

PARTIE A

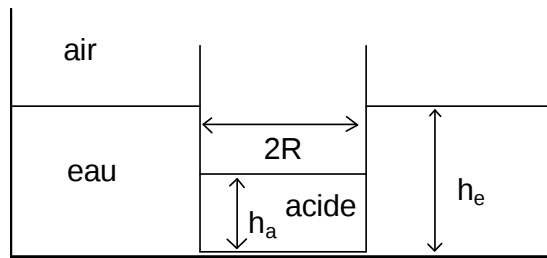
FORCES DE PRESSION ET EQUILIBRES HYDROSTATIQUES

Exercice 1	8
Equilibre d'un système flottant	
○ <i>Equation fondamentale de l'équilibre hydrostatique</i>	
Exercice 2	9
Equilibre d'un barrage-poids	
○ <i>Equation fondamentale de l'équilibre hydrostatique</i>	
⇒ <i>Forces de contact et coefficient de frottement</i>	
Exercice 3	12
Oscillateur à poussée d'Archimède	
○ <i>Equation fondamentale de l'équilibre hydrostatique</i>	
⇒ <i>Oscillateur mécanique</i>	
Exercice 4	13
Dépression par rotation	
○ <i>Loi de la statique des fluides</i>	
○ <i>Référentiel non galiléen</i>	
Exercice 5	16
Dynamique de formation des étoiles	
○ <i>Equation fondamentale de l'équilibre hydrostatique</i>	
○ <i>Energie interne d'un gaz parfait</i>	
⇒ <i>Théorème de Gauss et travail des forces de gravitation</i>	
Exercice 6	19
Surface libre d'un tourbillon	
○ <i>Equation fondamentale de l'équilibre hydrostatique</i>	
⇒ <i>Principe fondamental de la dynamique</i>	
Exercice 7	22
Ascension d'un aérostat	
○ <i>Equation fondamentale de l'équilibre hydrostatique</i>	
⇒ <i>Principe fondamental de la dynamique</i>	

Exercice 1 : Equilibre d'un système flottant

Dans un cristallisateur, on dispose un b cher de 250mL de forme cylindrique de rayon $R = 3,5\text{cm}$, de hauteur $h = 9\text{cm}$ et de masse $m = 98\text{g}$ (  vide). Il contient $V_a = 100\text{mL}$ d'acide sulfurique (H_2SO_4) concentré de densité $d = 1,84$. On verse de l'eau dans le cristallisateur. A partir de quelle hauteur d'eau h_e le b cher risque-t-il de se mettre à flotter et de se renverser ? On fera l'hypothèse qu'il existe toujours entre le fond du cristallisateur et le fond du b cher une mince couche d'eau.

La hauteur recherch e sera d termin e en écrivant (dans le cas limite) que la somme des forces appliqu es au b cher est nulle. Faisons l'inventaire des forces : le b cher subit son propre poids vertical vers le bas d'intensité mg , des forces de pression dues à l'eau et des forces de pression dues à l'acide sulfurique. Sur les parois verticales du b cher, la résultante de l'ensemble des forces de pression est nulle du fait de la symétrie cylindrique.



Il ne faut se préoccuper que des résultantes sur le fond du b cher. Elles sont verticales, celle due à l'eau est dirig e vers le haut, celle due à l'acide sulfurique est dirig e vers le bas. Pour les déterminer, il faut connaître la pression exerc e par un fluide incompressible. La loi de la statique des fluides est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu \overrightarrow{g} \quad \text{ou} \quad \frac{dp}{dz} = -\mu g$$

μ est la masse volumique du fluide, consid r e comme une constante. Cela conduit à la loi classique (pour z orienté vers le bas) : $p = p_0 - \mu g z$, si p_0 est la pression de l'air. La pression exerc e par l'eau sur le fond du b cher sera donc $p_e + \mu_e g h_e$ d'où la force $F_e = (p_e + \mu_e g h_e) \pi R^2$. Le même raisonnement pour l'acide sulfurique conduit à : $F_a = (p_0 + \mu_a g h_a) \pi R^2$.

La condition d'équilibre est :

$$(p_0 + \mu_a g h_a) \pi R^2 + mg = (p_0 + \mu_e g h_e) \pi R^2$$

En utilisant la définition de la densité $d = \mu_a / \mu_e$, on trouve :

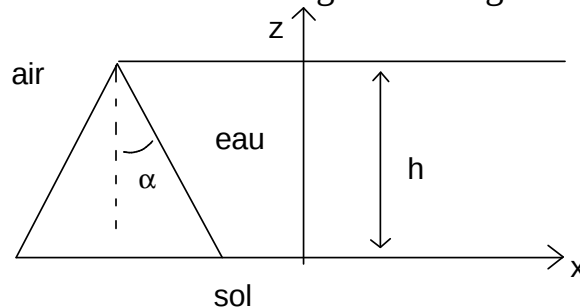
$$h_e = \frac{1}{\pi R^2} \left[dV_a + \frac{m}{\mu_e} \right] = 7,3 \text{ cm}$$

On peut constater que $h_e < h$, il faudra donc faire attention lors du remplissage du cristalliseur afin de ne pas dépasser h_e .

○ ○ ○

Exercice 2 : Equilibre d'un barrage-poids

Dans cet exercice, les solides et les liquides sont plongés dans le champ de pesanteur uniforme g . Le référentiel terrestre est supposé galiléen. On se réfère au schéma situé plus loin. Le barrage est formé d'un solide indéformable, en forme de pentaèdre de base rectangulaire. Sa section est un triangle isocèle, de hauteur h , de demi-angle au sommet égal à α . Sa masse volumique est ρ . Il est posé sur le sol horizontal et permet de retenir l'eau d'un lac dont la masse volumique est égale à μ . On suppose que les seules forces qui interviennent sont liées à la pression des fluides (eau et air), au poids du barrage et aux forces de contact exercées par le sol. La longueur L du barrage est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les forces de liaison intervenant à ses extrémités. On appelle p_0 la pression uniforme de l'air au voisinage du barrage.



