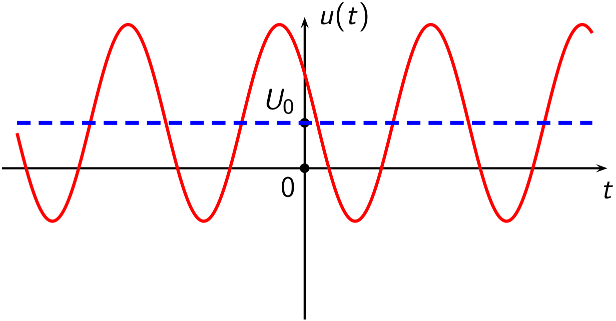
Sinusoïdes

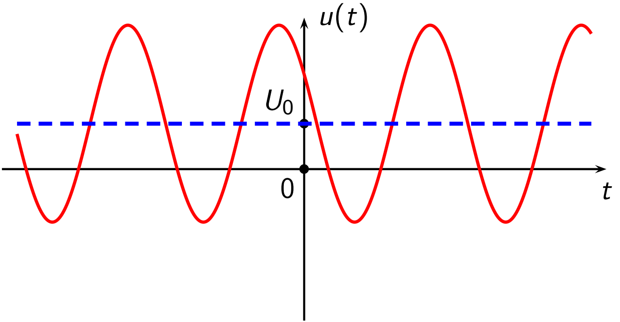
JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

September 1, 2024



La représentation réelle d'une grandeur sinusoïdale (ici une tension) est de la forme :

$$u(t) = U_0 + U_m \cos(\omega t + \varphi)$$



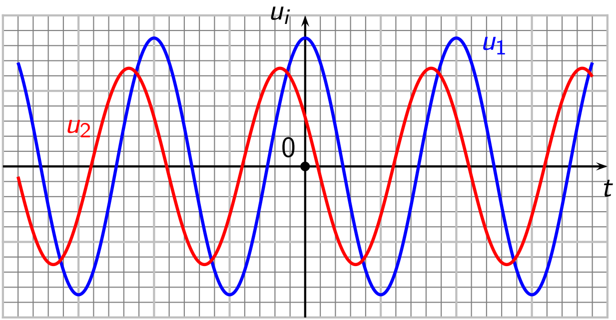
Elle est caractérisée par sa moyenne et ses grandeurs extrêmes :

$$\langle u(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\mathrm{d}t = U_0$$

$$u_{max} = U_0 + U_m \qquad \text{et} \qquad u_{min} = U_0 - U_m$$

Deux tensions sinusoïdales synchrones de moyenne nulle déphasées :

$u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t$ et $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi)$



$u_2(t)$ est *en avance* sur $u_1(t)$

$\varphi > 0$

Addition

L'objectif est d'additionner :

$$u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t \qquad \text{et} \qquad u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi)$$

Pour pouvoir écrire :

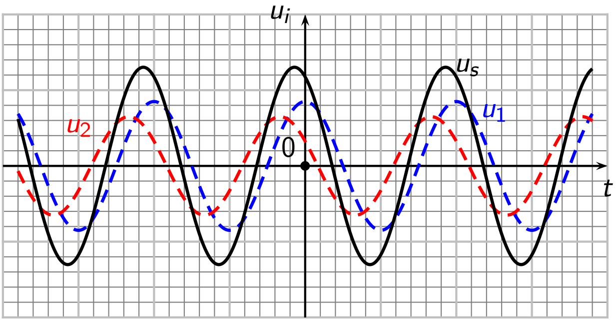
$$u_1(t) + u_2(t) = u_s(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$$

On détermine U_m et ψ à l'aide des formules :

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

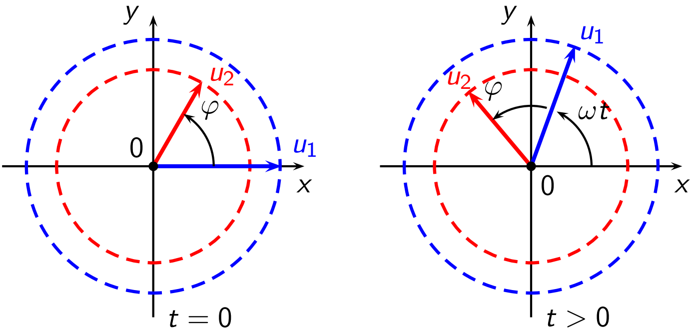
$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$$

$$u_1(t) + u_2(t) = u_s(t) = U_m \cos(\omega t + \psi)$$



$$U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2\,U_{m1}\,U_{m2}\cos\varphi}$$

