

# Diffraction

Aux 17<sup>ème</sup> et 18<sup>ème</sup> siècles, certaines observations d'optique ont montré que la lumière ne se propageait pas toujours selon les lois prévues par la théorie corpusculaire de NEWTON. Le physicien CHRISTIAAN HUYGENS fut le premier à proposer pour décrire la lumière une théorie ondulatoire qui fut vivement combattue par NEWTON. C'est aux physiciens AUGUSTIN FRESNEL et THOMAS YOUNG que l'on doit la mise en place au 19<sup>ème</sup> siècle d'une théorie ondulatoire. La description de la diffraction sera effectuée dans le cadre d'une description scalaire de l'onde lumineuse abstraction faite du caractère vectoriel lié aux champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{B}$ . L'influence de la polarisation ne sera pas prise en compte. Enfin, sauf indication contraire, on considérera la propagation de l'onde dans le vide.

## 1 Aspect historique

En 1819, l'Académie des Sciences de Paris mit au concours la question de la diffraction de la lumière. C'est AUGUSTIN FRESNEL, ancien élève particulièrement brillant de l'École Polytechnique qui remporta le Prix. FRESNEL était aussi un ancien élève des membres de la commission constituée par POISSON, LAPLACE, GAY LUSSAC, BIOT, ARAGO. La théorie corpusculaire de la lumière de NEWTON était toujours dominante, à tel point que la commission d'attribution du Prix fut dans un premier temps réticente à la théorie de FRESNEL. POISSON déduisit de cette théorie que si l'on plaçait un disque opaque derrière un petit trou duquel émergeait la lumière, le centre de l'ombre créée par le disque devrait être aussi brillant que s'il n'y avait pas de disque. Or, le bon sens laissait prévoir que l'ombre du disque était homogène et qu'on n'observait pas de point lumineux au centre de l'ombre du disque. ARAGO conscient de la difficulté opposée à AUGUSTIN FRESNEL, fit l'expérience et découvrit qu'il existait effectivement un point lumineux derrière le disque opaque au centre de l'ombre de ce disque. Cette expérience fut décisive et tout en n'étant pas totalement convaincue par la théorie ondulatoire de la lumière, la commission attribua le Prix mis en jeu à AUGUSTIN FRESNEL. La commission apprécia particulièrement la qualité du traitement mathématique de la théorie de la diffraction et, en particulier, le calcul des intégrales dites de FRESNEL. Sur le schéma de la figure 1, on peut voir sur le graphique *a* la situation de l'ombre telle que le sens commun le laisse penser, puis sur le graphique *b*, une schématisation de la tache dite de POISSON et enfin sur l'image *c* une photographie d'une observation expérimentale réalisée au Palais de la Découverte.

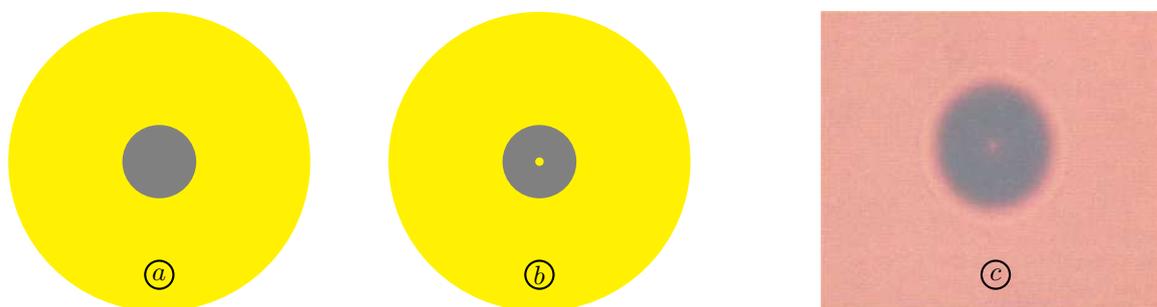


FIGURE 1 – La tache de Poisson

### Extrait du site Internet [lousodrome.net](http://lousodrome.net) sur le contexte de l'époque :

Le casting de l'histoire qui suit est remarquable. Nous sommes en 1818. D'un côté, AUGUSTIN FRESNEL (1788 – 1827) vient de remettre à l'Académie des Sciences un mémoire défendant une théorie complètement opposée à celle généralement acceptée; de l'autre, FRANÇOIS ARAGO (1786 – 1853), JEAN-BAPTISTE BIOT (1774 – 1862), LOUIS JOSEPH GAY-LUSSAC (1778 – 1850), PIERRE-SIMON LAPLACE (1749 – 1827) et SIMÉON DENIS POISSON (1781-1840) composent le jury chargé de l'évaluer. Que des noms de théorèmes, des hommes qui ont construit la science. Mais la période est très particulière : les scientifiques sont là pour en découdre, car la bataille fait rage entre les partisans de la théorie corpusculaire de la lumière et ceux de la théorie ondulatoire.

Tout commence trois ans plus tôt, avec la rencontre en juillet 1815 entre FRESNEL et celui qui deviendra son mentor, ARAGO. Le contexte politique est houleux : les Cent Jours se sont achevés le mois précédent avec la défaite de Waterloo, et FRESNEL, royaliste, a été démis de sa fonction d'Ingénieur des Mines. Le contexte scientifique est l'immobilisme : la physique newtonienne est inébranlable.

Poussé par ARAGO qui voit son potentiel, FRESNEL effectue chez sa mère, dans son village du nord de Caen, des expériences rudimentaires pour étudier la diffraction de la lumière. Le 26 octobre, il fait parvenir à l'Académie des Sciences un mémoire rapportant ses observations. Les franges qu'il constate au bord de l'ombre d'un fil de fer suivent une hyperbole, ce qui pour lui ne peut être expliqué par la théorie corpusculaire, laquelle

devrait entraîner des lignes droites. Il envoie par la suite plusieurs autres mémoires, qui provoquent de vives réactions : l'opposition est de rigueur.

Le concours régulièrement organisé par l'Académie et visant à récompenser le meilleur travail sur une question choisie arrive à point : proposé le 17 mars 1817 et clôturant le 1er août de l'année suivante, il porte alors sur ce phénomène de diffraction. Bien que rigoureux, il semble manifestement rédigé par un convaincu de la théorie de l'émission. Les détracteurs de la théorie ondulatoire pensent voir quelqu'un balayer cette dernière une bonne fois pour toute à l'occasion de ce concours. ARAGO, quant à lui, voit en FRESNEL la personne capable de la défendre face à eux. Il le soutient autant qu'il le peut, et l'aide notamment à s'installer à Paris pour préparer le concours. Même ANDRÉ-MARIE AMPÈRE (1775 – 1836), pourtant publiquement newtonien, intervient afin que FRESNEL rédige un mémoire avec ses nouveaux résultats.

Et finalement ce mémoire, remis au dernier moment, se trouve être le seul des deux reçus qui est retenu. Il est beaucoup plus poussé que les précédents, et est décrit aujourd'hui comme un chef-d'œuvre. Allant au delà des travaux de THOMAS YOUNG (1773 – 1829), l'auteur y propose un modèle permettant de prédire avec précision la position et la taille des franges, et présente l'expérience des miroirs de FRESNEL.

Parmi le jury, BIOT, LAPLACE et surtout POISSON sont de ceux qui sont fortement opposés à la théorie ondulatoire. POISSON attaque vigoureusement les arguments de FRESNEL, fort notamment d'un résultat déduit de ses calculs et parfaitement contre intuitif : en plaçant un disque à une certaine distance entre un écran et une source lumineuse, on devrait observer une tache lumineuse au centre de l'ombre. Il voit là une démonstration de l'invalidité des résultats de FRESNEL. Mais ARAGO le fait savoir à ce dernier, qui réalise l'expérience... et constate la tache lumineuse, telle que prédite par les calculs.

Sans avoir pour autant convaincu BIOT et POISSON, cette anecdote, consignée par ARAGO, est la cerise sur le gâteau dans le succès qui couronne FRESNEL. La tache lumineuse est quant à elle connue depuis sous le nom de « tache de POISSON ».

Vous pouvez télécharger le mémoire de FRESNEL de 1818 portant sur la diffraction sur mon site.

## 2 Observation expérimentale d'intensités diffractées

Les expériences ayant permis d'obtenir les photographies présentées ont été réalisées avec la lumière émise par un laser vert de longueur d'onde  $\lambda = 532$  nm. L'objet diffractant la lumière est une simple ouverture plane réalisée dans un support opaque. L'écran d'observation a été placé loin de l'objet diffractant la lumière et positionné parallèlement au plan de cet objet.

### 2.1 Ouvertures carrée et rectangulaire

On obligeant la lumière émise par le laser à traverser soit une petite ouverture carrée, soit une petite ouverture rectangulaire, on obtient les images de la figure 2. La taille de ces ouvertures est de l'ordre de 50 à 100  $\mu\text{m}$ . Dans le cas de la pupille rectangulaire, on relèvera que la figure de diffraction a été obtenue avec un rectangle où la plus petite longueur est sur l'axe horizontal...

