

CHAPITRE 12

RAYONNEMENT THERMIQUE

12.1. RAYONNEMENT ET MILIEUX MATERIELS

12.1.1. Définitions

Nous avons vu au paragraphe 10.2 que des particules chargées rayonnaient une onde électromagnétique ; le calcul de :

$$\oiint_S \mathbf{J}_{\text{ray}} \cdot d\mathbf{S}$$

sur une surface sphérique a donné un résultat fixé quelle que soit la valeur du rayon r de la sphère. Si on compare pour deux valeurs de r la puissance moyenne totale rayonnée, on trouvera la même valeur. Cela nous amène à dire que le vide est un *milieu totalement transparent*. Assez souvent, un milieu gazeux peu dense, traversé sur une faible épaisseur, pourra être considéré comme totalement transparent. C'est en particulier le cas de l'air. Cette proposition amène quelques réserves puisque l'atmosphère n'est pas un milieu totalement transparent, il y a *absorption* d'une partie du rayonnement solaire. On peut en citer quelques conséquences. L'atmosphère absorbe une grande partie des UV solaires incidents qui nous seraient particulièrement nuisibles. Cela est dû principalement à l'ozone O_3 qu'elle renferme. Dans le domaine visible, on peut apprécier l'influence de l'épaisseur d'atmosphère traversée en comparant la couleur jaune du soleil lorsqu'il est au zénith et sa couleur rouge lorsqu'il se lève ou bien se couche. Cette observation met en évidence l'absorption du bleu par l'atmosphère. Lorsque le soleil est au zénith, l'épaisseur traversée est plus faible que lorsqu'il se couche par exemple. Cette différence suffit pour que les effets de l'absorption soient tout à fait manifestes. Malgré ce que nous venons de dire, nous considérerons assez souvent l'atmosphère comme un milieu transparent pour simplifier. L'atmosphère joue aussi le rôle de réflecteur du rayonnement solaire, en renvoyant dans l'espace environ 30% de la puissance incidente. Lorsque nous serons confrontés à un problème de rayonnement, il faudra aussi songer à la *réflexion*.

Lorsque nous considérerons un milieu gazeux peu dense comme totalement transparent, cela signifiera a priori que ceci est valable quelle

que soit la longueur d'onde λ du rayonnement envisagé. En réalité, en fonction de la nature des molécules constituant le gaz, celui-ci pourra être totalement transparent dans des domaines de longueur d'onde définis par des intervalles du type $[\lambda_1, \lambda_2]$. Ils seront appelés *fenêtres de transmission*. Le gaz absorbera dans les autres domaines de longueur d'onde. La notion de fenêtre de transmission que nous venons d'aborder dans le cas des gaz concerne aussi les liquides et les solides.

La plupart des situations que nous étudierons seront du type air (ou fluide) - solide (ou milieu condensé). A la surface de séparation de ces deux milieux, le comportement du rayonnement sera fortement dépendant de leur indice de réfraction dont nous allons rappeler la définition :

$$n = \frac{c}{v_{\text{phase}}} = \frac{c}{v_{\phi}}$$

où v_{ϕ} est la vitesse de phase de l'onde électromagnétique dans le milieu. Si on prend le cas d'une séparation vide (ou air) - verre, on a :

$$n_{\text{air}} \cong n_{\text{vide}} = 1 \quad \text{et} \quad n_{\text{verre}} \cong 1,5$$

L'Electromagnétisme dans les milieux matériels, qui relève du seul programme de la filière PC, montre que si l'on note $P_{\text{incidente}}$ la puissance incidente de l'onde alors, en incidence normale :

$$P_{\text{réfléchié}} = \left(\frac{n_{\text{verre}} - 1}{n_{\text{verre}} + 1} \right)^2 P_{\text{incidente}}$$

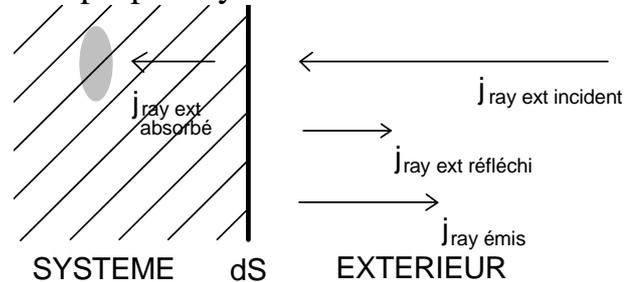
La puissance transmise est donc logiquement :

$$P_{\text{transmise}} = P_{\text{incidente}} - P_{\text{réfléchié}} = \frac{4n_{\text{verre}}}{(n_{\text{verre}} + 1)^2} P_{\text{incidente}}$$

Lorsqu'un rayonnement arrive sur une plaque de verre, environ 4% de l'énergie est réfléchié et 96% de l'énergie est transmise. La puissance transmise dans le verre sera plus ou moins absorbée en fonction de l'épaisseur du verre et de la longueur d'onde incidente. Nous avons pour le verre une *fenêtre de transmission* dans le visible et par contre une absorption quasi-totale entre $4\mu\text{m}$ et $30\mu\text{m}$. Lorsqu'un milieu ne transmet aucune fraction du rayonnement qu'il reçoit, on le qualifie d'*opaque*. Ce qualificatif convient au verre mais pour $\lambda \in [4\mu\text{m}, 30\mu\text{m}]$.

