

# Paquet d'ondes - Vitesse de groupe

JR Seigne MP\*, Clemenceau  
Nantes

September 19, 2023

## ① Paquet d'ondes

## ② Vitesse de groupe

## Paquet d'ondes

La notion de paquet d'ondes n'a de sens que si les fréquences de ses différentes composantes sont relativement proches. Soit  $\omega_0$  une pulsation caractéristique et  $\Delta\omega$  une caractéristique de sa largeur spectrale telle que  $\Delta\omega \ll \omega_0$ .

Constitution du paquet d'ondes :

$$s(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j(\omega t - kz) d\omega$$

Développement limité au voisinage de  $\omega_0$  :

$$k = k(\omega_0) + \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)$$

L'expression du paquet d'ondes évolue :

$$s(z, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j \left( \omega t - k(\omega_0)z - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} (\omega - \omega_0)z \right) d\omega$$

On peut encore faire évoluer l'expression du paquet d'ondes :

$$s(z, t) = \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z) \text{Int}$$

avec

$$\text{Int} = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j \left[ (\omega - \omega_0) \left( t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right) \right] d\omega$$

## Lent-Rapide

L'expression du paquet d'ondes fait apparaître un terme rapide et un terme lent :

$$\text{Terme rapide } \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z)$$

Il correspond à une OPPS se propageant à la vitesse :

$$v_\varphi = \frac{\omega_0}{k(\omega_0)}$$

$$\text{Terme lent } B = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \exp j \left[ (\omega - \omega_0) \left( t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} z \right) \right] d\omega$$

Il correspond à l'enveloppe du paquet d'onde qui se propage à la vitesse :

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}$$

## Aspect énergétique

Le détecteur de l'onde sera sensible à l'énergie associée au paquet d'ondes. Cette énergie est proportionnelle à :

$$\langle s^2(z, t) \rangle = |\underline{s}(z, t)|^2 = |\underline{B} \exp j(\omega_0 t - k(\omega_0)z)|^2 = |\underline{B}|^2$$

L'énergie se propage à la vitesse de l'enveloppe :

Vitesse de l'enveloppe = vitesse de groupe

$$v_g = \left. \frac{d\omega}{dk} \right|_{\omega_0}$$

pour un paquet d'ondes centré sur la pulsation  $\omega_0$ .

$$\text{Vitesse de phase : } v_{\varphi} = \frac{\omega}{k}$$

$$\text{Vitesse de groupe : } v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Situation de D'Alembert :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad v_{\varphi} = v_g = c$$

Pas de dispersion.

Situation de Klein-Gordon

$$\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} + \frac{\omega_0^2}{c^2} s \quad k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$$

Dispersion car  $v_{\varphi} = v_{\varphi}(\omega)$ .

## Situation de Klein-Gordon

Il y a propagation pour  $\omega > \omega_0$ .

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}} \quad \text{et} \quad v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$$