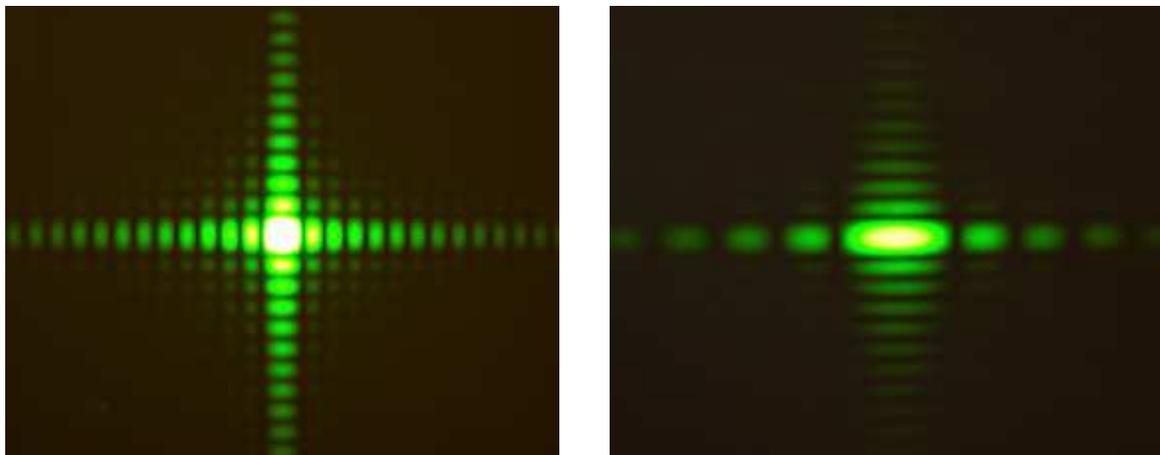


FIGURE 2 – Pupille carrée à gauche et pupille rectangulaire à droite

## 2.2 Ouverture circulaire

Dans cette expérience, la lumière du laser traverse une ouverture circulaire d'un diamètre de l'ordre de  $50\ \mu\text{m}$ . On obtient l'image de diffraction de la figure 3.

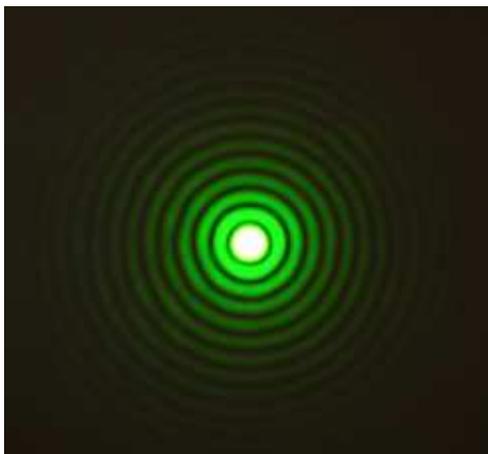


FIGURE 3 – Pupille circulaire

## 3 Principe de Huygens-Fresnel

### 3.1 Énoncé

Pour déterminer l'amplitude de l'onde lumineuse parvenant en un point  $M$  quelconque au-delà d'un objet diffractant la lumière, on admettra qu'il suffit d'appliquer le principe de HUYGENS-FRESNEL. On travaillera dans le cadre d'une onde monochromatique, pour les paquets d'ondes présentant plusieurs longueurs d'ondes (spectre discret ou spectre continu), on admettra que l'intensité lumineuse totale est la superposition des intensités lumineuses obtenues pour chaque longueur d'onde du spectre. Cette affirmation sera justifiée plus tard dans le cadre du cours sur les interférences. On n'étudiera que la diffraction par des surfaces.

#### Le principe :

Chaque surface élémentaire constituant la surface diffractante émettra une onde sphérique élémentaire de même pulsation que l'onde qu'elle reçoit. L'amplitude de cette onde sphérique sera proportionnelle à l'amplitude qu'elle reçoit. L'amplitude de l'onde au niveau du point  $M$  est la somme de toutes les amplitudes élémentaires émises par les différents éléments de la surface diffractant.

### 3.2 Expression mathématique générale

On considère une surface diffractante  $S$  et un point  $P$  de cette surface. Soit une surface élémentaire  $dS$  située au niveau du point  $P$ , voir le schéma de la figure 4. Soit  $\underline{\varepsilon}_0(P)$  l'amplitude complexe reçue en  $P$  et  $\omega$  la pulsation de l'onde provenant de  $A$ .

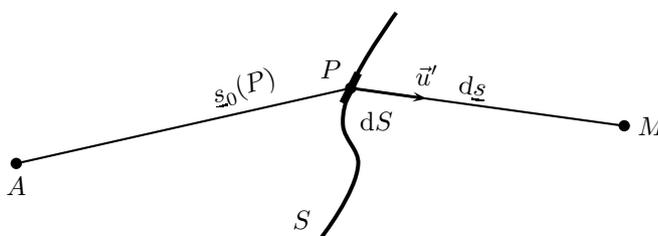


FIGURE 4 – Objet diffractant

L'onde sphérique élémentaire émise par la surface élémentaire  $dS$  est donc proportionnelle à  $\underline{\varepsilon}_0(P)$ . On notera  $K'$  le coefficient de proportionnalité. L'amplitude de l'onde reçue en  $M$  est fonction de la distance  $PM$  à la fois dans son amplitude que dans le déphasage lié au temps de parcours de l'onde. L'expression mathématique de l'onde élémentaire diffractée arrivant au point  $M$  est donc :

$$d\underline{s}(M) = \exp j\omega t K' \underline{t}(P) \frac{\underline{s}_0(P)}{PM} \left( \exp -j\vec{k} \cdot \overrightarrow{PM} \right) dS$$

$K$  est le coefficient de proportionnalité. Sa fonction, ici, est d'assurer une lecture dimensionnelle de l'amplitude de l'onde diffractée qui soit satisfaisante.  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}'$  est le vecteur d'onde de l'onde de longueur d'onde  $\lambda$  et de direction de propagation de vecteur directeur unitaire  $\vec{u}'$ . On notera que  $\vec{k} \cdot \overrightarrow{PM} = kPM$ .  $\underline{t}$  est la transmittance éventuellement complexe. Ce coefficient de module compris entre 0 et 1 exprime le fait que la surface diffractante n'est pas toujours totalement transparente sauf dans le cas des ouvertures. Cette transmittance peut être un nombre complexe de module 1 lorsque la surface diffractante est déphasante ou traduit un déphasage précédent cette même surface.

L'amplitude complexe totale diffractée par la surface  $S$  considérée est l'intégrale de l'amplitude élémentaire précédente :

$$\underline{s}(M) = \exp j\omega t \iint_S K' \underline{t}(P) \frac{\underline{s}_0(P)}{PM} \left( \exp -j\vec{k} \cdot \overrightarrow{PM} \right) dS$$

L'intensité associée à l'onde est donc :

$$I(M) = \alpha \underline{s}_M \underline{s}_M^*$$

### 3.3 Transmittance

Considérons une surface plane que l'on peut décrire avec les coordonnées  $(x, y)$ . Pour simplifier la présentation, on supposera que la transmittance ne dépend que de  $x$ . Les graphiques de la figure 5 illustrent différents cas de transmittance réelle  $t(x)$ . Une transmittance  $t(x) = 1$  ou 0 traduit une ouverture dans un objet opaque qui ici aurait la forme d'une fente de largeur  $a$ , comme dans le cas 1. Dans les autres cas 2 et 3, on a des transmittances évoluant toujours dans l'ouverture de taille  $a$ , comme si un film très fin plus ou moins gris était placé dans l'ouverture. Nous verrons plus tard que ces transmittances permettent d'améliorer la résolution d'un instrument d'observation pour lequel la diffraction est un facteur limitant.

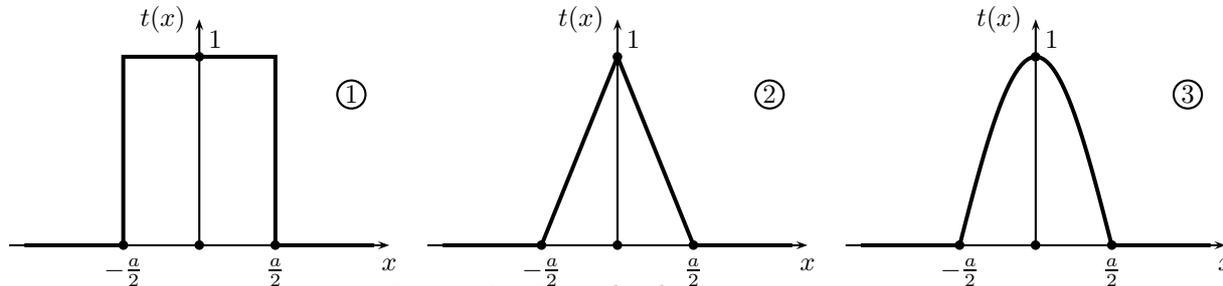


FIGURE 5 – Exemples de transmittance

### 3.4 Diffraction de Fresnel et diffraction de Fraunhofer

Soit  $a$  une longueur caractéristique de la surface diffractante  $S$ , on a  $a \simeq \sqrt{S}$ . Soit  $\ell$  une longueur caractéristique de la zone où on observe le phénomène de diffraction, les points  $M$  se répartissent sur une surface de l'ordre de  $\ell^2$ , voir le schéma de la figure 6.