12.1.2. Corps noir, corps gris

Reprenons l'étude faite dans le paragraphe 10.4.5 en considérant un système qui reçoit un rayonnement incident. Il en réfléchit une partie, absorbe l'autre (il n'y a donc pas de transmission vers un autre système) et émet lui-même son propre rayonnement.



On a nécessairement $j_{\text{ray ext incident}} = j_{\text{ray ext absorbé}} + j_{\text{ray ext réfléchi}}$ et, comme nous l'avons vu, le bilan énergétique global évalué du point de vue du système est $j_{\text{ray global}} = j_{\text{ray ext absorbé}} - j_{\text{ray émis}}$.

Nous avons vu qu'il y avait *équilibre radiatif* lorsque $j_{\text{ray global}} = 0$, cela nous amène à définir un *corps noir* :

Un corps noir est un système qui, à l'équilibre, absorbe totalement tout rayonnement incident et émet donc la même puissance que celle qu'il reçoit. ✓

Cette propriété doit être comprise comme valable à la fois globalement sur l'ensemble du spectre de longueur d'onde λ , mais aussi sur chaque intervalle infinitésimal de longueur d'onde $d\lambda$. On peut écrire en puissance surfacique ou bien en puissance comme ci-dessous :

$$P_{\text{incidente}, \forall \lambda} = P_{\text{absorbée}, \forall \lambda} = P_{\text{émise}, \forall \lambda}$$

ou bien

$$j_{\text{incident}, \forall \lambda} = j_{\text{absorbé}, \forall \lambda} = j_{\text{émis}, \forall \lambda}$$

On appelle *corps gris* un système qui, lorsqu'il est à l'équilibre à la température T , n'émet qu'une fraction ε ($0 < \varepsilon < 1$) du rayonnement qu'émettrait un *corps noir* dans le même état d'équilibre - c'est-à-dire à la température T :

$$j_{\text{ray émis corps gris}} = \varepsilon j_{\text{ray émis corps noir}}$$

12.2. LOI DE PLANCK

12.2.1. Densité spectrale d'énergie du rayonnement

L'étude du rayonnement émis par une source quelconque se fait en termes de *densité spectrale*, c'est-à-dire en cherchant la répartition de la *densité volumique d'énergie rayonnée* $u(\nu)$ en fonction de la fréquence ν du rayonnement ; on écrira :



$$u_\nu(\nu) = \frac{du}{d\nu}$$

où du désigne la densité volumique d'énergie pour les radiations dont la fréquence est contenue dans l'intervalle $[\nu ; \nu + d\nu]$. Puisque $u(\nu)$ se mesure en $\text{J}\cdot\text{m}^{-3}$, $u_\nu(\nu)$ se mesure en $\text{J}\cdot\text{s}\cdot\text{m}^{-3}$; c'est aussi l'unité de la constante de Planck¹ h divisée par un volume.

On utilise aussi la représentation en longueur d'onde², avec :

$$\lambda = \frac{c}{\nu} \Rightarrow |d\lambda| = \frac{c}{\nu^2} |d\nu| = \frac{\lambda^2}{c} |d\nu|$$

où c est la célérité de la lumière dans le vide, ce qui permet encore d'écrire :



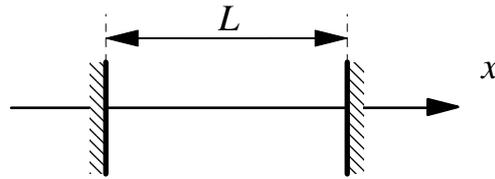
$$du = u_\nu(\nu)d\nu = u_\lambda(\lambda)d\lambda \quad \text{où} \quad u_\lambda(\lambda) = \frac{c}{\lambda^2} u_\nu\left(\frac{c}{\lambda}\right)$$

12.2.2. Aspect historique : densité spectrale de modes du rayonnement

Considérons le cas d'une onde électromagnétique plane progressive, se propageant dans la cavité vide délimitée par deux miroirs parfaitement réfléchissants, parallèles, disposés face à face à la distance L :

¹ Le physicien allemand **Max Planck** (1858-1947) est l'auteur de travaux fondateurs en Physique théorique. On lui doit notamment la première formulation théorique de la *loi du rayonnement thermique*, telle qu'elle sera établie en 12.2.4 (mais le principe des raisonnements initiaux de Planck était tout différent ; il est proposé en lecture à la fin de 12.2.4). Rappelons seulement ce qui a été dit en première année : lors de l'excitation ou de la désexcitation d'un atome *isolé*, celui-ci absorbe ou émet un rayonnement électromagnétique constitué de particules appelées *photons*, d'énergie $\varepsilon = h\nu$ et d'impulsion $p = h/\lambda$, si ν et λ désignent la fréquence et la longueur d'onde du rayonnement.

² Dans cette expression comme toujours en Optique, λ désigne la *longueur d'onde dans le vide* du rayonnement étudié, même s'il se propage dans un milieu différent du vide.