- Exprimer la pression dans l'eau en fonction de l'altitude z , de p_0 , μ , g et h .
- Calculer la force exercée sur la face immergée. En déduire la force exercée sur la face émergée.

On admet que ni l'air, ni l'eau ne peuvent pénétrer sous le barrage. On considère que ce dernier ne tient alors en équilibre sur le sol que par l'action de la force de frottement solide. Dans ce cas la réaction du sol sur le barrage est représentée par : une composante normale N verticale ascendante et une composante tangentielle T horizontale qui s'oppose au glissement du barrage. L'équilibre statique n'est garanti que si $|T| \leq f|N|$, expression dans laquelle f est un coefficient constant, appelé coefficient de

frottement statique du barrage sur le sol. On définit aussi l'angle de frottement φ tel que $\tan \varphi = f$. Cet angle représente l'inclinaison maximale de la réaction du sol par rapport à la verticale.

- c. Déterminer les forces N et T .
- d. En déduire la valeur minimale du coefficient de frottement, pour que le barrage reste en équilibre sur le sol, sans glisser.
- e. Montrer que si $\alpha + \varphi > \pi / 2$, alors le barrage reste en équilibre.
- f. On suppose que $h = 10\text{m}$, $g = 10\text{m.s}^{-2}$, $\rho = 2.10^3\text{kg.m}^{-3}$, $\mu = 10^3\text{kg.m}^{-3}$, $\alpha = 45^\circ$. Calculer la valeur limite de f .
- g. Que se passe-t-il si l'air peut s'infiltrer sous le barrage et exercer la pression p_0 sur la base ? Quelle est la nouvelle valeur limite du coefficient de frottement f ?
- h. Que se passe-t-il si l'eau peut pénétrer sous le barrage ?

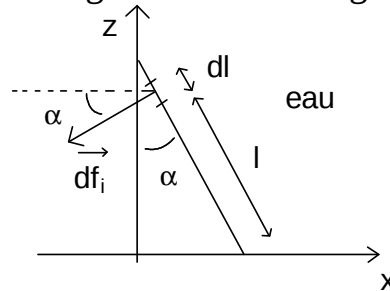
- a. D'après la loi de la statique des fluides $\vec{\text{grad}} p = \mu \vec{g} = -\mu g \vec{e}_z$. Comme ici, seule la composante en z du gradient est non nulle, la pression ne dépendra que de z . Compte tenu de l'expression du gradient, il vient :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g$$

Par intégration, en tenant de la condition $p(z = h) = p_0$, on obtient :

$$p(z) = p_0 + \mu g(h - z)$$

- b. Considérons une surface élémentaire (immergée) du barrage à l'altitude z . Elle aura une largeur dl et une longueur L : $dS = Ldl$.



Elle subit une force de pression élémentaire $d\vec{f}_i = p(z)Ldl\vec{h}$ où $\vec{h}$ est un vecteur unitaire normal à dS . Par projection, on a :

$$\vec{h} = -\cos\alpha\vec{e}_x - \sin\alpha\vec{e}_y$$

Comme $l = z / \cos\alpha$, $dl = dz / \cos\alpha$. On peut maintenant exprimer la force élémentaire uniquement en fonction de z :

$$d\vec{f}_i = [p_0 + \mu g(h - z)]Ldz(-\vec{e}_x - \tan\alpha\vec{e}_y)$$

En intégrant, pour z allant de 0 à h , on trouve les deux composantes de la force exercée sur la face immergée :

$$f_x = - \left[p_0 h L + \frac{\mu g L h^2}{2} \right] \text{ et } f_z = - \tan \alpha \left[p_0 h L + \frac{\mu g L h^2}{2} \right]$$

Pour la face émergée, considérer la pression de l'air uniforme signifie négliger le terme $\mu_{\text{air}} g(h-z)$ devant p_0 . L'expression de la force s'obtient en faisant $\mu = 0$ dans l'expression précédente et en changeant le signe de la composante suivant x puisque cette force est orientée "en sens contraire" de la précédente :

$$\vec{f}_e = p_0 h L (+\vec{e}_x - \tan \alpha \vec{e}_y)$$

c. A l'équilibre mécanique, dans un référentiel galiléen, la somme des forces appliquées est nulle :

$$\vec{f}_i + \vec{f}_e + \vec{T} + \vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}$$

La masse volumique du barrage étant ρ et son volume $Lh^2 \tan \alpha$, son poids sera $m\vec{g} = -\rho Lh^2 \tan \alpha g \vec{e}_z$. On peut ainsi déterminer :

$$\vec{T} = \frac{\mu}{2} Lh^2 g \vec{e}_x \text{ et } \vec{N} = \left(\frac{2p_0}{gh} + \rho + \frac{\mu}{2} \right) Lh^2 \tan \alpha g \vec{e}_x$$

d. Pour qu'il n'y ait pas glissement, il faut $|T| \leq f|N|$; $f_{\min} = T/N$ d'où :

$$f_{\min} = \frac{\mu gh}{[4p_0 + (2\rho + \mu)gh] \tan \alpha} = \tan \varphi$$

e. Si $\tan \varphi = 1/\tan \alpha$, alors cela veut dire que $\alpha + \varphi = \pi/2$. Comme $\frac{\mu gh}{[4p_0 + (2\rho + \mu)gh]} < 1$, alors $\tan \varphi > \frac{1}{\tan \alpha} > \frac{\mu gh}{[4p_0 + (2\rho + \mu)gh] \tan \alpha}$, par conséquent $\alpha + \varphi \geq \pi/2$ convient pour que le barrage soit à l'équilibre.

f. On trouve que $f_{\min} = 0,11$.

