Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

JR Seigne MP*, Clemenceau Nantes

September 12, 2024

1. Paquet d'ondes

2. Vitesse de groupe

Paquet d'ondes

La notion de paquet d'ondes n'a de sens que si les fréquences de ses différentes composantes sont relativement proches. Soit ω_0 une pulsation caractéristique et $\Delta\omega$ une caractéristique de sa largeur spectrale telle que $\Delta\omega \ll \omega_0$.

Constitution du paquet d'ondes :

$$s(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j(\omega t - kz) \mathrm{d}\omega$$

Développement limité au voisinage de ω_0 :

$$k = k(\omega_0) + \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

L'expression du paquet d'ondes évolue :

$$s(z,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\exp j\left(\omega t - k(\omega_0)z - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0}(\omega-\omega_0)z\right)\mathrm{d}\omega$$

On peut encore faire évoluer l'expression du paquet d'ondes :

$$s(z,t) = \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z)\,\mathrm{Int}$$

avec

$$\mathrm{Int} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega)\exp j\left[(\omega-\omega_0)\left(t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z\right)\right]\mathrm{d}\omega$$

Lent-Rapide

L'expression du paquet d'ondes fait apparaître un terme rapide et un terme lent :

$$\text{Terme rapide} \quad \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0) z)$$

Il correspond à une OPPS se propageant à la vitesse :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$$

$$\text{Terme lent} \quad B = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j \left[(\omega - \omega_0) \left(t - \left.\frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}\omega}\right|_{\omega_0} z \right) \right] \mathrm{d}\omega$$

Il correspond à l'enveloppe du paquet d'onde qui se propage à la vitesse :

$$v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}$$

Aspect énergétique

Le détecteur de l'onde sera sensible à l'énergie associée au paquet d'ondes. Cette énergie est proportionnelle à :

$$\langle s^2(z,t)\rangle = |\underline{s}(z,t)|^2 = |\underline{B}\exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z)|^2 = |\underline{B}|^2$$

L'énergie se propage à la vitesse de l'enveloppe :

Vitesse de l'enveloppe = vitesse de groupe

$$v_g = \left.\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}\right|_{\omega_0}$$

pour un paquet d'ondes centré sur la pulsation ω_0.

$$\text{Vitesse de phase : } v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{Vitesse de groupe : } v_\varphi = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k}$$

Situation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \qquad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \qquad v_\varphi = v_g = c$$

Pas de dispersion.

Situation de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2}s \qquad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

Dispersion car $v_\varphi = v_\varphi(\omega)$.

Situation de Klein-Gordon

Il y a propagation pour $\omega > \omega_0$.

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \qquad \text{et} \qquad v_g = c\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$