L'onde ne peut exister de manière *permanente* entre ces miroirs que si elle est *stationnaire*. Considérant par exemple un champ électrique :

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{0i} \exp[i(\omega t - kx)]$$

pour l'onde « incidente » (se propageant de gauche à droite), et :

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \exp[i(\omega t + kx)]$$

pour l'onde réfléchie, les relations de passage électromagnétiques imposent l'annulation du champ électrique tangentielle sur les deux miroirs :

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow \vec{E}_{0r} + \vec{E}_{0i} = \vec{0} \\ x = L \Rightarrow \vec{E}_{0r} e^{ikL} + \vec{E}_{0i} e^{-ikL} = \vec{0} \end{cases}$$

d'où on déduit immédiatement :

$$\sin kL = 0 \Rightarrow kL = \frac{2\pi}{\lambda} L = p\pi \quad \text{où } p \in \mathbb{Z}^+$$

On peut bien sûr reconnaître dans cette expression la forme classique $2L = p\lambda$ (un aller et retour de l'onde correspond à un nombre entier de longueurs d'onde) ; cependant, c'est en fonction du vecteur d'onde k que cette relation nous servira.

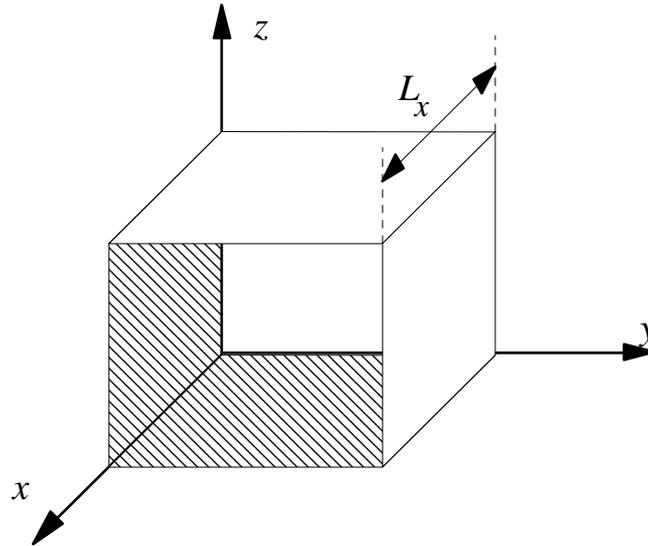
Finalement, la *fréquence* de l'onde stationnaire est contrainte à vérifier simultanément la condition de stationnarité et la relation de dispersion du vide, soit :

$$k = p \frac{\pi}{L} \vec{u}_x \quad \text{et} \quad 2\pi\nu = c \|\vec{k}\| \quad \text{donc} \quad \nu = p \frac{c}{2L}$$

Dans le cas d'une onde enfermée dans une cavité *parallélépipédique* (cf. figure page suivante, ou quatre faces seulement sont représentées) de dimensions L_x , L_y et L_z , la condition de stationnarité se traduira par *trois* conditions aux limites, du même type.

On écrira donc pour une superposition d'ondes incidentes et réfléchies sur les plans $x = 0$ et $x = L_x$:

$$a_1 e^{i(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z)} + a_2 e^{i(\omega t + k_x x - k_y y - k_z z)} = 0$$



Les conditions aux limites imposent les relations :

$$x = 0 \rightarrow a_1 + a_2 = 0 \quad \text{et} \quad x = L_x \rightarrow e^{-ik_x L_x} - e^{+ik_x L_x} = 0$$

soit enfin, en procédant de même sur les deux autres axes :

$$\vec{\rho} = p \frac{\pi}{L_x} \vec{u}_x + q \frac{\pi}{L_y} \vec{u}_y + r \frac{\pi}{L_z} \vec{u}_z \quad \text{et} \quad 2\pi\nu = c \|\vec{k}\|$$

où p, q, r sont trois entiers.

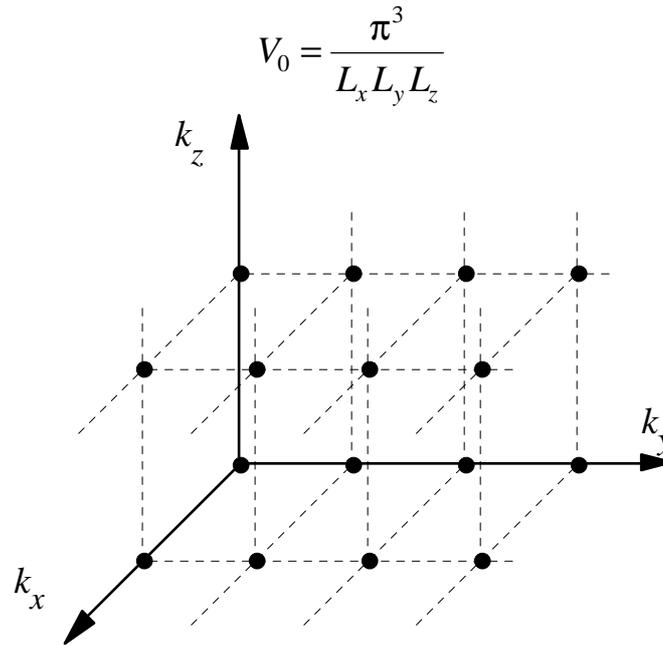
Supposons alors fixée la fréquence ν de l'onde, à $d\nu$ près ; seules sont possibles les valeurs des entiers (p, q, r) vérifiant :

$$\frac{c}{2\pi} \|\vec{\rho}\| = \frac{c}{2} \sqrt{\frac{p^2}{L_x^2} + \frac{q^2}{L_y^2} + \frac{r^2}{L_z^2}} \in [\nu; \nu + d\nu]$$

Le nombre de modes possibles est le nombre de triplets (p, q, r) vérifiant cette condition, ce qui revient à imposer au vecteur d'onde d'avoir son extrémité sur une sphère donnée, de norme k , à dk près.