g. Si l'air peut s'infiltrer sous le barrage, il en résulte une force verticale supplémentaire de valeur :

$$p_0 S_{\text{base}} \vec{e}_z = p_0 2Lh \tan \alpha \vec{e}_z$$

La nouvelle composante normale de la réaction du sol est donc :

$$\vec{N} = \left(\rho + \frac{\mu}{2} \right) Lh^2 \tan \alpha g \vec{e}_x$$

Comme la composante tangentielle n'a pas changé, on en déduit que :

$$f_{\min} = \frac{\mu}{(2\rho + \mu) \tan \alpha} = 0,20$$

h. Si l'eau peut pénétrer sous le barrage, elle exercera une pression $p_0 + \mu gh$ sur la surface de base. Cela crée une contribution en moins dans N . On trouve que :

$$f_{\min} = \frac{\mu}{(2\rho - 3\mu) \tan \alpha} = 1$$

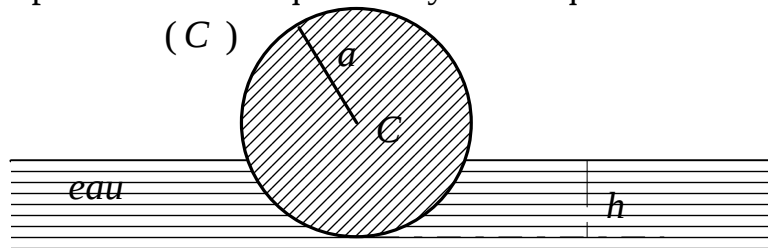
ce qui montre que la situation est critique, le barrage ne tiendra pas.

○ ○ ○

Exercice 3 : Oscillateur à poussée d'Archimède

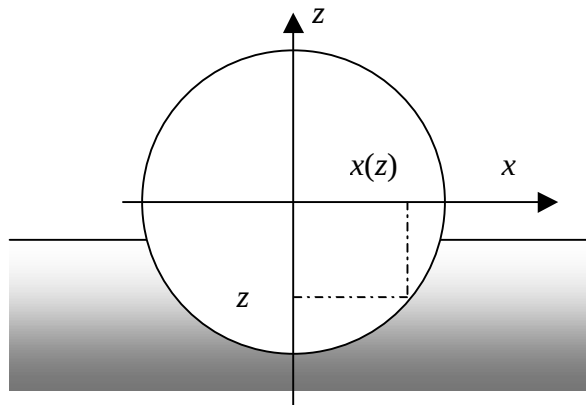
(C) est une sphère solide homogène, de centre C, de rayon a et de densité $d < 1$ relativement à l'eau. On appelle μ la masse volumique de l'eau et g l'accélération de la pesanteur.

Cette sphère est posée à la surface de l'eau où elle flotte ; on admet que l'eau reste en permanence à l'équilibre hydrostatique.



- A l'équilibre, la sphère s'enfonce d'une profondeur h_0 . Exprimer la relation entre h_0 et les autres caractéristiques du problème.
- On suppose que la sphère est initialement enfoncée de h' , avec $h' \neq h_0$. Exprimer le bilan des forces exercées et déterminer la pulsation ω des petites oscillations verticales en fonction de a , d , h_0 et g .

a. On utilise les notations du schéma :



Etant donné qu'on néglige la poussée d'Archimède due à l'air, l'équilibre est réalisé lorsque les forces de pression exercées par l'eau (poussée d'Archimède) équilibrent le poids de la sphère, soit :

$$(m - m_{\text{déplacé}})g = 0 \quad \text{avec} \quad m = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \quad \text{et} \quad m_{\text{déplacé}} = V_{\text{déplacé}} \rho$$

tandis que le volume d'eau déplacé s'écrit au moyen d'une intégrale :

$$V_{\text{déplacé}} = \pi \int_{z=-a}^{z=-a+h_0} x^2(z) dz \quad \text{où} \quad x(z)^2 + z^2 = a^2 \quad \text{donc} \quad V_{\text{déplacé}} = \frac{\pi h_0^2}{3} (3a - h_0)$$

La condition d'équilibre s'écrit finalement : $h_0^2(3a - h_0) = 4da^3$.

b. Hors équilibre, les forces de pesanteur et de poussée ne s'annulent plus. On écrira que leur somme, en projection sur l'axe vertical ascendant, est égale au produit de la masse de la sphère par l'accélération de son centre de gravité :

$$F_z = \frac{\pi \mu g}{3} [h^2(3a - h) - 4da^3] = \frac{4}{3}\pi a^3 \mu d \left(-\frac{d^2 h}{dt^2} \right)$$

puisque l'altitude z du centre de gravité C de la sphère au-dessus du niveau (réputé invariable) du liquide vérifie $z = a - h$.

Après simplification et compte tenu de la condition d'équilibre écrite plus haut, on aura pour équation différentielle du mouvement :

$$4a^3 d\ddot{h} = -g[f(h) - f(h_0)] \quad \text{où} \quad f(h) = h^2(3a - h)$$

Le développement à l'ordre le plus bas de cette relation mène, si h reste voisin de h_0 , à : $f(h) - f(h_0) = f'(h_0)(h - h_0)$ où $f'(h_0) = 3h_0(2a - h_0) > 0$.