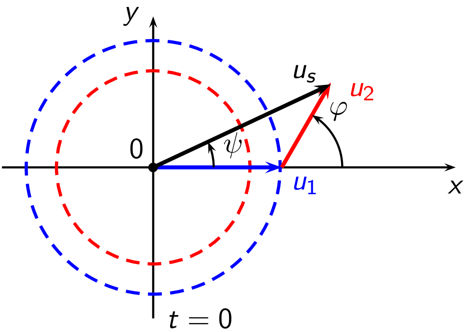
$$\tan\psi = \frac{U_{m2}\sin\varphi}{U_{m1} + U_{m2}\cos\varphi}$$



Les deux vecteurs figés dans leur position relative par φ tournent dans le plan Oxy à la vitesse de rotation ω. On se contente de les représenter à une date où l'un des vecteurs passe par l'axe horizontal, comme par exemple ici à la date $t = 0$.

$u_2(t)$ est *en avance* sur $u_1(t)$ $\quad\quad \varphi > 0$

Addition



$$U_m = \sqrt{U_{1m}^2 + U_{2m}^2 + 2U_{m1}U_{m2}\cos\varphi}$$

$$\tan\psi = \frac{U_{m2}\sin\varphi}{U_{m1} + U_{m2}\cos\varphi}$$

À une tension sinusoïdale de moyenne nulle $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi)$, on associe la représentation complexe :

$$\underline{u}_2(t) = U_{m2} \exp j(\omega t + \varphi) = \underline{U}_{m2} \exp j\omega t$$

où $\underline{U}_{m2} = U_{m2} \exp j\varphi$ est l'amplitude complexe associée à la tension $u(t)$. Il est très pratique d'utiliser cette notation sachant que $\exp j\varphi = \cos\varphi + j\sin\varphi$ et aussi $j^2 = -1$.

$$\underline{u}_s(t) = (U_{m1} + U_{m2} \exp j\varphi) \exp j\omega t$$

En réels

Lorsque l'on multiplie deux grandeurs sinusoïdales comme $u_1(t) = U_{m1} \cos \omega t$ et $u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi)$, on doit utiliser la règle suivante :

$$\cos p \cos q = \frac{1}{2} \left[\cos(p+q) + \cos(p-q)\right]$$

En utilisant cette formule et sans oublier le fait que la fonction cosinus est paire, on arrive à :

$$u_1(t) u_2(t) = \frac{U_{1m} U_{2m}}{2} \left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi\right]$$

En complexes

Lorsque l'on multiplie deux grandeurs sinusoïdales complexes $\underline{u}_1(t) = U_{m_1} \exp j\omega t$ et $\underline{u}_2(t) = U_{m2} \exp j(\omega t + \varphi)$, on obtient :

$$\underline{u}_1(t)\,\underline{u}_2(t) = U_{m1} U_{m2} \exp j(2\omega t + \varphi)$$

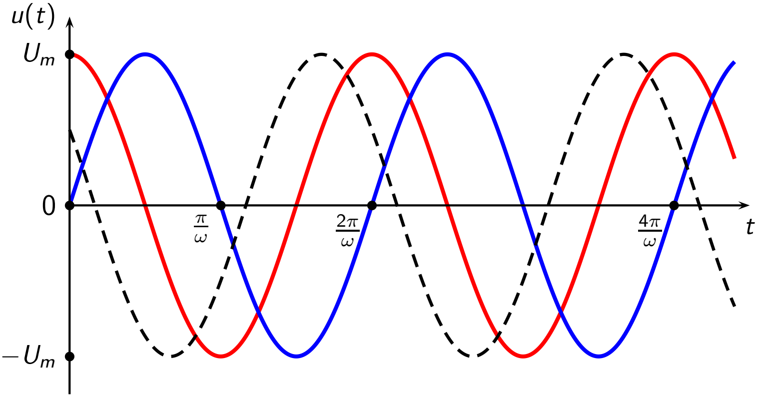
Si l'on tente de revenir en réels :

$$\Re(\underline{u}_1(t)\,\underline{u}_2(t)) = U_{m1} U_{m2} \cos(2\omega t + \varphi)$$

à comparer à $u_1(t)u_2(t) = \dfrac{U_{1m}U_{2m}}{2}\left[\cos(2\omega t + \varphi) + \cos\varphi\right]$.