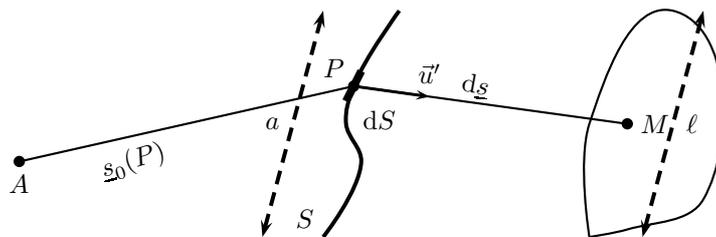


FIGURE 6 – Diffraction à distance finie - Diffraction à l'infini

La diffraction de FRESNEL étudie l'amplitude diffractée à distance finie de la surface  $S$ , la distance  $PM$  est du même ordre de grandeur que  $a$  ou que  $\ell$ . Dans ces conditions, l'intégrale (dite de FRESNEL) déterminant l'amplitude totale en  $M$  est difficile à calculer. Comme assez souvent en pratique, la distance  $PM$  est grande

devant  $a$  et  $\ell$ , on se trouve dans des conditions particulières. Avec  $PM \gg a$  et  $PM \gg \ell$ , on peut faire l'approximation qui consiste à assimiler l'onde sphérique en  $M$  à une onde plane. L'amplitude de l'onde ne dépend alors plus de la distance  $PM$ . On parle dans ce cas de diffraction de FRAUNHOFER ou de diffraction à l'infini. Dans ces conditions, l'amplitude élémentaire diffractée peut se mettre sous la forme d'une onde plane :

$$d\underline{s}(M) = \exp j\omega t K_{\underline{z}_0}(P) \underline{t}(P) \left( \exp -j\vec{k} \cdot \overrightarrow{PM} \right) dS$$

Cela revient à poser  $K = \frac{K'}{PM}$ . Nous venons de fixer les conditions de diffraction à l'infini pour l'observation (de  $P$  vers  $M$ ), il faut aussi que les mêmes conditions soient posées pour l'éclairage de la surface diffractante. On considère alors que l'onde reçue depuis le point  $A$  est une onde plane à condition que  $AP \gg a$ .

Il faut bien comprendre, qu'en général, l'amplitude de l'onde est nettement moins influencée par l'évolution de la distance  $PM$  que la phase  $\vec{k} \cdot \overrightarrow{PM}$ . En effet, la distance  $PM$  est très rapidement de l'ordre de 1 m alors que  $a$  ou  $\ell$  sont tels que  $a \lesssim 1$  mm et  $\ell \simeq 1$  cm. La variation relative de  $PM$  est vite inférieure à  $10^{-4}$ . En considérant l'exemple de la figure 7, on peut évaluer la variation relative de la distance  $PM$ .

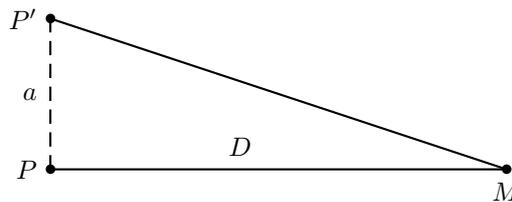


FIGURE 7 – Approximation

On a  $PM = D$  et  $P'M = \sqrt{D^2 + a^2}$ . La variation relative de distance  $v_r = \frac{P'M - PM}{PM}$  et comme  $P'M \simeq D(1 + \frac{a^2}{2D^2})$  et donc  $v_r = \frac{a^2}{2D^2}$ . Pour la contribution liée à l'évolution de la position du point  $M$ , on aura une contribution  $v'_r = \frac{\ell^2}{2D^2}$ . Avec  $D \simeq 1$  m, on retiendra que la contribution la plus importante est liée à  $M$ , on peut fixer les idées à environ  $10^{-4}$  comme variation relative, on a  $\Delta(PM) = D10^{-4} \simeq 10^{-4}$  m. Cette variation est considérable pour la phase puisque  $kPM = \frac{2\pi}{\lambda}PM$  avec dans le domaine visible  $\lambda \simeq 500$  nm. On a donc  $k\Delta(PM) \simeq \frac{2\pi \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-7}} \simeq 10^3$  ! Il est très important de ne pas traiter au même niveau d'approximation l'influence de la distance  $PM$  sur l'amplitude de l'onde et sur la phase.

### 3.5 Réalisation de l'infini

#### 3.5.1 Éclairage de l'infini

On considère un objet de taille finie soumis à un éclairage provenant de l'infini dû à une source ponctuelle. Cela signifie que les rayons qui parviennent sur cet objet forme un faisceau parallèle. Sur le plan pratique, on peut éloigner la source d'une distance grande devant les dimensions de l'objet pour pouvoir considérer que le faisceau reçu par l'objet est formé de rayons parallèles. Cette situation est tout à fait acceptable mais sur le plan énergétique, seule une très faible fraction de la puissance émise par la source parviendra sur l'objet. Il est alors très judicieux d'utiliser une lentille convergente et de placer la source dans son plan focal objet. On obtient un faisceau parallèle et on récupère presque toute la puissance qui arrive sur la lentille dans la zone correspondant à l'éclairage, voir le schéma de la figure 8.

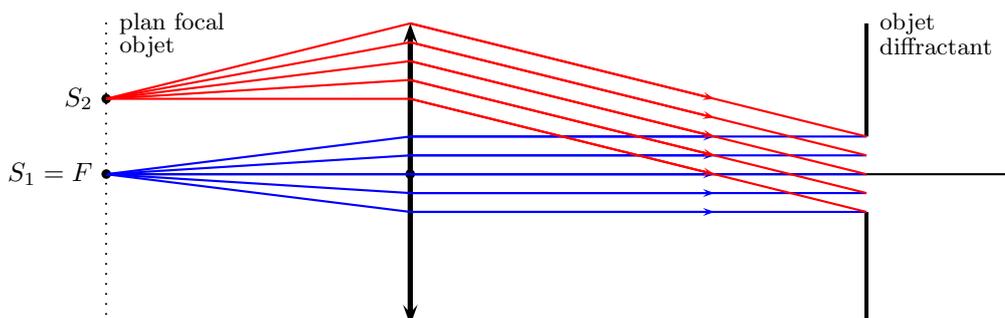


FIGURE 8 – Éclairage de l'infini

### 3.5.2 Observation à l'infini

Le problème est exactement le même que pour l'éclairage depuis l'infini. Nous pourrions nous contenter d'évoquer le principe de retour inverse de la lumière. L'objet diffractant est uniquement étudié dans la diffraction de FRAUNHOFER, c'est-à-dire que les rayons diffractés auxquels on s'intéresse sont parallèles entre eux. Une fois de plus, on peut placer l'œil ou le capteur sensible à la lumière à une distance grande devant les dimensions de l'objet. Cette possibilité n'est pas utilisée en général - sauf avec un laser qui possède un faisceau lumineux d'énergie élevée et peu divergent - car on ne récupérerait que très peu d'énergie. On préfère utiliser une lentille convergente et placer le dispositif d'observation dans son plan focal image, voir le schéma de la figure 9. On notera que pour un point observé donné, l'angle  $\theta$  des rayons diffractés étudié est aussi fixé.

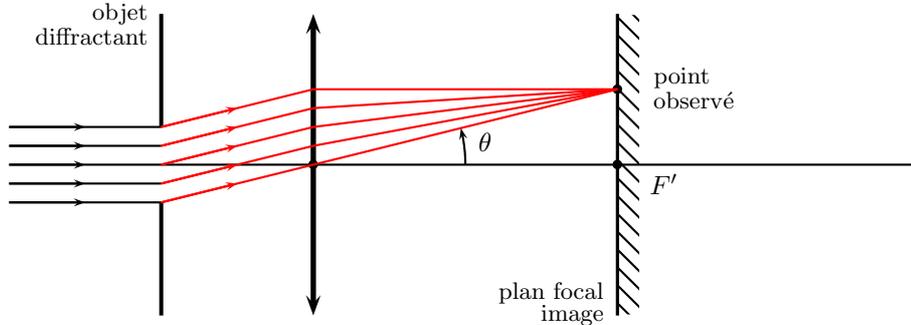


FIGURE 9 – Observation à l'infini

### 3.6 Expression générale de la phase

On considère un point source  $A$  situé à l'infini notée  $A_\infty$ , la direction de l'onde incidente est notée  $\vec{u}$  et le vecteur d'onde associé est  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}$ . L'évaluation de la phase de l'onde lumineuse s'effectue par référence par rapport un point  $O$  origine sur la surface diffractante  $S$ . Pour simplifier, la compréhension le schéma de la figure 10 est réalisé dans un plan où le point  $M$  sera considéré à l'infini lui aussi et noté  $M_\infty$ . Le vecteur d'onde est  $\vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}'$ . En pratique, soit les points  $A_\infty$  et  $M_\infty$  sont situés à une distance grande devant  $a$  la taille caractéristique de l'objet qui diffracte l'onde, soit ils sont situés respectivement dans le plan focal objet d'une lentille convergente pour  $A_\infty$  et dans le plan focal image d'une lentille convergente pour  $M_\infty$ .