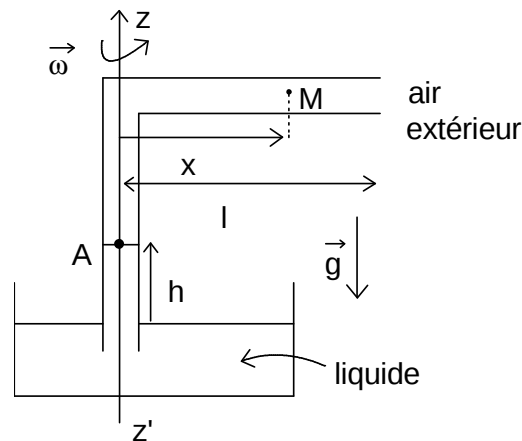
On obtient bien une équation d'oscillateur pour $\varepsilon = h - h_0$ sous la forme :

$$\ddot{\varepsilon} = -\omega^2 \varepsilon \quad \text{où} \quad \omega = \sqrt{\frac{3h_0(2a - h_0)g}{4a^3 d}}$$

○ ○ ○

Exercice 4 : Dépression par rotation

Un tube coudé à angle droit tourne autour d'un axe vertical $z'z$ avec une vitesse angulaire ω constante. L'extrémité du bras vertical plonge dans un liquide de masse volumique ρ_L . L'extrémité du bras horizontal, à la distance l de l'axe de rotation, est à l'air libre à la pression p_0 . La température de l'air extérieur est T_0 . On désigne par p la pression de l'air en un point M situé à la distance x de l'axe de rotation et par ρ la masse volumique de l'air. On supposera que, pour l'air, l'influence de la pesanteur est négligeable.



Lorsque le tube ne tourne pas, $h = 0$. Par contre lorsqu'il tourne à la vitesse angulaire ω , le liquide monte dans le tube et stabilise à une hauteur h une fois le régime permanent atteint.

On donne : $p_0 = 1\text{bar}$, $l = 10\text{cm}$, $\omega = 3000$ tours par minute et $\rho_L = 10^3\text{kg.m}^{-3}$. La masse volumique de l'air extérieur est $\rho_0 = 1\text{kg.m}^{-3}$.

- Ecrire l'équation différentielle à laquelle obéit l'air dans la partie horizontale du tube coudé.
- Pour intégrer cette équation, on se placera dans deux cas de figure : tout d'abord, on fera l'hypothèse que la masse volumique de l'air est constante et égale à celle de l'air extérieur ($\rho = \rho_0$). D'autre part, on fera l'hypothèse que l'air est un gaz parfait dont la température est constante et égale à T_0 dans tout le tube coudé. Dans les deux cas, donner l'expression de la pression de l'air au point M à l'abscisse x .
- Exprimer l'écart de pression entre les deux extrémités de la partie horizontale du tube dans les deux cas précédents. Faire les applications numériques et conclure.
- Calculer la hauteur h qui apparaît dans le cas décrit ici.

a. Il faut se placer dans le référentiel tournant lié au tube ; celui-ci n'est pas galiléen. La loi de la statique des fluides s'écrit alors :

$$\vec{\text{grad}} p = \vec{f}_{\text{volumiques}} + \vec{f}_{\text{inertie d'entraînement}}$$

Les forces volumiques sont ici constituées par le poids :

$$\vec{f}_{\text{volumiques}} = -\rho g \vec{e}_z$$

La force volumique d'inertie d'entraînement est :

$$\vec{f}_{\text{inertie d'entraînement}} = \rho \omega^2 x \vec{e}_x$$

En effet, l'accélération d'entraînement est :

$$\vec{a}_{\text{entraînement}} = -\omega^2 x \vec{e}_x$$

puisque le point coïncidant avec M à la date t et attaché au référentiel a un mouvement circulaire (de rayon x) et uniforme (de vitesse angulaire ω). On néglige l'effet du poids, seule la projection de l'équation selon l'axe Ox importe :

$$\frac{dp}{dx} = \rho \omega^2 x$$

b. Commençons tout d'abord par faire l'hypothèse que $\rho = \rho_0$. Par intégration entre la position x où la pression est p et la position $x = l$ où la pression est p_0 , on trouve :

$$p = p_0 + \frac{\rho_0 \omega^2}{2} (x^2 - l^2)$$

Supposons maintenant que l'air suive la loi des gaz parfaits et que la température soit uniforme à la valeur T_0 . A partir de la loi des gaz parfaits, on arrive à :

$$\rho = \frac{Mp}{RT_0} = \frac{\rho_0}{p_0} p$$

L'équation différentielle devient :

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\rho_0}{p_0} p \omega^2 x$$

En séparant les variables, l'intégration est aisée :

$$p = p_0 \exp\left(\frac{\rho_0 \omega^2}{2 p_0} (x^2 - l^2)\right)$$

On peut constater qu'en effectuant un développement limité au premier ordre de cette dernière formule, on retrouve l'expression de p calculée dans le cadre de l'hypothèse d'une masse volumique constante.

c. Dans le premier cas, on a :

$$\Delta p_1 = p_0 - p(x=0) = \frac{\rho_0 \omega^2}{2} l^2 \cong 5.10^{-3} \text{ bar}$$

La différence de pression n'est que de 5mbar, c'est assez faible. Cela devrait permettre de trouver que les deux calculs sont équivalents.

Dans le cadre de la seconde hypothèse, on trouve :

$$\Delta p_2 = p_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho_0 \omega^2}{2 p_0} l^2\right) \right] \cong 5.10^{-3} \text{ bar}$$

Une diminution de pression de 5mbar peut apparaître très faible devant les 1013mbar de la pression atmosphérique moyenne. N'oublions pas qu'une situation de pression de 970mbar (c'est-à-dire une diminution de pression

de 43mbar) est synonyme d'un violent ouragan avec des vents dépassant 150km.h^{-1} .

d. Pour le liquide contenu dans le réservoir, la loi de la statique des fluides est uniquement importante selon l'axe Oz . On se gardera bien pour un liquide (beaucoup plus dense qu'un gaz) de négliger la pesanteur. L'équation de la statique dans le référentiel du réservoir supposé galiléen est :

$$\overrightarrow{\text{grad}} p_L = \frac{dp_L}{dz} \vec{e}_z = \vec{f}_{\text{volumiques}} = -\rho_L g \vec{e}_z$$