La relation exprimant ce vecteur d'onde en fonction de p, q, r place l'extrémité du vecteur d'onde sur un *noeud d'un réseau* (cf. schéma ci-après), et il suffit donc d'évaluer le nombre de modes du réseau compris entre les sphères de rayon $2\pi\nu/c$ et $2\pi(\nu + d\nu)/c$.

Considérant essentiellement des valeurs de p, q, r élevées, on évaluera de façon approchée ce nombre de modes en affirmant qu'un mode occupe, en moyenne, un volume V_0 , où V_0 est le volume d'une maille élémentaire du réseau représenté ci-après :



Si le nombre de modes dn_m est assez grand devant 1, il vaut approximativement :

$$dn_m = \frac{4\pi k^2 dk}{V_0} = \frac{32\pi^4 v^2 dv}{c^3 V_0}$$

En fait, les nombres p, q, r doivent être choisis *positifs* pour ne compter que des modes *indépendants* (changer le signe de p par exemple revient à changer le sens arbitraire de l'axe Ox). On devra donc diviser le nombre trouvé par 8 pour ne compter que des *huitièmes de sphère*.

D'autre part, chaque valeur de (p, q, r) correspond à *deux modes* indépendants, pour les deux polarisations orthogonales possibles du champ électrique dans le plan orthogonal au vecteur d'onde. Il restera donc :

$$dn_m = \frac{2}{8} \frac{32\pi L_x L_y L_z v^2 dv}{c^3} \Rightarrow \frac{1}{V} \frac{dn_m}{dv} = 8 \frac{\pi v^2}{c^3}$$

si V est le volume de la cavité. On peut montrer que ce résultat est indépendant de la forme de la cavité.

Vers 1900, les physiciens anglais **John Rayleigh** (1842-1919) et **James Jeans** (1877-1946) proposent d'attribuer, selon le *principe d'équipartition de l'énergie*, l'énergie $k_B T$ à chaque degré de liberté du champ³.

³ Comme on a attribué à chaque degré de liberté mécanique d'une molécule de gaz parfait l'énergie $\frac{1}{2} k_B T$ dans le modèle du gaz parfait monoatomique. Le facteur $\frac{1}{2}$ pro-

Ceci suppose la cavité en équilibre thermique avec le rayonnement, leur température commune étant appelée T .

Ils obtiennent ainsi une première expression théorique de la densité volumique d'énergie électromagnétique du rayonnement thermique, appelée *loi de Rayleigh-Jeans* :



$$u_{\nu}(\nu) \Big|_{\text{Rayleigh-Jeans}} = \frac{du}{d\nu} \Big|_{\text{Rayleigh-Jeans}} = k_B T \frac{1}{V} \frac{dn_m}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}$$

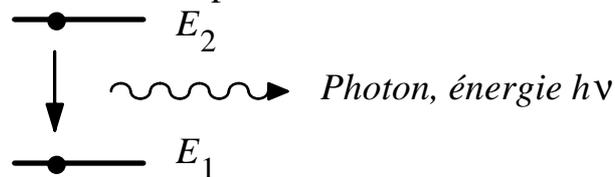
La loi de Rayleigh-Jeans rend bien compte du comportement des émetteurs thermiques réels⁴ aux basses fréquences. Par contre, elle prévoit le résultat peu physique connu sous le nom de *catastrophe ultraviolette* :

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{du}{d\nu} \Big|_{\text{Rayleigh-Jeans}} = +\infty$$

qui n'est bien sûr pas conforme à l'expérience.

12.2.3. Coefficients d'Einstein

Considérons un atome, susceptible de passer d'un état excité d'énergie E_2 à son état fondamental d'énergie E_1 en émettant un photon ; il s'agit du processus d'*émission spontanée* par désexcitation radiative, qu'on peut figurer sur le schéma ci-après :



avec la relation de conservation de l'énergie⁵ : $h\nu = E_2 - E_1$.

L'étude temporelle de ce type de transition montre que, dans une population de N_2 atomes identiques de niveau E_2 , le nombre de transitions radiatives de ce type par unité de temps s'écrit :

vient du caractère classique de l'énergie cinétique des gaz, au contraire du caractère relativiste de l'énergie des photons du rayonnement.

⁴ La théorie développée ci-dessus, comme celle que nous présenterons plus loin menant à la loi de Planck, concerne des *cavités* en équilibre avec le rayonnement. Le lien avec les émetteurs thermiques réels est présenté en 12.2.6.

⁵ Dans cette relation, on néglige l'*énergie cinétique de recul* de l'atome.

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{émission spontanée}} = A_{2 \rightarrow 1} N_2 dt$$

où le terme $A_{2 \rightarrow 1}$ porte le nom de *coefficient d'Einstein*⁶ pour l'émission spontanée⁷. On peut noter que $A_{2 \rightarrow 1}$ s'exprime en s^{-1} .