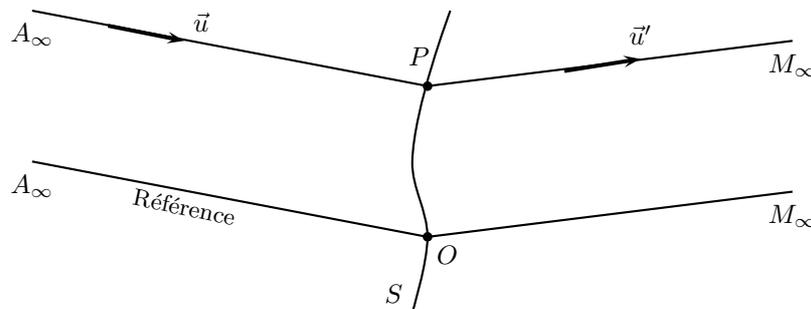


FIGURE 10 – Phase de l'onde

L'onde arrivant en  $P$  est de la forme  $\underline{s}_O \exp j(\omega t - \vec{k} \cdot \overrightarrow{A_\infty P}) = \underline{s}_A \exp -j\vec{k} \cdot \overrightarrow{A_\infty P}$ . On en déduit que l'onde arrivant en  $M$  est de la forme  $\underline{s}_P \exp -j\vec{k}' \cdot \overrightarrow{PM_\infty}$ . On a donc finalement une forme d'onde que l'on peut exprimer en fonction de la forme d'onde provenant de la source :  $\underline{s}_{M_\infty} = \underline{s}_A \exp -j \left[ \vec{k} \cdot \overrightarrow{A_\infty P} + \vec{k}' \cdot \overrightarrow{PM_\infty} \right]$ . Comme on peut choisir une origine des phases tout à fait librement sans restreindre la généralité, on choisit comme origine des phases celle d'une onde passant par le point  $O$ . En utilisant la relation de CHASLES, on peut écrire que  $\vec{k} \cdot \overrightarrow{A_\infty P} + \vec{k}' \cdot \overrightarrow{PM_\infty} = \vec{k} \cdot [\overrightarrow{A_\infty O} + \overrightarrow{OP}] + \vec{k}' \cdot [\overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OM_\infty}] = \vec{k} \cdot \overrightarrow{A_\infty O} + \vec{k}' \cdot \overrightarrow{OM_\infty} + (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OP}$ . On a donc  $\underline{s}_{M_\infty} = \underline{s}_O \exp -j (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OP}$ . L'expression générale de la phase est donc :

$$\varphi(P) = (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \overrightarrow{OP}$$

Cette expression de la phase trouve facilement une interprétation géométrique dans le cas d'une étude sur

une figure plane, voir le schéma de la figure 11. Cela est nettement moins perceptible dans le cas d'une étude où les trois directions de l'espace interviennent.

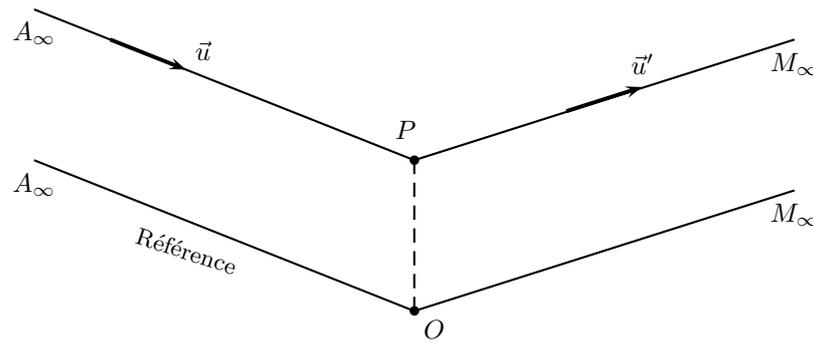


FIGURE 11 – Perception géométrique de la phase - Différence de marche

### 3.7 Expression pratique du principe de Huygens-Fresnel

Dans le modèle de l'onde plane pour la diffraction à l'infini, on écrit l'amplitude diffractée en ne faisant plus figurer le terme  $\exp j\omega t$  et en choisissant la référence des phases pour les ondes passant par le point  $O$ , l'expression pratique du principe de la diffraction à l'infini est donc :

$$\underline{\underline{s}}(M) = \iint_S K \underline{\underline{s}}_0 \underline{\underline{t}}(P) \exp -j\varphi(P) dS$$

avec  $\varphi(P) = (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{OP}$

Cette expression ne laisse pas voir de façon évidente la dépendance avec le point  $M$  mais il ne faut pas oublier que le vecteur d'onde de l'onde diffractée  $\vec{k}'$  dépend de  $M$ . Enfin, on n'oubliera pas que l'intégrale précédente exprime le fait que l'onde en  $M$  résulte de la superposition de toutes les ondes planes (dans le cas de la diffraction à l'infini) émises par les points  $P$  décrivant la surface  $S$  qui diffracte la lumière.

## 4 Ouverture rectangulaire

### 4.1 Schéma de l'étude

On étudie la diffraction à l'infini par une ouverture rectangulaire de côtés  $a$  et  $b$  avec  $a < b$ . Les lentilles sont utilisées dans les conditions de GAUSS qui assurent leur stigmatisme, c'est-à-dire qu'elles n'introduisent pas de différence de marche entre les ondes qui les traversent. Le schéma est fourni à la figure 12. La transmittance est  $\underline{\underline{t}}(x, y) = 1$  si  $|x| \leq a/2$  et si  $|y| \leq b/2$  et  $\underline{\underline{t}}(x, y) = 0$  sinon.  $O_1F = f_1$ ,  $O_2F' = f$  et  $x(S) = x_S$ .

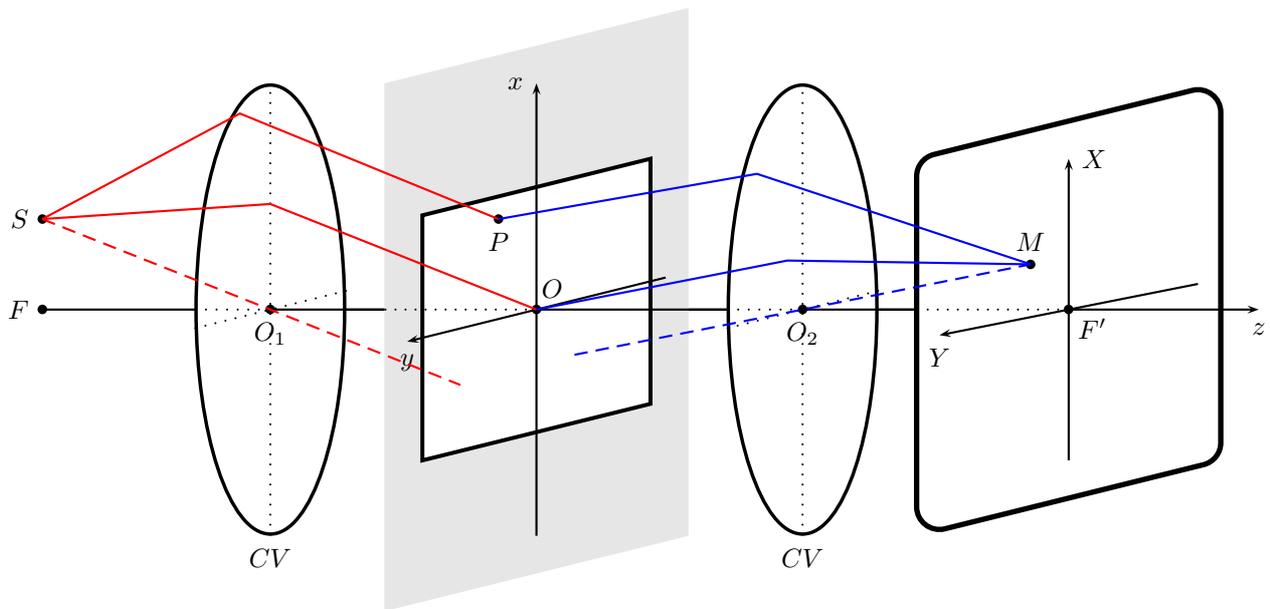


FIGURE 12 – Pupille rectangulaire

## 4.2 Calcul de l'intensité

On pose l'expression des vecteurs d'onde  $\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha\vec{e}_x + \beta\vec{e}_y + \gamma\vec{e}_z)$  et  $\vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha'\vec{e}_x + \beta'\vec{e}_y + \gamma'\vec{e}_z)$ . La norme des deux vecteurs d'onde est la même puisque les ondes se propagent dans le même milieu avant et après l'objet diffractant. Comme le point  $P$  possède les composantes  $(x, y, 0)$ , l'expression de la phase est donc :

$$\varphi(P) = (\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y$$

Du fait de la valeur simple de la transmittance  $t(x, y)$  qui vaut 0 ou 1, l'intégrale de HUYGENS-FRESNEL se limite à l'expression suivante :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} \exp j \frac{2\pi}{\lambda} [(\alpha - \alpha')x + (\beta - \beta')y] dx dy$$

Cette intégrale double est aisée à calculer car les variables  $x$  et  $y$  sont indépendantes et se séparent dans le calcul. On arrive à :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')x dx \int_{-b/2}^{b/2} \exp j \frac{2\pi}{\lambda} (\beta - \beta')y dy$$