L'intégration de l'équation différentielle doit s'effectuer en supposant que la masse volumique du liquide est constante. C'est logique puisqu'un liquide est très peu compressible. On obtient :

$$p_L = -\rho_L g z + p_0$$

avec $z = 0$ correspondant au niveau supérieur du réservoir en contact avec l'atmosphère. Dans cette démonstration, on a négligé la largeur du tube. On travaille implicitement en $x = 0$. En négligeant l'évolution de la pression de l'air dans la partie verticale du tube coudé, on aura :

$$p_L(A) = p(x = 0)$$

Cette équation conduit à la hauteur h de liquide :

$$h = \frac{p_0}{\rho_L g} \left[1 - \exp\left(-\frac{\rho_0 \omega^2}{2p_0} l^2\right) \right] \cong 5\text{cm}$$

○ ○ ○

Exercice 5 : Dynamique de formation des étoiles

Une étoile est formée d'une certaine masse M_0 de gaz, qui adopte une configuration sphérique du fait de l'interaction gravitationnelle entre les atomes d'hydrogène qui la composent. On négligera tout effet de rotation et on considérera qu'à tout instant cette masse de gaz, disposée dans le vide, est en équilibre hydrostatique. On appellera R le rayon de l'étoile à un instant donné de sa formation. Son rayon actuel sera noté R_0 .

A tout moment de sa formation, les répartitions de masse volumique, de pression et de température dans l'étoile sont à symétrie sphérique.

a. On appelle $\mu(r)$ la masse volumique de l'étoile à la distance r du centre et $M(r)$ la masse de la fraction de l'étoile qui est située à une distance de son centre inférieure ou égale à r . On appelle aussi $p(r)$ la pression qui règne à cette distance r du centre. Relier $\mu(r)$ et $M(r)$. Relier

aussi $M(r)$ et le champ de gravitation $g(r)$ à la distance r du centre et à la constante de Cavendish G .

b. Etablir l'équation d'équilibre hydrostatique du gaz qui forme l'étoile.

c. On considère un mode (fictif) de formation progressive de l'étoile "sur place" : après accumulation de la masse $M(r)$ dans la sphère de centre C et de rayon r , un opérateur amène, de façon quasi-statique, la masse dM depuis l'infini jusqu'à la disposer régulièrement sur une couche sphérique comprise entre les rayons r et $r + dr$. Calculer le travail que l'opérateur doit fournir dans ce but ; commenter son signe.

d. En déduire, sous forme d'une intégrale portant sur la fonction $M(r)$, le travail total nécessaire à la formation de l'étoile. Justifier rapidement qu'on l'appelle W_G , énergie gravitationnelle de l'étoile. Montrer aussi que l'énergie gravitationnelle peut se mettre sous la forme :

$$W_G = -3 \iiint_{\text{étoile}} p d\tau = -3 \int_{r=0}^R p(r) 4\pi r^2 dr$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume de l'étoile.

e. On considère ici que l'étoile est formée d'un gaz parfait monoatomique en équilibre thermique. En déduire l'expression de W_G en fonction de la masse M de l'étoile, de sa température T , de la constante de Boltzmann k_B et de la masse m de l'atome d'hydrogène.

f. On considère ici que la masse volumique de l'étoile est uniforme : $\mu(r) = \text{constante}$. Déterminer l'expression de W_G en fonction de la masse M de l'étoile, de son rayon R et de la constante de Cavendish G . Faire l'application numérique pour le Soleil ($R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^8 \text{ m}$, $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$). g. Lors de la formation du Soleil, on admet que cette masse $M_{\odot}$ s'est régulièrement contractée depuis un nuage initial de très grande dimension jusqu'à son état actuel. Si on considère que l'énergie gravitationnelle ainsi libérée est responsable du rayonnement isotrope du Soleil (le flux rayonné, mesuré sur terre à la distance $a = 1,49 \cdot 10^{11} \text{ m}$ du soleil, vaut $\phi = 1,3 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$), quel est l'âge du Soleil ? Commenter.

a. Compte tenu de la symétrie sphérique, on peut écrire :

$$M(r) = \int_{r'=0}^r \mu(r') 4\pi r'^2 dr' \quad \text{ou encore} \quad \frac{dM}{dr} = \mu(r) 4\pi r^2$$

en dérivant l'intégrale ci-dessus relativement à sa borne supérieure, et bien sûr pour $r < R$. Evidemment pour $r > R$, $M(r) = M$ et $\mu(r) = 0$.

Le champ de gravitation est bien sûr central, à symétrie sphérique ; on le détermine par application du théorème de Gauss de la gravitation à une sphère de rayon r :

$$\vec{g} = -g(r)\vec{u}_r \quad \text{et} \quad \oint_{\text{sphère}} \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi r^2 g(r) = -4\pi G M(r)$$

On en déduit donc :

$$g(r) = \frac{GM(r)}{r^2}$$

b. L'équilibre hydrostatique impose l'annulation des forces de pesanteur et des forces de pression, soit : $\vec{\text{grad}} p = \mu(r)\vec{g}$ d'où $\frac{dp}{dr} = -\frac{\mu(r)GM(r)}{r^2}$.

c. La masse dM , pour subir un déplacement quasi-statique, devra à chaque instant être en équilibre sous l'action des forces de gravitation et des forces exercées par l'opérateur. Le travail que celui-ci fournit est donc l'opposé du travail des forces de gravitation, et s'exprime donc comme la variation de l'énergie potentielle de gravitation :

$$\delta W_{\text{opérateur}} = -\delta W_{\text{gravitation}} = dE_p \Rightarrow \delta W_{\text{opérateur}} = dE_p(r) - dE_p(\infty)$$

On utilisera bien sûr la convention habituelle $dE_p(\infty) = 0$. Enfin, l'énergie potentielle dE_p doit être comprise comme celle acquise par la masse dM se déplaçant dans le champ de la masse $M(r)$ déjà formée, avec donc :

$dE_p(r') = -\frac{GM(r)dM}{r'}$. Finalement, l'opérateur *résiste* en permanence aux forces d'attraction et fournit donc le travail résistant $\delta W_{\text{opérateur}} = -\frac{GM(r)dM}{r} < 0$.