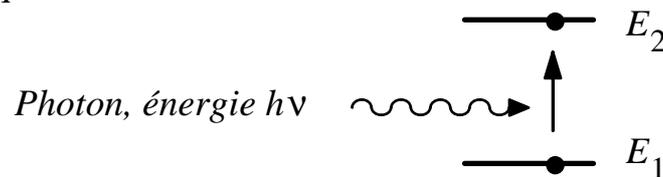
On peut aussi interpréter $A_{2 \rightarrow 1}$ comme une *probabilité de transition spontanée* par unité de temps, reconnaissant dans l'expression :

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{émission spontanée}} = -A_{2 \rightarrow 1} N_2$$

une *loi cinétique du premier ordre* avec la constante de vitesse $A_{2 \rightarrow 1}$; on peut aussi ici observer un comportement analogue à celui des *désintégrations radioactives*. Le signe - rend compte de la diminution de population du niveau 2, au fur et à mesure de l'émission.

Les transitions radiatives vont donc progressivement dépeupler le niveau 2, à moins qu'un processus d'*excitation* ne réalise un *repeuplement* du niveau excité. Il existe de nombreux processus d'excitation (électriques, thermiques...) mais nous ne considérerons ici que le seul qui est toujours présent : les transitions radiatives par *absorption de photons*.

Les photons qui ont précisément la fréquence ν correspondant à la transition $E_1 \rightarrow E_2$ (par exemple ceux qui proviennent de la désexcitation d'un autre atome, mais cette condition n'est bien sûr pas nécessaire) peuvent provoquer la transition *vers le niveau excité* :



et l'excitation aura lieu, dans une population suffisante, selon l'influence conjuguée du *nombre d'atomes* N_1 dans l'état E_1 et du *nombre de photons* incidents dans le milieu ; on propose ainsi une loi de type *cinétique du second ordre*, pour l'interaction du rayonnement et des atomes d'énergie E_1 :

$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{absorption}} = +B_{1 \rightarrow 2} u_\nu(\nu) N_1$$

⁶ Ce modèle d'étude des transitions radiatives a été proposé par **Albert Einstein** (1879-1955) dès 1917.

⁷ En réalité, on devrait écrire cette expression sous la forme $dN_2 = -g_2 N_2 A_{1 \rightarrow 2} dt$, où g_2 est la *dégénérescence* du niveau d'énergie E_2 , c'est-à-dire le *nombre d'états* (fonctions d'onde) indépendants de même énergie.

où le terme $B_{1\rightarrow 2}$ porte le nom de *coefficient d'Einstein* pour l'*absorption induite* par la présence du rayonnement⁸. Dans cette relation, l'influence du *nombre de photons* est traduite par le terme $u_\nu(\nu)$ qui lui est proportionnel.

Einstein proposa, pour rendre compte de divers phénomènes (comme justement la loi du rayonnement thermique) un *troisième type d'interaction* entre les atomes et le rayonnement, l'*émission induite*. Elle se produit, en plus de l'émission spontanée, lorsque un rayonnement électromagnétique suffisamment intense rencontre une population atomique au niveau excité E_2 :

✓
$$\left. \frac{dN_2}{dt} \right|_{\text{émission induite}} = -B_{2\rightarrow 1} u_\nu(\nu) N_2$$

Dans la plupart des situations physiques⁹, le terme d'émission induite est négligeable (devant le terme d'absorption) car $N_2 \ll N_1$ (en admettant provisoirement que $B_{1\rightarrow 2}$ et $B_{2\rightarrow 1}$ soient du même ordre, comme on le montrera). Nous verrons cependant que la prise en compte de l'émission induite est indispensable pour rendre compte de divers phénomènes : le rayonnement thermique étudié ici, mais aussi l'effet LASER.

Globalement, la loi d'évolution des populations atomiques peut être écrite :

✓
$$\boxed{\frac{dN_2}{dt} = (B_{1\rightarrow 2} N_1 - B_{2\rightarrow 1} N_2) u_\nu(\nu) - A_{2\rightarrow 1} N_2}$$



LASERS ET MASERS

Les *masers* (MASER est l'acronyme de *Microwave amplification by stimulated emission of radiation*, amplification de microondes par émission stimulée de rayonnement) et *lasers* (LASER est l'acronyme de *Light amplification by stimulated emission of radiation*, amplification de lumière par émission stimulée de rayonnement) forment la première vérification expérimentale directe de l'existence de l'émission induite.

Le premier maser a été réalisé par **Charles Townes** en 1954, et le premier laser en 1960 sur la base du *pompage optique* proposé par le français **Alfred Kastler** (1902-1984). Dans les deux cas, on réalise, au moyen d'un procédé quelconque dit de *pompage*, une *inversion de population* entre les deux niveaux E_1 et E_2 , de façon à assurer $N_2 > N_1$. Dans ces conditions, le phénomène d'émission induite peut devenir prépondérant devant l'émission spontanée, de sorte que :

⁸ On notera que les coefficients d'Einstein A et B n'ont pas la même unité !