On doit alors calculer deux intégrales identiques dans leur forme. Dans l'étude des transformées de FOURIER, nous avons déjà rencontré une telle intégrale. La primitive de la fonction exponentielle étant simple, on arrive à :

$$\int_{-a/2}^{a/2} \exp j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')x dx = \frac{1}{j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')} \left[ \exp j \frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')a - \exp j - \frac{\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')a \right]$$

On retrouve ici la fonction sinuscardinal qui est le rapport de  $\sin p$  sur  $p$ . Le résultat de l'intégrale est donc :

$$\int_{-a/2}^{a/2} \exp j \frac{2\pi}{\lambda} (\alpha - \alpha')x dx = a \operatorname{sinc} \frac{\pi(\alpha - \alpha')a}{\lambda}$$

La seconde intégrale étant exactement la même que celle-ci, on peut alors donner l'expression de l'amplitude diffractée par l'ouverture rectangulaire :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 ab \operatorname{sinc} \frac{\pi(\alpha - \alpha')a}{\lambda} \operatorname{sinc} \frac{\pi(\beta - \beta')b}{\lambda}$$

Ce résultat appelle tout de suite plusieurs commentaires. D'une part, l'amplitude diffractée est bien fonction de  $M$ . Cela n'est pas encore très explicite mais il ne faut pas oublier que l'orientation du vecteur unitaire  $\vec{u}'$  qui oriente les rayons diffractés est fonction de la position de  $M$  dans le plan focal image de la lentille convergente d'observation. De la même façon, il ne faut pas oublier que l'orientation du vecteur unitaire  $\vec{u}$  est fonction de la

position du point source  $S$  dans le plan focal objet de la lentille convergente permettant de réaliser un éclairage en lumière parallèle. Comme toujours en optique géométrique, il faut utiliser un rayon particulier pour pouvoir exprimer facilement les coordonnées des vecteurs unitaires. Le rayon passant par le centre optique de la lentille est parfait puisqu'il n'est pas dévié. On écrit donc que :

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{SO_1}}{SO_1} = \frac{-x_s \vec{e}_x + f_1 \vec{e}_z}{\sqrt{x_s^2 + f_1^2}} \quad \vec{u}' = \frac{\overrightarrow{O_2M}}{O_2M} = \frac{X \vec{e}_x + Y \vec{e}_y + f \vec{e}_z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2}}$$

D'autre part, sur un plan plus fondamental, on peut observer que l'amplitude est proportionnelle à la transformée de FOURIER de la fonction de transparence  $t(x, y)$ . Ce résultat est très général. Dans le cadre de l'Optique ondulatoire, la transformée de FOURIER est omniprésente comme nous le verrons d'ailleurs dans le cadre de l'étude des interférences.

Afin de respecter les conditions de GAUSS qui assurent le stigmatisme de la lentille - la lentille n'introduit pas de différence de marche -, on travaille avec des petits angles. Cela signifie que les distances  $|x_s|$ ,  $|X|$  et  $|Y|$  sont petites devant la distance focale  $f_1$  pour la première et devant  $f$  pour les deux secondes. On peut donc simplifier l'expression des vecteurs unitaires en considérant que  $\sqrt{X^2 + Y^2 + f^2} \simeq f$  et que  $\sqrt{x_s^2 + f_1^2} \simeq f_1$ . On peut alors écrire que :

$$\vec{u} = -\frac{x_s}{f_1} \vec{e}_x + \vec{e}_z \quad \vec{u}' = \frac{X}{f} \vec{e}_x + \frac{Y}{f} \vec{e}_y + \vec{e}_z$$

On déduit de l'expression précédente, les valeurs des coefficients des vecteurs unitaires  $\alpha = x_s/f_1$ ,  $\beta = 0$  et  $\gamma = 1$  pour  $\vec{u}$  et  $\alpha' = X/f$ ,  $\beta' = Y/f$  et  $\gamma' = 1$  pour  $\vec{u}'$ . On peut alors donner une expression plus compréhensible de l'amplitude diffractée en  $M$  :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 ab \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right) \right) \operatorname{sinc} \left( \frac{\pi b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right) \right)$$

On obtient l'intensité grâce à la formule :  $I(M) = \alpha \underline{s}(M) \underline{s}^*(M)$  où  $\alpha$  est un coefficient de proportionnalité qui n'a rien à voir avec le coefficient du vecteur  $\vec{u}$  rencontré juste avant. On obtient l'expression suivante :

$$I(M) = K^2 s_0^2 a^2 b^2 \left( \frac{\sin \pi \frac{a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right)} \right)^2 \left( \frac{\sin \pi \frac{b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right)} \right)^2$$

Comme la valeur maximale d'un sinuscoidal est de 1, on peut poser  $I_{max} = K^2 s_0^2 a^2 b^2$  et conclure sur l'expression suivante de l'intensité lumineuse diffractée à l'infini :

$$I(M) = I_{max} \left( \frac{\sin \pi \frac{a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right)} \right)^2 \left( \frac{\sin \pi \frac{b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right)} \right)^2$$

### 4.3 Conclusion

L'intensité est représentée sur la figure 13.

On y trouve la représentation de la fonction  $f(X) = \left( \frac{\sin \pi \frac{a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right)}{\pi \frac{a}{\lambda} \left( \frac{X}{f} + \frac{x_s}{f_1} \right)} \right)^2$ , une représentation en 3D de la

fonction d'intensité  $I(X, Y)$  ainsi que ce que l'on voit sur l'écran. La fonction  $g(Y) = \left( \frac{\sin \pi \frac{b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right)}{\pi \frac{b}{\lambda} \left( \frac{Y}{f} \right)} \right)^2$  n'est pas représentée. Elle a exactement la même forme que  $f(X)$  mis à part le fait qu'elle passe par son maximum en  $Y = 0$ . On peut d'ailleurs observer le graphique en 3D de l'intensité lumineuse pour constater que le maximum principal de la fonction  $I(M) = I(X, Y)$  est bien localisé en  $X = -x_s \frac{f}{f_1}$  et  $Y = 0$ . On peut voir clairement sur la figure 13 que l'essentiel de l'intensité lumineuse (95%) est concentrée dans le pic principal de diffraction et que les maxima secondaires correspondent à des intensités faibles voire très faible devant  $I_{max}$ . Avec des sources conventionnelles, les maxima secondaires sont très petits et très peu perceptibles. Par contre, on les met très bien en évidence avec un laser. On peut encore remarquer que la largeur du pic principal de diffraction est deux fois plus grande que celle des maxima secondaires.

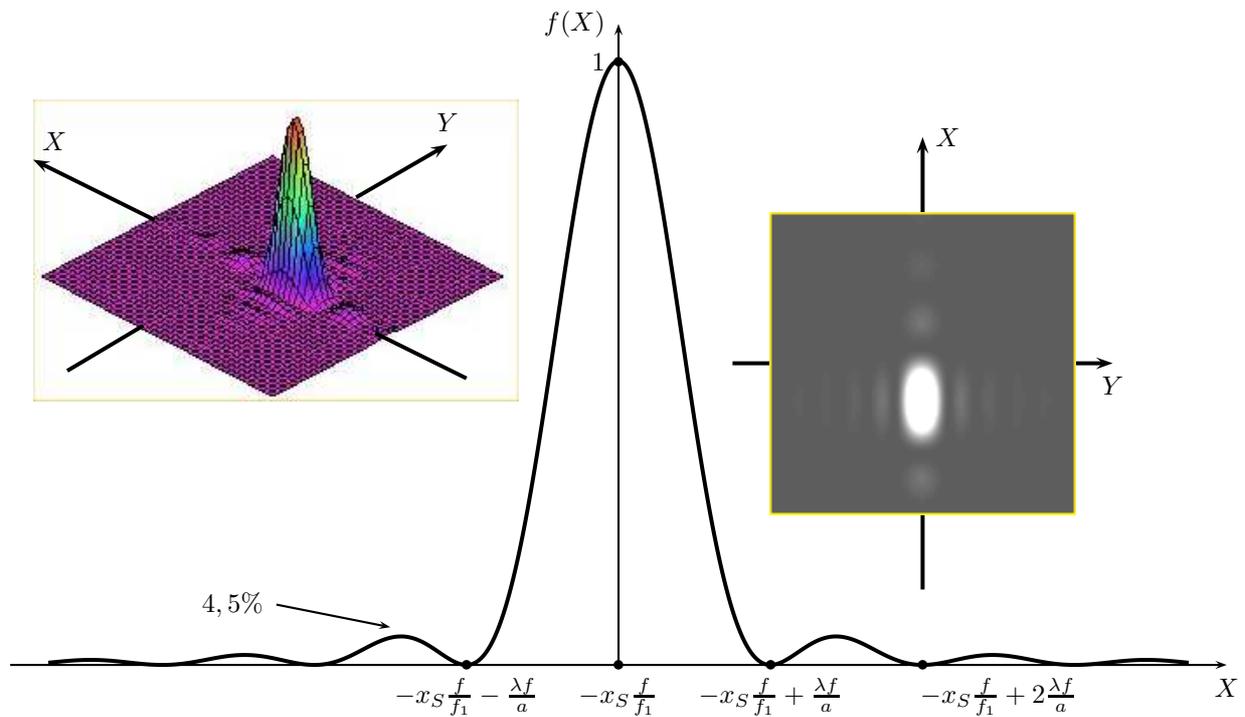


FIGURE 13 – Intensité diffractée par une pupille rectangulaire

## 5 Fente

### 5.1 Contexte de l'étude

On considère une fente de largeur  $b$  et de très grande longueur sur l'autre dimension - cela autorise à ne traiter qu'un problème unidimensionnel - éclairée par une onde plane monochromatique sous incidence normale. On observe dans le plan focal image d'une lentille convergente dans la limite des petits angles pour obtenir le stigmatisme de la lentille.