CONCLUSION : ATTENTION À L'UTILISATION DES COMPLEXES POUR LES MULTIPLICATIONS

On a représenté $u_1(t) = U_m \cos\omega t$, $u_3(t) = U_m \sin\omega t$ de période $T = 2\pi/\omega$ ainsi que $u_2(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$:



Leurs moyennes sont nulles : $\langle \cos\omega t \rangle = \langle \sin\omega t \rangle = 0\ldots$

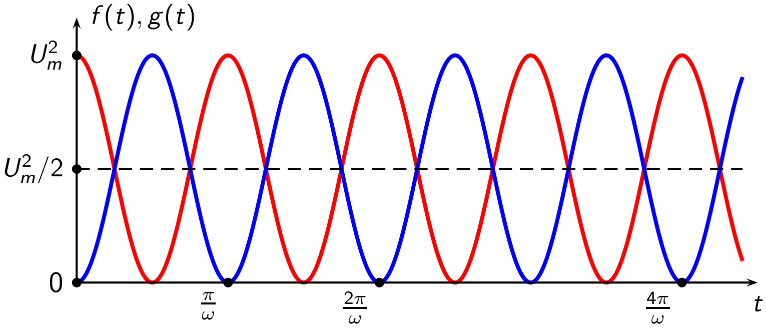
Moyenne d'une fonction $u(t)$ quelconque entre les dates $t_i = t_0$ et $t_f = t_0 + \Delta t$ avec $\Delta t > 0$:

$$\langle u(t) \rangle = \overline{u(t)} = \frac{1}{t_f - t_i} \int_{t_i}^{t_f} u(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} u(t)\,\mathrm{d}t$$

Pour une fonction périodique, sur un grand intervalle de temps $\Delta t = nT + \tau$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $\tau < T$ et donc $nT \gg \tau$, le calcul revient à celui effectué sur une période T complété par une modeste contribution liée à τ :

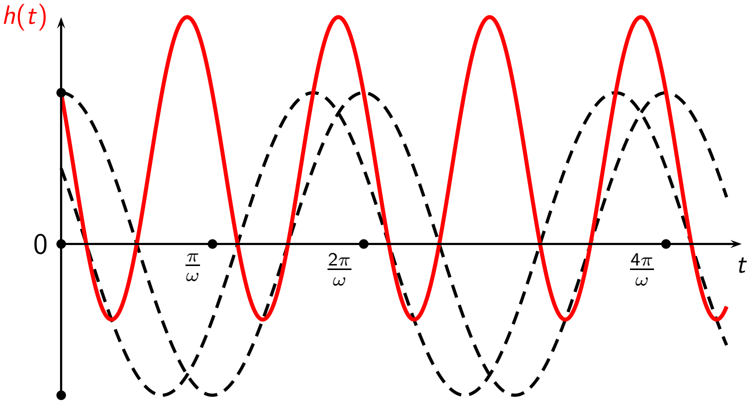
$$\langle u(t) \rangle \simeq \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{nT} \int_0^{\tau} u(t)\,\mathrm{d}t$$

On sera souvent amenés à calculer des moyennes de termes comme $f(t) = U_m^2 \cos^2 \omega t$ et $g(t) = U_m^2 \sin^2 \omega t$. $f(t)$ et $g(t)$ sont positifs et compris entre 0 et U_m^2.



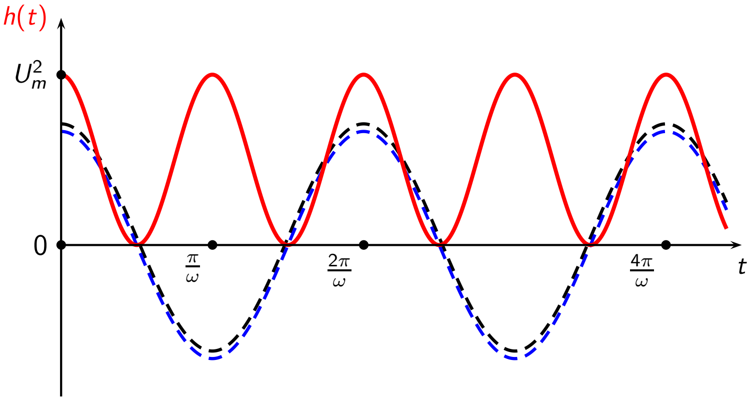
$$\langle \cos^2 \omega t \rangle = \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{1}{2}$$

Moyenne du produit $h(t) = U_m^2 \cos(\omega t + \varphi)\, \cos \omega t$:



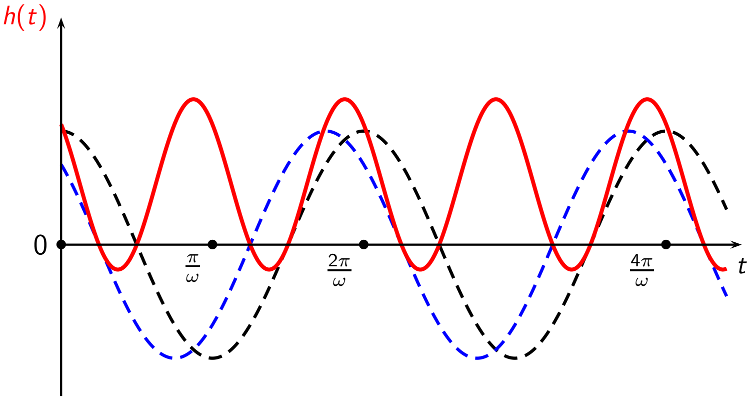
$$\langle h(t) \rangle = \frac{U_m^2}{2} \cos \varphi$$