d. Le travail total fourni par l'opérateur s'écrit donc :

$$W_G = W_{\text{opérateur}} = -G \int_{r=0}^R \frac{M(r)dM}{r}$$

Si l'étoile devait être à nouveau dispersée jusqu'à l'infini, il faudrait lui fournir l'énergie opposée $-W_G$; ainsi, W_G peut être considérée comme une mesure de l'énergie de liaison gravitationnelle de l'étoile, ce qui justifie l'appellation proposée. D'autre part, on peut encore écrire : $dM = \mu(r) 4\pi r^2 dr$ donc $W_G = -4\pi G \int_{r=0}^R M(r)\mu(r)rdr$ ou, compte tenu de l'équation fondamentale hydrostatique, $W_G = 4\pi \int_{r=0}^R r^3 dp$. Le calcul s'effectue au moyen d'une intégration par parties :

$$W_G = 4\pi \left[r^3 p(r) \right]_{r=0}^R - 3 \int_{r=0}^R 4\pi r^2 p(r) dr$$

mais $p(r=R) = 0$ et on en déduit la relation proposée par l'énoncé.

e. Pour un gaz parfait monoatomique en équilibre thermique, l'équation d'état de l'élément de volume $d\tau$ s'écrit $p d\tau = dN k_B T$ si dN est le nombre d'atomes d'hydrogène dans cet élément de volume. On en déduit donc :

$$W_G = -3k_B T \iiint_{\text{étoile}} dN = -3Nk_B T = -3 \frac{M}{m} k_B T$$

f. Reprenant l'expression $W_G = -4\pi G \int_{r=0}^R M(r) \mu r dr$ avec $M(r) = \frac{4}{3} \pi \mu r^3$

on obtient $W_G = -\frac{16}{15} \pi^2 \mu^2 G R^5 = -\frac{3GM^2}{5R}$. Numériquement, $W_G = -2,3 \cdot 10^{41} \text{ J}$.

g. Le flux mesuré au niveau de la terre se répartit sur toute une sphère de rayon a ; le Soleil rayonne donc actuellement $\Phi = 4\pi a^2 \phi = 3,6 \cdot 10^{26} \text{ W}$.

Si ce flux a été maintenu constant pendant toute la phase de contraction de la nébuleuse solaire, l'âge du Soleil est $\tau = \frac{-W_G}{\Phi}$ soit 20 millions d'années

environ. L'âge du soleil est en fait bien plus grand, car l'énergie totale dégagée par le Soleil a aussi une origine thermonucléaire, et il faudrait ci-dessus remplacer $-W_G$ par $-W_G - W_{\text{thermonucléaire}} \gg -W_G$.

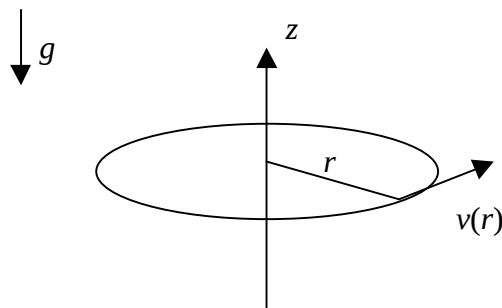
○ ○ ○

Exercice 6 : Surface libre d'un tourbillon

On considère un fluide incompressible, de masse volumique μ , soumis à l'accélération de la pesanteur g .

a. Le fluide est mis en rotation autour de l'axe vertical ascendant Oz à la vitesse angulaire constante ω . Etablir l'expression de l'équation fondamentale de l'équilibre hydrostatique, dans le référentiel tournant à la vitesse angulaire ω .

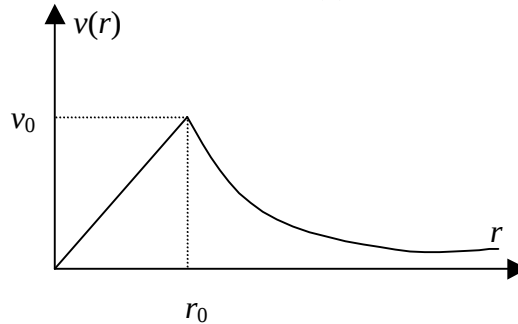
Dans le référentiel galiléen, exprimer $\mu \vec{a}$, où $\vec{a}$ désigne l'accélération du fluide ; commenter.



b. Le fluide est maintenant en rotation à la vitesse $v(r)$, orthoradiale, dépendant de la distance r à l'axe de rotation. En généralisant l'expression établie en a., montrer que la pression p dans le fluide dépend de r et de z selon la relation :

$$\vec{\text{grad}} p = \mu \left(\vec{g} + \frac{v(r)^2}{r} \vec{u}_r \right)$$

c. Dans un tourbillon, la vitesse de rotation est nulle à grande distance du tourbillon, et nulle sur l'axe de celui-ci ("l'oeil du cyclone") ; un bon modèle de comportement de la fonction $v(r)$ est alors :



$$r < r_0 \Rightarrow v(r) = v_0 \frac{r}{r_0}$$

$$r \geq r_0 \Rightarrow v(r) = v_0 \frac{r_0}{r}$$

Déterminer la pression $p(r, z)$ dans le fluide.

d. Le fluide est de l'eau (surface de l'océan dans un tourbillon). Déterminer l'équation de la surface libre du fluide (on notera p_0 la pression de l'atmosphère au-dessus du fluide), et la profondeur du creux causé par le tourbillon.

Application numérique : $v_0 = 5 \text{ m.s}^{-1}$.

e. Le fluide est de l'air (atmosphère dans un cyclone). Déterminer la dépression au centre du cyclone (différence entre la pression au centre et la pression à grande distance).