## 5.2 Intensité diffractée

### 5.3 Lien avec la transformée de Fourier - Conclusion

## 6 Système de deux fentes parallèles

On considère un système de deux fentes parallèles de largeur  $b$  et de très grande longueur sur l'autre dimension. Les deux fentes sont éclairées sous incidence normale par une onde plane monochromatique. On observe toujours dans le plan focal image d'une lentille convergente utilisée dans les conditions de GAUSS. La distance qui sépare les deux centres des deux fentes est notée  $a$ . Attention,  $a$ , ici, un rôle différent de celui qu'il avait dans les cas précédents.

### 6.1 Fonction de transparence

On travaille en situation unidimensionnelle. On notera  $x$  l'axe de description de la fonction de transparence modélisant les fentes et  $X$  la coordonnée intervenant sur l'écran où on réalise la projection de la figure de diffraction. La figure 14 montre la fonction de transparence modélisée simplement par deux fonctions créneaux successives.

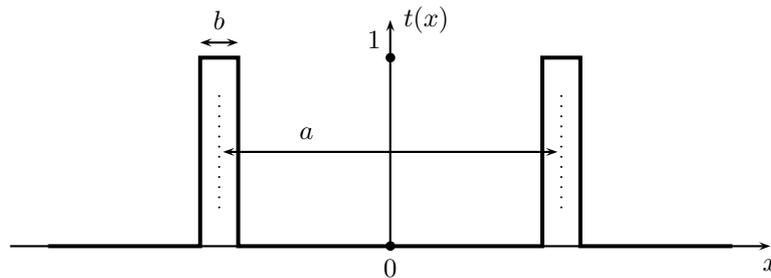


FIGURE 14 – Fonction de transparence de deux fentes parallèles de grandes longueurs

### 6.2 Calcul de l'amplitude diffractée

### 6.3 Intensité diffractée

La figure 15 montre l'évolution de l'intensité diffractée sur l'écran. La figure fait clairement apparaître une fonction lente qui sert d'enveloppe à une fonction rapide. La fonction lente est  $\text{sinc}^2 \frac{\pi b X}{\lambda f}$ . La fonction rapide est  $1 + \cos \frac{2\pi a X}{\lambda f}$ . Comme  $a > b$ , la pulsation de la fonction cosinus est plus grande que la pseudo-pulsation de la fonction sinuscardinal.

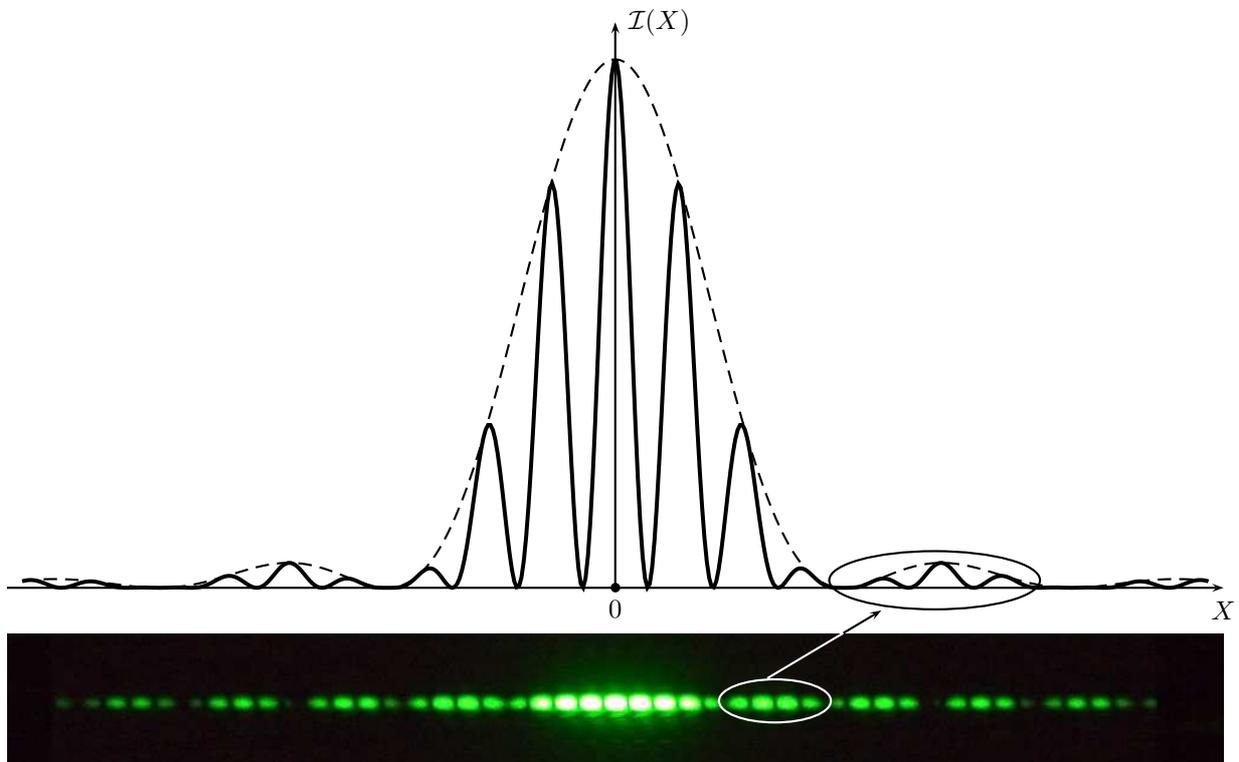


FIGURE 15 – Intensité diffractée par un système de deux fentes parallèles. Sur la photographie, l'échelle est différente de celle utilisée sur le graphique de telle sorte que l'on voie mieux l'évolution de la courbe d'intensité  $\mathcal{I}(X)$ . De plus, le rapport  $a/b$  n'est pas le même. Les ellipses marquées montrent des groupes de franges qui se correspondent en quelque sorte. La photographie a été réalisée en utilisant un laser vert de longueur d'onde  $\lambda = 532 \text{ nm}$  pour éclairer un système de deux fentes.

## 7 Ouverture circulaire

### 7.1 Contexte de l'étude

On étudie la diffraction à l'infini par une ouverture circulaire de rayon  $a$ . Les lentilles sont utilisées dans les conditions de GAUSS qui assurent leur stigmatisme, c'est-à-dire qu'elles n'introduisent pas de différence de marche entre les ondes qui les traversent. Le schéma est fourni à la figure 16. La transmittance est  $\underline{t}(\rho, \varphi) = 1$  si  $r \leq a/2$  et si  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$  et  $\underline{t}(\rho, \varphi) = 0$  sinon. Cette étude est hors-programme en raison des difficultés de calcul que nous allons voir par la suite.

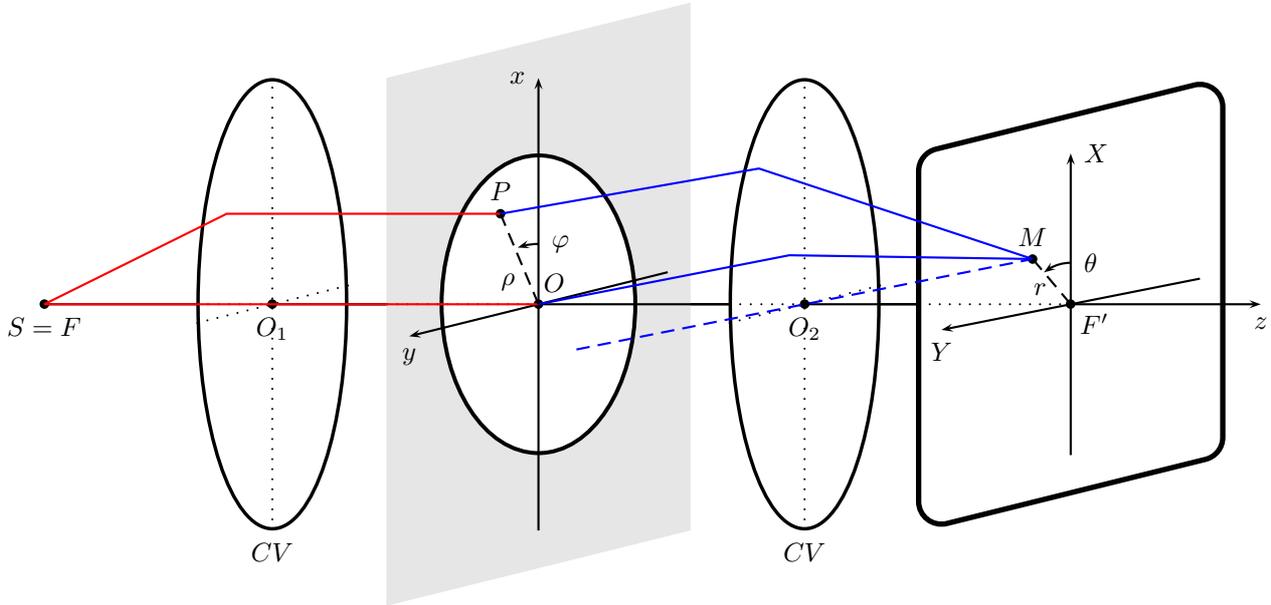


FIGURE 16 – Pupille circulaire

### 7.2 Amplitude diffractée

On part du principe de HUYGENS-FRESNEL de la diffraction à l'infini, à savoir  $\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 \iint_S \underline{t}(P) \exp -j\varphi(P) dS$ .