$\varphi = 0$



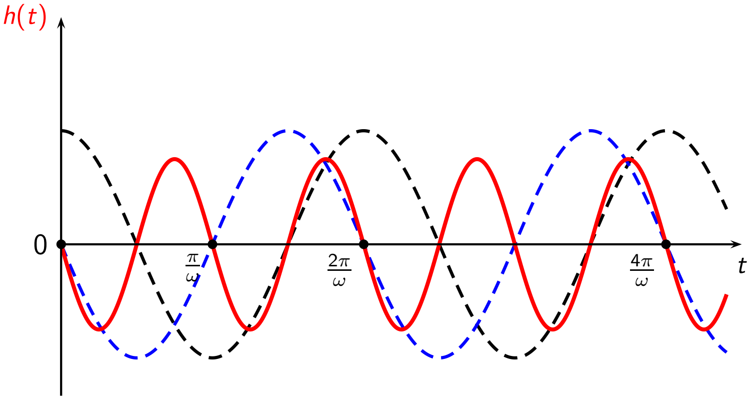
$$\langle h(t) \rangle = \frac{U_m^2}{2}$$

$$\varphi = \pi/4$$



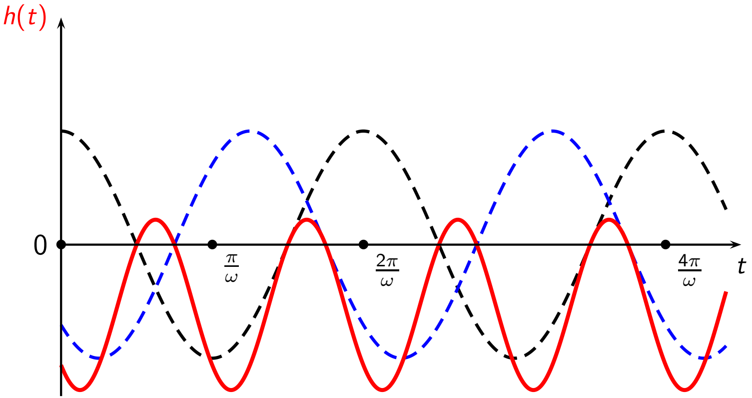
$$\langle h(t) \rangle = \frac{U_m^2}{\sqrt{2}}$$

$\varphi = \pi/2$



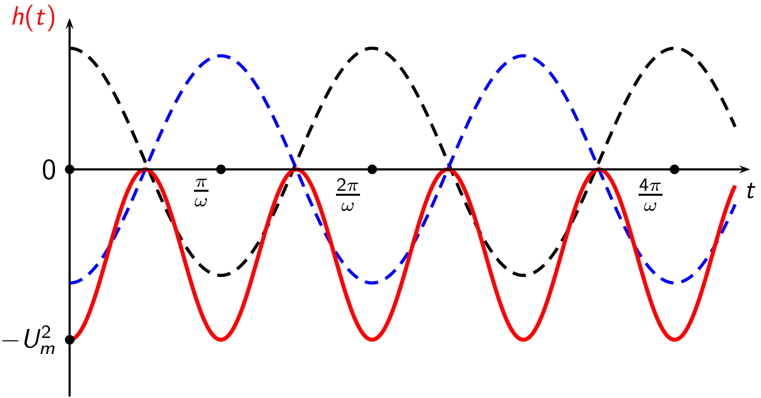
$$\langle h(t) \rangle = 0$$

$$\varphi = 3\pi/4$$



$$\langle h(t) \rangle = -\frac{U_m^2}{\sqrt{2}}$$

$\varphi = \pi$



$$\langle h(t) \rangle = -\frac{U_m^2}{2}$$

Moyenne en utilisant les complexes

$$f(t) = F_0 \cos \omega t \ \text{ et } \ G(t) = G_0 \cos(\omega t + \varphi)$$
$$\langle f(t) g(t) \rangle = \frac{1}{2} F_0 G_0 \cos \varphi$$

$$\underline{f}(t) = F_0 \exp j\omega t \ \text{ et } \ \underline{g}(t) = G_0 \exp j(\omega t + \varphi)$$
$$\text{avec } \underline{g}^*(t) = G_0 \exp -j(\omega t + \varphi)$$

$$\langle f(t) g(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[\underline{f}(t) \underline{g}^*(t) \right]$$
$$\langle f(t) g(t) \rangle = \frac{1}{2} \Re \left[F_0 G_0 \exp -j\varphi \right] = \frac{1}{2} F_0 G_0 \cos \varphi$$