Application numérique : $v_0 = 40 \text{ m.s}^{-1}$, $\mu_0 = 1,1 \text{ kg.m}^{-3}$. Commenter la valeur de la dépression, et l'hypothèse "fluide incompressible".

a. Le fluide étudié est en équilibre sous l'action des forces de pesanteur, de pression, et des forces d'inertie d'entraînement :

$$\vec{\text{grad}} p = \mu (\vec{g} - \vec{a}_{\text{entraînement}})$$

soit, dans le cas d'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical Oz à la vitesse angulaire ω :

$$\vec{\text{grad}} p = \mu (\vec{g} - [-\omega^2 r \vec{u}_r])$$

L'accélération d'une particule de fluide dans le référentiel galiléen vaut alors :

$$\vec{a} = -\omega^2 r \vec{u}_r \text{ donc } \mu \vec{a} = \mu \vec{g} - \vec{\text{grad}} p$$

Cette équation s'identifie donc comme une expression, adaptée à la mécanique des fluides, du *principe fondamental de la dynamique*, pour un volume unité de fluide, soumis aux forces de pesanteur et aux forces de pression ; celles-ci sont représentées par la *densité volumique de forces de pression* :

$$\frac{d\vec{F}_{\text{pression}}}{d\tau} = -\vec{\text{grad}} p$$

b. Le mouvement étudié est caractérisé (mouvement circulaire uniforme) par une accélération constante, dirigée vers le centre de la trajectoire, de norme v^2/r , d'où l'expression :

$$\vec{\text{grad}} p = \mu \left(-g \vec{u}_z + \frac{v(r)^2}{r} \vec{u}_r \right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g \\ \frac{\partial p}{\partial r} = \mu \frac{v(r)^2}{r} \end{cases}$$

c. Pour $r > r_0$, l'intégration des équations ci-dessus fournit :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \frac{v_0^2 r_0^2}{r^3} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\mu g \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(r, z) = \text{cte} - \mu g z - \mu v_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2}$$

tandis que pour $r < r_0$, on obtient :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} &= \mu \frac{v_0^2 r}{r_0^2} \\ \frac{\partial p}{\partial z} &= -\mu g \end{aligned} \right\} \Rightarrow p(r, z) = \text{cte}' - \mu g z + \mu v_0^2 \frac{r^2}{2r_0^2}$$

La continuité de la pression en $r = r_0$ impose enfin :

$$\text{cte}' = \text{cte} - \mu v_0^2$$

d. La surface libre du fluide a pour équation $p = p_0$; en choisissant pour niveau $z = 0$ celui de cette même surface à très grande distance du tourbillon, il vient :

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow p_0 = \text{cte}$$

d'où l'équation de la surface libre du liquide :

$$r > r_0 \Rightarrow gz = -v_0^2 \frac{r_0^2}{2r^2} \quad r < r_0 \Rightarrow gz = v_0^2 \left(\frac{r^2}{2r_0^2} - 1 \right)$$

En particulier, au centre du cyclone, on obtient :

$$z(r=0) = -\frac{v_0^2}{g} = -2,55\text{m}$$

Pour commenter l'ordre de grandeur significatif de cette profondeur, on remarquera que la vitesse nécessaire pour l'atteindre reste modeste ; 5m.s^{-1} correspond à 18km/h .

e. Cette fois-ci, on calcule $\Delta p = p(r=0, z=0) - p(r \rightarrow \infty, z=0)$, à savoir $\Delta p = -\mu_0 v_0^2 = -2,1\text{kPa}$. Un tel écart peut sembler très faible, mais il correspond à une "force différentielle" de l'ordre du poids de 200kg par mètre carré, suffisante pour soulever une toiture par exemple. La vitesse évoquée ici (40m.s^{-1} ou 144km/h) est atteinte régulièrement dans les régions tropicales ou en bordure d'océan.

Notons qu'on a supposé que $\mu = \text{cte} = \mu_0$; ceci se justifie *a posteriori* compte tenu de l'expression de la compressibilité des gaz parfaits :

$$\chi_T = \frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial \mu}{\partial p} \right)_T = \frac{1}{p} \quad \text{donc} \quad \frac{\Delta \mu}{\mu} \approx \frac{\Delta p}{p} = 2,1 \cdot 10^{-2} \ll 1$$

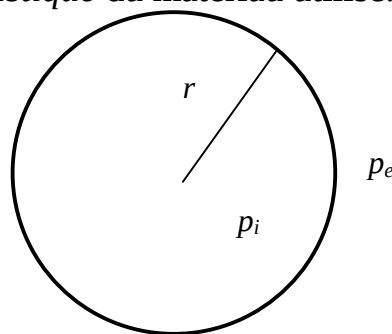
Pour remettre en cause cette approximation, il faudrait une vitesse bien plus élevée ; de façon assez générale, on peut montrer qu'un gaz peut être considéré comme presque incompressible tant que sa vitesse n'atteint pas celle du son dans le même gaz (dans l'air, elle vaut environ 300m.s^{-1} , ce qui mènerait à une dépression relative $\Delta p/p$ de l'ordre de 1, certes plus négligeable).

○ ○ ○

Exercice 7 : Ascension d'un aérostat

Un ballon atmosphérique (aérostat) est constitué d'une enveloppe souple, constituée d'un matériau élastique.

Pour réaliser une augmentation dS de sa surface, un élément de ce matériau élastique doit recevoir un travail $\delta W = A dS$, où A porte le nom de *constante de tension élastique* du matériau utilisé.



a. On considère un ballon sphérique, de rayon r , constitué de ce matériau élastique. On note p_i et p_e la pression du gaz respectivement à l'intérieur et à l'extérieur du ballon. Relier A , r , p_i et p_e .

Dans toute la suite, on considérera que le volume du ballon est assez grand pour pouvoir toujours négliger l'écart entre pression intérieure et pression extérieure : le ballon est en permanence en équilibre mécanique.

Cependant, le ballon présente un volume maximal $V_{\max}$ au-delà duquel il cesse d'être élastique ; pour éviter sa rupture s'ouvre alors une soupape qui permet la fuite du gaz.