La phase de l'onde est  $\varphi(P) = (\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{OP}$ . Or dans le cas étudié, on a  $\vec{k} \perp \vec{OP}$  donc  $\varphi(P) = -\vec{k}' \cdot \vec{OP}$ .

On a  $\vec{OP} = \rho \vec{e}_\rho$  et  $\vec{k}' = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{u}'$  avec  $\vec{u}' = \frac{\vec{O}_2 F'}{\rho}$ . En utilisant toujours les lentilles dans les conditions de

GAUSS, on peut écrire que  $O_2 F' = \sqrt{r^2 + f^2} \simeq f$  et, dans ces conditions, on a  $\vec{u}' \simeq \frac{r}{f} \vec{e}_r + \vec{e}_z$ . La phase

s'écrit donc  $\varphi(P) = -\frac{2\pi r \rho}{\lambda f} \vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_r = -\frac{2\pi r \rho}{\lambda f} \cos(\varphi - \theta)$ . L'amplitude s'obtient en calculant l'intégrale  $\underline{s}(M) =$

$K \underline{s}_0 \int_{\rho=0}^a \int_{\varphi=0}^{2\pi} \exp j \left[ \frac{2\pi r \rho}{\lambda f} \cos(\varphi - \theta) \right] \rho d\rho d\varphi$ . Compte tenu de l'invariance par rotation autour de l'axe  $Oz$  de

la pupille diffractant la lumière, on peut effectuer le calcul de l'amplitude pour un point  $M$  situé sur l'axe  $F'X$  sans aucunement restreindre sa validité. On travaille donc pour  $\theta = 0$  et on imbrique les intégrales selon la forme suivante :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 \int_{\rho=0}^a \left( \int_{\varphi=0}^{2\pi} \exp j \left[ \frac{2\pi r \rho}{\lambda f} \cos \varphi \right] d\varphi \right) \rho d\rho$$

On pose  $\epsilon = \frac{2\pi r}{\lambda f}$  et dans ces conditions, l'intégrale sur  $\varphi$  qui n'est pas calculable par des méthodes classiques est identifiée à la fonction de BESSEL d'ordre 0 à un coefficient près. On pose  $u = \epsilon \rho$  et la fonction de BESSEL est :

$$J_0(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \exp j[u \cos \varphi] d\varphi$$

L'amplitude diffractée correspond à l'intégrale de la fonction  $J_0(\epsilon \rho)$  selon la forme :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 2\pi \int_{\rho=0}^a J_0(\epsilon\rho)\rho d\rho = K \underline{s}_0 \frac{2\pi}{\epsilon^2} \int_{\zeta=0}^{\epsilon a} J_0(\zeta)\zeta d\zeta$$

après avoir effectué le changement de variable  $\zeta = \epsilon\rho$ . Cette seconde intégrale n'est pas non plus calculable selon des méthodes simples, on l'identifie, toujours à un coefficient près à une fonction de BESSEL mais maintenant il s'agit de la fonction de BESSEL d'ordre 1 telle que :

$$J_1(\epsilon a) = \frac{1}{\epsilon a} \int_{\zeta=0}^{\epsilon a} J_0(\zeta)\zeta d\zeta$$

En utilisant la fonction de BESSEL d'ordre 1, on peut conclure sur le calcul de l'amplitude diffractée avec une forme permettant la comparaison avec la fente rectangulaire en mettant en facteur la surface  $\pi a^2$  de l'ouverture :

$$\underline{s}(M) = K \underline{s}_0 \pi a^2 \frac{2J_1(\epsilon a)}{\epsilon a}$$

Les fonctions de BESSEL sont des fonctions tabulées de façon très précise en fonction de  $v = \epsilon a$ . Cela permet d'étudier précisément l'amplitude et l'intensité diffractée.

### 7.3 Intensité diffractée

L'intensité diffractée est donnée par  $I(M) = \alpha \underline{s}(M) \underline{s}^*(M)$ . On obtient donc la formule suivante que l'on peut réécrire en notant  $I_0$  l'intensité au centre de la figure. En effet,  $I(F') = \alpha K^2 s_0^2 \pi^2 a^4$  et donc  $I(r) = I_0 \left( \frac{2J_1(\epsilon a)}{\epsilon a} \right)^2$  avec  $\epsilon = \frac{2\pi r}{\lambda f}$ . On pose  $v = \frac{2\pi ar}{\lambda f}$  et ensuite, on a  $I(v) = I_0 \left( \frac{2J_1(v)}{v} \right)^2$ . Sur le graphique de la figure 17, on peut voir la représentation de la fonction d'intensité  $I(v)/I_0$  en fonction de  $v$  ainsi que sa représentation en 3D et ce que l'on obtient sur l'écran.

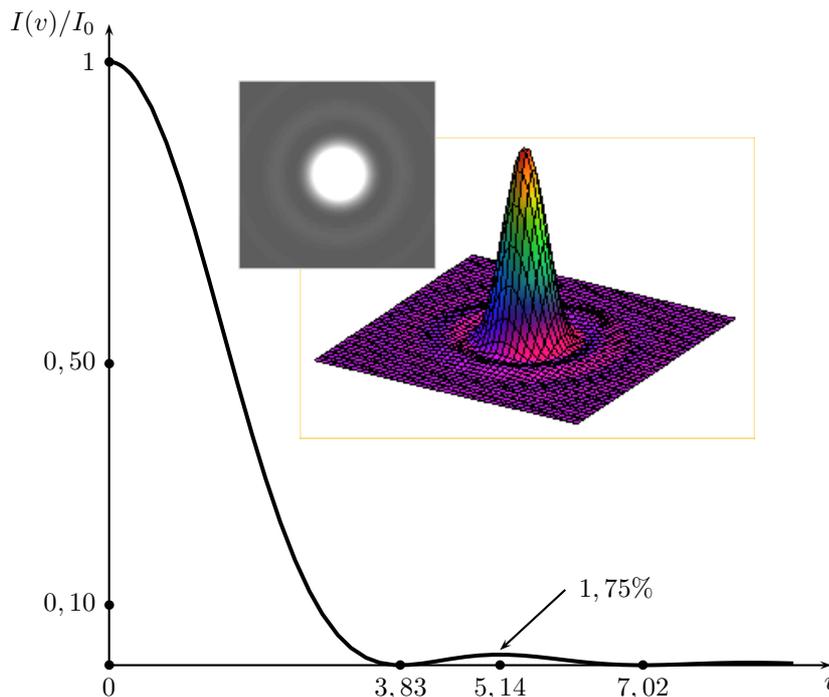


FIGURE 17 – Intensité diffractée par une pupille circulaire

La fonction d'intensité s'annule une première fois pour  $v_1 = 3,83$  puis pour  $v_2 = 7,02$ . Le maximum situé entre ces deux zéros est obtenu pour  $v'_1 = 5,14$  et vaut 0,0175. La valeur précédente montre qu'il est tout à fait logique de considérer que l'abscisse du premier zéro détermine en fait la taille de la tache de diffraction. On a donc  $\frac{2\pi r_d a}{\lambda f} = 3,83$ , on trouve alors que :

$$r_d = 0,61 \frac{\lambda f}{a} = 1,22 \frac{\lambda f}{D}$$

en posant  $D = 2a$  le diamètre de l'ouverture.

## 7.4 Conclusion

On peut constater dans cet exemple de géométrie circulaire que la figure de diffraction respecte la symétrie de l'objet diffractant. De plus, la répartition de l'énergie de l'onde n'est pas fondamentalement différente de celle de l'ouverture rectangulaire. La plupart des instruments d'optique comme les lunettes d'observation, les microscopes, les télescopes présentent une symétrie de révolution. Le calcul de la fonction de diffraction est assez délicat, c'est pourquoi, il a été présenté d'abord un calcul plus simple en géométrie cartésienne. Pour les instruments d'optique, la diffraction fournit une tache image dont la taille est de l'ordre de  $\lambda f/a$ . L'image d'un point n'est pas un point mais cette tache. D'une façon générale, la diffraction limite le pouvoir de résolution des instruments d'optique. Pour avoir le meilleur pouvoir de résolution possible, on pourra jouer sur la longueur d'onde  $\lambda$ , sur la distance focale,  $f$  mais souvent on joue sur la taille de l'instrument. Des télescopes de grande taille présentent les meilleurs pouvoirs de résolution.