⁹ A l'exception notable des *lasers* et *masers*.

$$\frac{dN_2}{dt} \cong (B_{1 \rightarrow 2} N_1 - B_{2 \rightarrow 1} N_2) u_\nu(\nu)$$

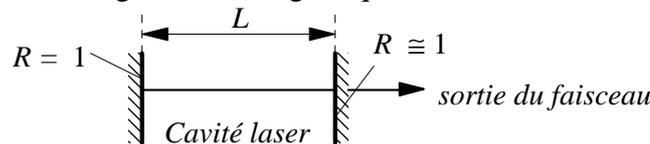
Au fur et à mesure qu'une onde électromagnétique se propage dans un tel milieu, la non-compensation de l'émission et de l'absorption induites provoque une augmentation du nombre de photons de fréquence ν , donc de l'énergie électromagnétique, proportionnellement au nombre de photons initialement présents et à la longueur traversée :

$$du_\nu = K u_\nu dx \quad \text{donc} \quad u_\nu(x) = u_\nu(0) \exp(Kx)$$

où $K > 0$. Au bout de la traversée d'une longueur l , le flux énergétique est multiplié par : $\exp(Kl) \gg 1$

Dans le domaine microonde, cette amplification (effet maser) a été utilisée pour réaliser l'amplification des signaux de haute fréquence délivrés par les radiotélescopes, à une époque où on ne disposait pas d'amplificateurs électroniques efficaces dans ce domaine de fréquences (quelques GHz).

Par la suite, les lasers ont été (et sont toujours) utilisés pour amplifier, dans une cavité, des ondes stationnaires entre deux miroirs disposés face à face. Ainsi, on peut obtenir des densités d'énergie électromagnétique très élevées dans la cavité laser.



Si un des miroirs a un coefficient de réflexion énergétique très légèrement inférieur à 1, la fraction de l'énergie intérieure qui sort est le *faisceau laser*.

La nécessité d'obtenir des ondes stationnaires impose à la longueur d'onde du laser la condition $2L = p\lambda$, où p est un entier. De plus, l'effet laser n'est possible que pour la fréquence ν^{10} donnée par $E_2 - E_1 = h\nu$; si ces deux conditions coïncident, on constate de plus que l'onde émise est *cohérente* (cf. cours d'Optique).

12.2.4. Equilibre thermique du rayonnement

Dans le cas où les atomes qui interagissent avec le rayonnement sont en *équilibre thermique*, les populations des niveaux E_1 et E_2 sont régies par la loi de répartition de Boltzmann :

$$N_1 = K \exp\left(-\frac{E_1}{k_B T}\right) \quad \text{et} \quad N_2 = K \exp\left(-\frac{E_2}{k_B T}\right)$$

qu'on écrira encore :

$$N_1 = N_2 \exp\left(\frac{E_2 - E_1}{k_B T}\right) = N_2 \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

¹⁰ En réalité, un certain intervalle de fréquences de part et d'autre de cette valeur centrale est acceptable. Si un laser est réalisé avec *une seule valeur* de p dans cet intervalle, il est dit *monomode* et correspond en général à un faisceau de sortie délivrant une puissance *continue* au cours du temps. Au contraire, si *plusieurs valeurs* de p sont dans cet intervalle, il est dit *multimode* et délivre en général des *impulsions lumineuses*.

D'autre part, l'équilibre thermodynamique impose aussi que N_1 et N_2 ne varient pas au cours du temps, donc que :

$$0 = \frac{dN_2}{dt} = (B_{1 \rightarrow 2}N_1 - B_{2 \rightarrow 1}N_2)u_\nu(\nu) - A_{2 \rightarrow 1}N_2$$

que l'on écrira encore :

$$u_\nu(\nu) = \frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2} \frac{N_1}{N_2} - B_{2 \rightarrow 1}}$$

soit aussi :

$$u_\nu(\nu) = \frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2} \exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - B_{2 \rightarrow 1}}$$

A très haute température, $h\nu \ll k_B T$, la densité énergétique du rayonnement émis augmente fortement et l'émission induite l'emporte sur l'émission spontanée, ce qui impose :

$$B_{1 \rightarrow 2}N_1 - B_{2 \rightarrow 1}N_2 \cong 0$$

tandis que la loi de répartition de Boltzmann impose $N_1 \cong N_2$, d'où l'on déduit la première relation entre les coefficients d'Einstein :

$$B_{1 \rightarrow 2} = B_{2 \rightarrow 1}$$

D'autre part, on doit retrouver la loi de Rayleigh-Jeans comme comportement limite à basse fréquence :

$$u_\nu(\nu)|_{\text{Rayleigh-Jeans}} = \frac{8\pi\nu^2 k_B T}{c^3}$$

or dans ce cas le passage à la limite $h\nu \ll k_B T$ dans l'expression de $u_\nu(\nu)$ impose :

$$u_\nu(\nu) \underset{k_B T \gg h\nu}{\approx} \frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2}} \frac{k_B T}{h\nu}$$

d'où la seconde relation entre les coefficients d'Einstein :

$$\frac{A_{2 \rightarrow 1}}{B_{1 \rightarrow 2}} = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3}$$

et surtout la loi de Planck pour le rayonnement thermique en équilibre thermique avec un corps rayonnant à la température T :

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$



INTERPRETATION DE LA LOI DE PLANCK

Dès que l'énergie $h\nu$ des photons est assez élevée devant $k_B T$, la loi de Planck peut se mettre sous la forme :

$$u_\nu(\nu) \cong \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} e^{-\frac{h\nu}{k_B T}}$$

ce qui traduit une diminution de l'énergie des modes de haute fréquence, compensant la « catastrophe ultraviolette » du modèle de Rayleigh-Jeans.