Afin d'assurer l'élévation de l'aérostat, le ballon est rempli d'un gaz parfait de densité $d < 1$ relativement à l'air, considéré également comme un gaz parfait. Lors de la montée du ballon dans l'atmosphère, la pression p et la masse volumique μ de l'air varient selon la *loi polytropique* $p/\mu^q = \text{cte}$, où $q = 1,2$ est une constante. Au niveau du sol, on notera $p = p_0$ et $\mu = \mu_0$.

On note m la masse du gaz contenu dans le ballon, et m' la masse totale de l'ensemble enveloppe + nacelle.

A tout instant, l'air extérieur et le gaz du ballon sont en équilibre thermique.

De plus, l'air atmosphérique est en équilibre hydrostatique.

b. A quelle condition le ballon monte-t-il ? Quelle est l'altitude maximale z_1 atteinte sans perte de gaz ?

Application numérique : le gaz est de l'hélium **He**, de masse molaire $M = 4\text{g.mol}^{-1}$. Au sol, où $p_0 = 1\text{bar}$, $T_0 = 300\text{K}$, le volume du ballon est $V_0 = 100\text{m}^3$. Quelle est la masse maximale m' compatible avec le décollage du ballon ?

On donne $V_{\max} = 150\text{m}^3$. Calculer z_1 .

c. Quelle est l'altitude maximale atteinte z_2 , après ouverture de la soupape et en tenant compte de possibles pertes de gaz ?

Application numérique : on donne $m' = 10\text{kg}$; calculer z_2 .

a. Le travail reçu par l'enveloppe élastique ne peut être fourni que par les forces de pression exercées par les gaz intérieur et extérieur ; lors d'une augmentation dr du rayon de l'enveloppe, le gaz intérieur fournit le travail

moteur $\delta W_i = + \left| p_i d \left(\frac{4}{3} \pi r^3 \right) \right| = 4\pi r^2 p_i dr$ et le gaz extérieur le travail

résistant $\delta W_e = -4\pi r^2 p_e dr$. Le bilan algébrique de ces deux travaux s'écrit :

$$\delta W = 4\pi r^2 (p_i - p_e) dr = Ad(4\pi r^2) = 8\pi A r dr$$

d'où la relation demandée :

$$p_i - p_e = \frac{2A}{r}$$

Bien sûr, si r est assez élevé, p_i et p_e peuvent être confondus.

b. Rappelons d'abord que la densité d'un gaz par rapport à l'air est le rapport μ'/μ et, dans l'approximation des gaz parfaits :

$$pM = \mu RT \text{ et } pM' = \mu' RT \text{ donc } d = \frac{\mu'}{\mu} = \frac{M'}{M}$$

La densité d du gaz contenu dans le ballon est donc une constante tout au long de la montée de l'aérostat.

Si on note V le volume du ballon à un instant donné, la poussée d'Archimède a pour norme $\pi = \mu g V$ (on note μ la masse volumique de l'air) ; elle doit compenser le poids total du gaz et des structures du ballon, soit enfin :

$$\pi > \mu g d V + m' g$$

On obtient donc la condition demandée, en notant $m = \mu V$:

$$m' < m(1 - d)$$

Par la suite, lors de la montée de l'aérostat, la pression atmosphérique diminue (puisque $dp/dz = -\mu g < 0$) et donc la masse volumique de l'air diminue (puisque $p/\mu^q = \text{cte}$), ainsi que la poussée d'Archimède. La masse m de gaz étant constante (avant l'ouverture de la soupape), le ballon doit se dilater pour que $m = \mu d V$ reste constant.

Lorsque V atteint sa valeur maximale, la hauteur z_1 atteinte correspond à la conservation de la masse de gaz initiale :

$$\mu(z_1) V_{\max} = m$$

Il reste à déterminer la fonction $\mu(z)$, au moyen des relations polytropique et hydrostatique :

$$\frac{dp}{dz} = -\mu g \text{ et } \frac{p}{\mu^q} = \frac{p_0}{\mu_0^q} \text{ donc } \mu^{q-2} d\mu = -\frac{g}{qp_0} \mu_0^q dz$$

L'intégration de cette équation fournit successivement :

$$\mu(z) = \mu_0 \left[1 - \frac{q-1}{q} \frac{\mu_0 g z}{p_0} \right]^{\frac{1}{q-1}} \text{ donc } z_1 = \frac{q}{q-1} \frac{p_0}{\mu_0 g} \left[1 - \left(\frac{m}{\mu_0 V_{\max}} \right)^{q-1} \right]$$

Commençons par déterminer $\mu_0 = \frac{p_0 M}{RT_0} = 0,16 \text{ kg.m}^{-3}$ (par application de la

loi des gaz parfaits, avec $M = 4 \text{ g.mol}^{-1}$). On en déduit $m = \mu_0 V_0 = 16 \text{ kg}$ donc $m' < m(1 - 0,14) = 13,8 \text{ kg}$. On trouve numériquement $z_1 = 29,8 \text{ km}$.

c. A partir du moment où l'altitude z_1 est dépassée, le volume de l'aérostat reste constant et la masse de gaz décroît du fait de l'ouverture de la soupape. La poussée d'Archimède $\mu g V_{\max}$ décroît au fur et à mesure de

la montée et, donc, de la diminution de μ . L'altitude maximale z_2 atteinte correspond à l'équilibre de cette poussée et du poids de la charge transportée :

$$\mu(z_2) V_{\max} (1 - d) = m'$$

d'où, comme ci-dessus, la relation :

$$z_2 = \frac{q}{q-1} \frac{p_0}{\mu_0 g} \left[1 - \left(\frac{m'}{\mu_0 V_{\max} (1-d)} \right)^{q-1} \right]$$

On remarque que $m' < m (1 - d)$, donc que $z_2 > z_1$.

Numériquement, $z_2 = 51,6\text{km}$.