## 8 Dans la vie courante

La diffraction peut être observée dans la vie courante. Bien sûr, c'est dans le domaine de l'Optique que l'on peut la percevoir le plus souvent mais toutes les formes d'ondes sont soumises à la diffraction. Pour les ondes sonores, le cas le plus fréquent est celui d'une conversation effectuée dans une pièce et entendue dans l'angle - par rapport à la porte ouverte - d'une seconde pièce. En effet, le son se propage à la vitesse  $c \simeq 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et les fréquences d'une conversation sont de l'ordre de 300 Hz. La longueur d'onde  $\lambda = c/f$  est donc de l'ordre du mètre. C'est aussi l'ordre de grandeur de la largeur d'une porte. Or, comme nous l'avons vu le rapport  $\lambda/a$  est fondamental dans le phénomène de diffraction. Lorsque la taille de l'objet diffractant est du même ordre de grandeur que la longueur d'onde, le phénomène de diffraction sera facilement perceptible sur le plan angulaire. Cela a été mis à profit dans la mise au point des études cristallographiques où pour connaître les propriétés des réseaux cristallins, on a envoyé, au début du  $XX^{\text{e}}$  siècle, des rayons X sur des cristaux et recherché les positions dans l'espace des maxima principaux pour en déduire le système cristallin du corps étudié (méthode de BRAGG). Les rayons X étaient appropriés pour cette étude car leur longueur d'onde était de l'ordre des distances interatomiques dans les cristaux ( $\simeq 100 \text{ pm}$ ).

Sur les deux photographiques de la figure 18, on peut observer deux phénomènes de diffraction. Dans chacun des deux cas, le phénomène est perceptible car le rapport  $\lambda/a$  est de l'ordre de l'unité. On peut voir la diffraction des vagues par l'ouverture d'une baie - cette situation correspond à la diffraction par une ouverture unique. Dans l'autre cas, on voit 4 maxima présentant le spectre de la lumière blanche. Il s'agit de la diffraction par un grand nombre de pixels d'un écran de télévision. Ces pixels ont une taille de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde du spectre visible ( $\lambda \simeq 0,5 \mu\text{m}$ ). On ne tiendra pas compte dans cette photographie de l'image du second spot un peu décalé de celui qui génère le phénomène d'interférences positionné bien au centre des 4 maxima. Les pixels de l'écran de télévision forment un réseau de diffraction. L'étude des réseaux figure à notre programme. Ses fondements se trouvent dans la théorie de la diffraction que nous venons de parcourir sommairement.



FIGURE 18 – Diffraction des ondes en Mécanique et en Optique

Vous pourrez pour terminer cette étude visualiser le diaporama intitulé Diffraction sur mon site.

Ce diaporama montre les principales conséquences de la diffraction et évoque la technique de l'apodisation qui consiste à moduler la fonction de transparence d'un objet diffractant afin de réduire la limite du pouvoir de résolution.

## 9 Complément sur l'apodisation

La diffraction par une fente simple de transmittance  $t(x) = 1$  pour  $x \in [-a/2, a/2]$  génère une fonction d'éclairement dans le plan focal d'une lentille convergente de distance focale  $f$  d'expression :

$$E = E_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a X}{\lambda f}$$

La largeur du pic principal de diffraction est  $\Delta X = \frac{2\lambda f}{a}$ ,  $X$  est la coordonnée dans le plan focal d'observation. Cette largeur limite la capacité du système optique à distinguer deux objets séparés par un angle inférieur à  $\varepsilon_m = \frac{2\lambda}{a}$ .

On peut réduire l'importance des maxima secondaires de la diffraction en utilisant un filtre comme le filtre triangulaire de fonction  $t(x)$  de la figure 19.

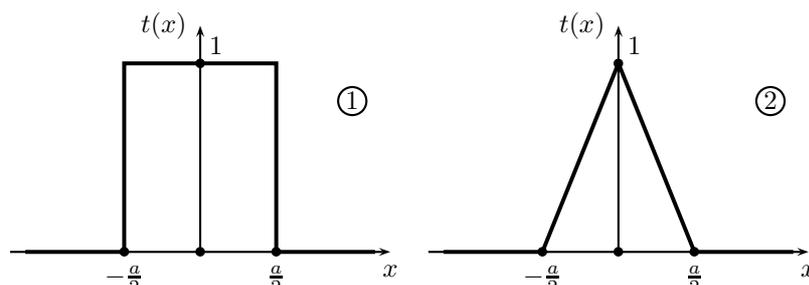


FIGURE 19 – Transmittance classique de la fente et transmittance triangulaire

De plus, deux objets théoriquement séparés par un angle  $\varepsilon > \varepsilon_m$  peuvent très bien être confondus. En effet, s'ils sont de luminosités différentes l'objet de faible luminosité peut être masqué par un maximum secondaire de la fonction de diffraction de l'autre objet. Afin d'éviter cet inconvénient, on pratique la technique de l'*apodisation*. Elle consiste à utiliser dans l'ouverture qui diffracte un dispositif plus ou moins transparent représenté par une fonction de transmittance variable et inférieure à 1. On peut choisir par exemple  $t(x) = 1 - \frac{2|x|}{a}$  qui est une fonction affine par morceau de maximum 1 en  $x = 0$  et valant 0 sur les bords. On constate sur la figure 20 que l'on a très fortement atténué les maxima secondaires ce qui était l'objectif recherché. Apodisation signifie littéralement *suppression des pieds* sous-entendu, ici, suppression des maxima secondaires.

Sur la figure 20, on compare les figures de diffraction dans les deux cas en se plaçant avec un même éclairement sur chaque fente. Comme la surface de la fonction triangulaire est deux fois plus petite, on considérera que cela revient à ne transmettre que la moitié de l'intensité pour la fente apodisée par rapport à la fente de transmittance constante et unitaire. Dans chaque cas, l'éclairement est donné par :

$$E = E_0 \operatorname{sinc}^2 \frac{\pi a X}{\lambda f} \quad \text{et} \quad E = \frac{E_0}{2} \operatorname{sinc}^4 \frac{\pi a X}{\lambda f}$$

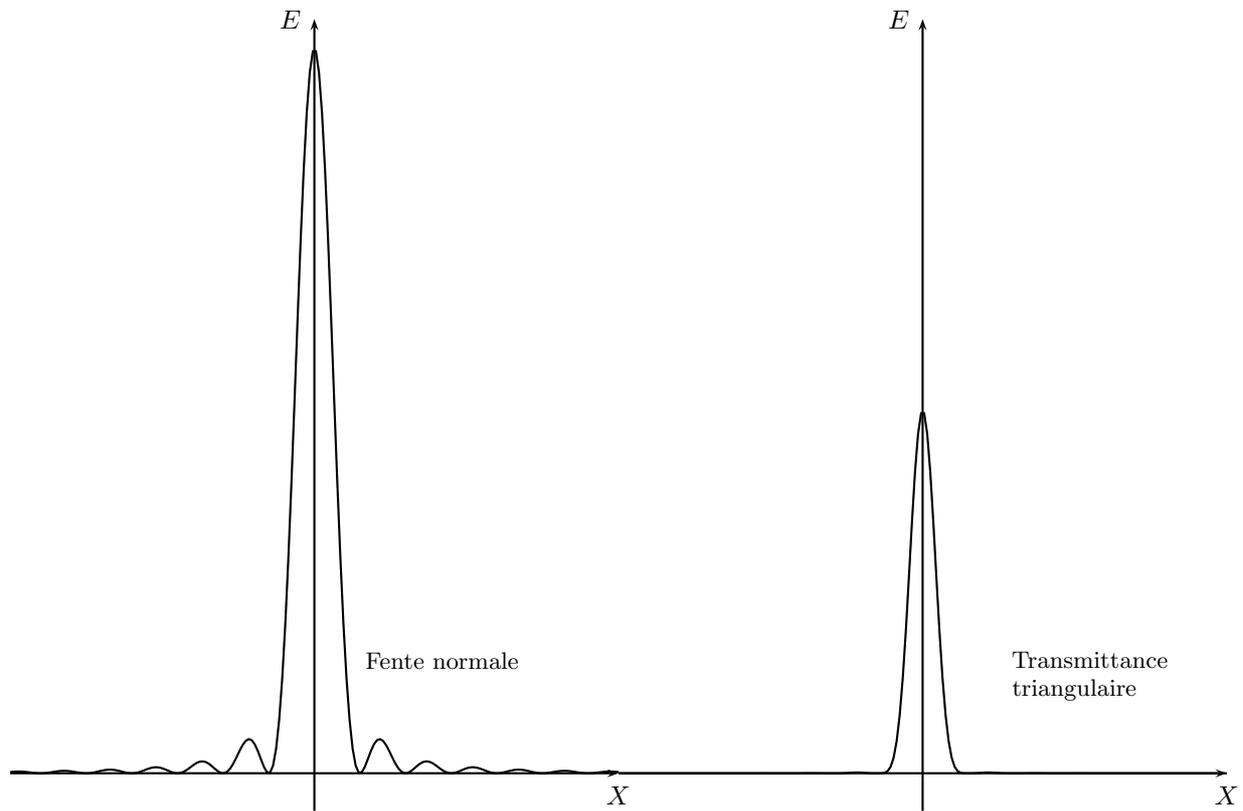


FIGURE 20 – Comparaison de la fente et de la fente apodisée

On gagne en terme de résolution mais on perd en énergie reçue par le détecteur... On ne peut pas gagner sur tous les tableaux !



FIGURE 21 – Diffraction d'une applique lumineuse murale sur un écran de télévision

## 10 Notes personnelles sur la diffraction