\lambda$, on voit que $\hbar$ possède la dimension d'un moment cinétique comme produit d'une quantité de mouvement et d'une longueur.

Moment cinétique d'un photon : $L = \hbar$

Électron caractérisé par les nombres quantiques $(n, \ell, m, s = \pm\frac{1}{2})$:

Orbital	Spin
$L_{orb} = \sqrt{\ell(\ell+1)}\,\hbar$	$L_{\mathrm{spin},\parallel\vec{B}} = \pm\dfrac{1}{2}\,\hbar$

À ces moments cinétiques, sont associés des moments magnétiques $M = g_{\mathcal{L}} \dfrac{e}{2m_e} L$ où $g_{\mathcal{L}}$ est le facteur de Landé avec $g_{\mathcal{L}} \simeq -2$ pour l'électron.

Définition

L'énergie cinétique du système est la somme des contributions des différents constituants du système :

$$E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \sum_i \frac{1}{2}\, m_i\, \vec{v}^{\,2}_{M_i/\mathcal{R}} \text{ ou } E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \int \frac{1}{2}\, \mathrm{d}m\, \vec{v}^{\,2}_{M/\mathcal{R}}$$

Pour un solide en rotation à la vitesse $\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} = \omega \vec{e}_\Delta$, on aura :

$$E_{c,\Sigma/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}\, J_\Delta\, \omega^2$$

où J_Δ est le moment d'inertie du solide sur l'axe fixe de rotation Δ.

Principe d'inertie

Nous allons proposer un complément au principe d'inertie vu précédemment. Ce complément est :

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ auquel appartient le point O, un corps isolé ou seul dans l'espace possède un moment cinétique $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ constant.

Le principe d'inertie complet est donc le suivant :

Dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen dans lequel le point O est fixe, la quantité de mouvement $\vec{p}_{/\mathcal{R}}$ et le moment cinétique $\vec{L}_{O/\mathcal{R}}$ sont deux vecteurs constants.

Loi de moment de force

Cette loi[1] est à mettre en parallèle avec la loi de force vue précédemment.

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M est égale à la somme des moments des forces agissant sur ce point :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Si un système est soumis à plusieurs forces appliquées en différents points, on a : $\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{O/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{OM}_i \wedge \vec{F}_i$.

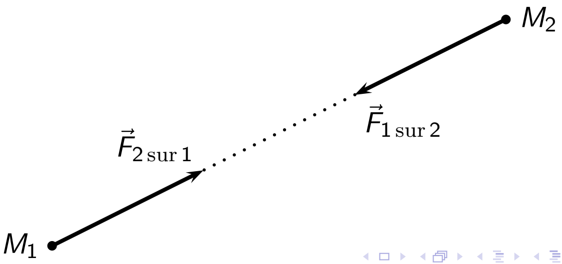
[1] Cette loi n'est pas valable pour le moment calculé en un point mobile du référentiel $\mathcal{R}$.

Loi 2 des actions réciproques

(M_1, M_2) constitue un système isolé. Cela impose $\overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{F}_{2\,sur\,1} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{F}_{1\,sur\,2} = \vec{0}$. En utilisant $\vec{F}_{2\,sur\,1} = -\vec{F}_{1\,sur\,2}$, on arrive à :

$$\overrightarrow{M_1M_2} \wedge \vec{F}_{1\,sur\,2} = \vec{0}$$

Les forces intérieures entre 1 et 2 sont opposées et portées par la direction (M_1M_2) :



$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}_{O,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_a + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_b \text{ avec } O \text{ point fixe de } \mathcal{R}.$$

D'après le théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_a \cdot \vec{v}_{M_1/\mathcal{R}} + \vec{F}_b \cdot \vec{v}_{M_2/\mathcal{R}}$$

Σ est un solide donc : $\vec{v}_{M_{1,2}/\mathcal{R}} = \vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}_{1,2}$

On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_a \cdot \left(\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}_1\right) + \vec{F}_b \cdot \left(\vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{OM}_2\right)$$

Le produit mixte autorise une permutation circulaire des vecteurs, cela fait apparaître le moment des forces exercées sur Σ.

$$\frac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \cdot \left(\overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_a\right) + \vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}} \cdot \left(\overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_b\right)$$

Puissance pour la rotation

On note $\vec{\Gamma}$ le moment résultant des forces exercées sur le solide Σ avec $\vec{\Gamma} = \overrightarrow{OM}_1 \wedge \vec{F}_a + \overrightarrow{OM}_2 \wedge \vec{F}_2$, on en déduit que le théorème de l'énergie cinétique s'écrit pour un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse de rotation $\vec{\omega}$ que :

$$\frac{\mathrm{d}E_{c,\Sigma/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma} \cdot \vec{\omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$$

Le moment des forces $\vec{\Gamma}$ est encore appelé *couple*, il s'exprime en $\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$. Lorsque le solide est entraîné par un moteur on aura $\vec{\Gamma} = \Gamma_m \vec{e}_\Delta$ avec $\Gamma_m > 0$ si $\omega > 0$, le moteur favorisant la rotation. Au contraire, si on a un freinage ou des frottements, le couple sera négatif. Pour des frottements fluides, on peut proposer $\vec{\Gamma}_f = -h\vec{\omega}$.

	Translation	Rotation
Inertie		
Vitesse		
Grandeur cinétique		
Énergie cinétique		
Force, moment		
Puissance		
Théorème de la puissance		

	Translation	Rotation
Inertie	m	
Vitesse	$\vec{v}$	
Grandeur cinétique	$\vec{p} = m\vec{v}$	
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}m\vec{v}^2$	
Force, moment	$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$	
Puissance	$\vec{F} \cdot \vec{v}$	
Théorème de la puissance	$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$	

	Translation	Rotation
Inertie	m	J
Vitesse	$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
Grandeur cinétique	$\vec{p} = m\vec{v}$	$L = J\omega$
Énergie cinétique	$\frac{1}{2}m\vec{v}^{\,2}$	$\frac{1}{2}J\vec{\omega}^{\,2}$
Force, moment	$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}$	$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = \Gamma$
Puissance	$\vec{F}\cdot\vec{v}$	$\vec{\Gamma}\cdot\vec{\omega}$
Théorème de la puissance	$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$	$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \vec{\Gamma}\cdot\vec{\omega}$