C'est bien dans cet esprit que le physicien allemand Max Planck a établi en 1900 la première démonstration de la loi qui porte son nom. Supposant que les transferts d'énergie entre le rayonnement et la cavité sont *quantifiés* et se font exclusivement par valeurs multiples entières de $h\nu$, Planck ne contesta pas la densité spectrale de modes établie par Rayleigh :

$$\frac{1}{V} \frac{dn_m}{d\nu} = 8 \frac{\pi\nu^2}{c^3}$$

mais l'énergie moyenne de chacun de ces modes n'est plus égale à $k_B T$. Il faut recalculer cette énergie moyenne à partir de la loi statistique de Boltzmann. Ainsi, le mode de transfert d'énergie $p h\nu$ (où p est entier) a pour probabilité :

$$P(ph\nu) = K \exp\left(-p \frac{h\nu}{k_B T}\right)$$

si T est la température de la cavité (à l'équilibre thermique, on parle aussi de température du rayonnement). L'énergie moyenne des transferts thermiques à la fréquence ν vaut :

$$\langle E \rangle = \sum_{p=0}^{\infty} P(ph\nu) \times ph\nu$$

ce qu'on écrira donc :

$$\langle E \rangle = \frac{\sum_{p=0}^{\infty} ph\nu \exp\left(-\frac{ph\nu}{k_B T}\right)}{\sum_{p=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{ph\nu}{k_B T}\right)}$$

ou encore :

$$\langle E \rangle = h\nu \frac{\sum_{p=0}^{\infty} p \exp(-p\alpha)}{\sum_{p=0}^{\infty} \exp(-p\alpha)} \quad \text{avec } \alpha = \frac{h\nu}{k_B T}$$

On notera donc :

$$S(\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} \exp(-p\alpha) \quad \text{et} \quad \langle E \rangle = -h\nu \frac{1}{S(\alpha)} \frac{dS}{d\alpha}$$

où le calcul de $S(\alpha)$ est classique :

$$S(\alpha) = \sum_{p=0}^{\infty} \exp(-p\alpha) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha}}$$

donc encore :

$$\frac{1}{S(\alpha)} \frac{dS}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} \ln S(\alpha) = -\frac{d}{d\alpha} \ln(1 - e^{-\alpha}) = -\frac{e^{-\alpha}}{1 - e^{-\alpha}}$$

qu'on écrira encore :

$$\frac{1}{S(\alpha)} \frac{dS}{d\alpha} = -\frac{1}{e^{\alpha} - 1}$$

soit enfin :

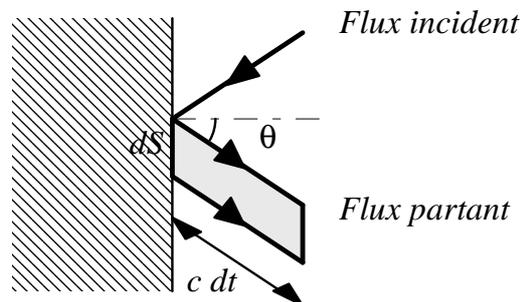
$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

d'où la loi de Planck :

$$u_\nu(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \langle E \rangle = \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

12.2.5. Puissance rayonnée

L'équilibre du rayonnement et du solide rayonnant, à température fixée (et donc à énergie constante), impose l'égalité des flux *incident* sur la paroi et partant de la paroi du solide rayonnant :



Considérons d'abord le seul flux partant sous l'angle θ d'un élément de surface dS du solide.

Si on appelle dP la puissance rayonnée par dS , l'énergie $dP dt$ rayonnée pendant dt est égale à l'énergie électromagnétique contenue dans un volume (grisé sur le schéma) $dS c dt \cos \theta$:

$$\frac{dP}{dS} \Big|_{\theta} = \frac{1}{2} u c \cos \theta$$

où le facteur $\frac{1}{2}$ permet de passer de la densité volumique d'énergie électromagnétique *totale* u à la densité volumique d'énergie électromagnétique du seul flux *partant* $\frac{1}{2} u$.

Considérons enfin le fait que θ est variable. La puissance rayonnée par unité de surface est à répartir dans toutes les directions possibles,

proportionnellement à l'élément d'angle solide $d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$, ce qui permet d'écrire :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\int \frac{dP}{dS} \Big|_{\theta} d\Omega}{\int d\Omega}$$

soit, en tenant compte de la géométrie du rayonnement :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{uc \int_{\theta=0}^{\pi} \cos \theta \sin \theta d\theta}{2 \int_{\theta=0}^{\pi} \sin \theta d\theta} = \frac{c}{4} u$$

La vérification de l'homogénéité des relations ci-dessus est immédiate ; le terme dP/dS se mesure en W.m^{-2} et u se mesure en J.m^{-3} ; on retrouve bien que leur rapport $c/4$ doit se mesurer en m.s^{-1} .

Ce calcul a été effectué sans tenir compte de la répartition spectrale d'énergie. Si on en tient compte, on peut écrire la *densité surfacique de puissance rayonnée par unité de fréquence* :

$$\frac{d^2 P}{dS d\nu} = \frac{c}{4} u_{\nu}$$

qui constitue l'autre forme de la loi de Planck :

$$\frac{d^2 P}{dS d\nu} = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}$$

et, reconnaissant ici le *flux surfacique rayonné* qui a déjà été présenté :

$$\boxed{\frac{dj_{\text{ray}}}{d\nu}(\nu) = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{k_B T}\right) - 1}}$$

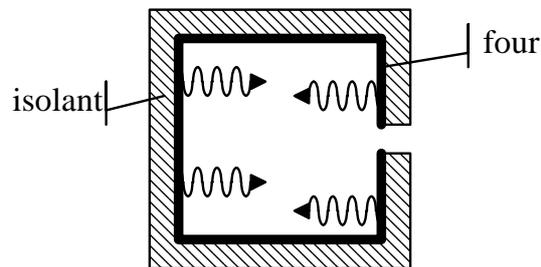
Rappelons encore une fois les relations d'homogénéité entre les deux formes spectrales qui portent indifféremment le nom de *loi de Planck* :

$$\frac{dj_{\text{ray}}(\nu)}{4\pi\nu d\nu} = \frac{c}{4} \cdot u_{\nu}(\nu)$$

mesuré en $\frac{\text{W.m}^{-2}}{\text{s}^{-1}}$ mesuré en m.s^{-1} mesuré en $\frac{\text{J.m}^{-3}}{\text{s}^{-1}}$

12.2.6. Emetteurs thermiques réels

Considérons un four à parois métalliques, seulement percées d'un trou de faibles dimensions. Lorsque les parois du four sont chauffées, l'agitation thermique provoque la mise en mouvement des électrons des parois ; le champ électromagnétique rayonné se propage dans la cavité intérieure au four :



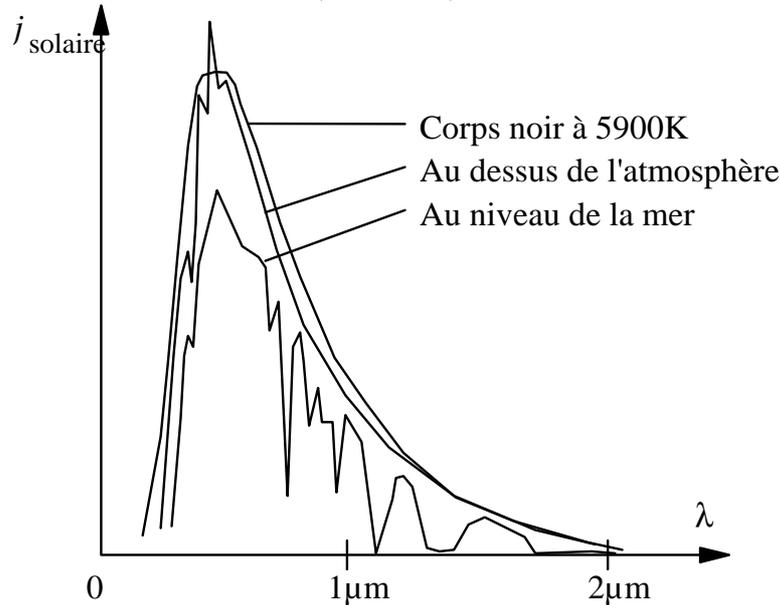
Au bout d'un certain temps, seules les *ondes stationnaires* (telles que celles décrites ci-dessus dans le modèle de Rayleigh-Jeans) subsistent dans le four. Le rayonnement présent dans cette cavité est alors en *équilibre thermique* avec les parois, au sens qui a été défini plus haut.

Un observateur qui reçoit (par exemple au moyen d'un pyromètre) le rayonnement « fuyant » le four par le petit orifice voit une « image » de ce rayonnement d'équilibre dans la cavité, donc avec une répartition spectrale donnée par $u_{\nu}(\nu)$.

Nous admettrons souvent dans la suite que des émetteurs thermiques réels, ne comportant *a priori* aucune cavité intérieure, émettent un rayonnement qui est bien décrit par les mêmes expressions de $u_{\nu}(\nu)$ que celles qui ont été établies plus haut à propos des cavités. Il ne s'agit que d'une approximation, même si elle est fréquemment raisonnable.

Cette approximation conduit souvent à des erreurs, par exemple en « oubliant » les modes individuels (un atome \leftrightarrow un photon) d'interaction matière-rayonnement, au profit des seuls modes collectifs décrits plus haut (cavité à $T \leftrightarrow$ ensemble de photons).

Ainsi, le spectre d'émission d'une étoile comme le Soleil ressemble-t-il seulement grossièrement à celui d'un émetteur thermique, avec en plus de nombreux « manques » dus à l'absorption de rayonnement par les atomes des couches froides (externes) de l'étoile, cf. schéma¹¹ :



12.3. CONSEQUENCES DE LA LOI DE PLANCK

12.3.1. Densité spectrale de puissance rayonnée

La densité spectrale rayonnée peut être exprimée en fonction de la *longueur d'onde* du rayonnement, selon :

$$\frac{d^2 P}{d\lambda dS} = \frac{c}{4} u_\lambda = \frac{c^2}{4\lambda^2} \frac{8\pi h\nu^3}{c^3} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}$$

qu'on écrira ici :

$$\frac{dj_{\text{ray}}}{d\lambda} = \frac{2\pi k_B^5 T^5}{h^4 c^3} f(\alpha) \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{hc}{k_B \lambda T} \quad \text{et} \quad f(\alpha) = \frac{\alpha^5}{e^\alpha - 1}$$

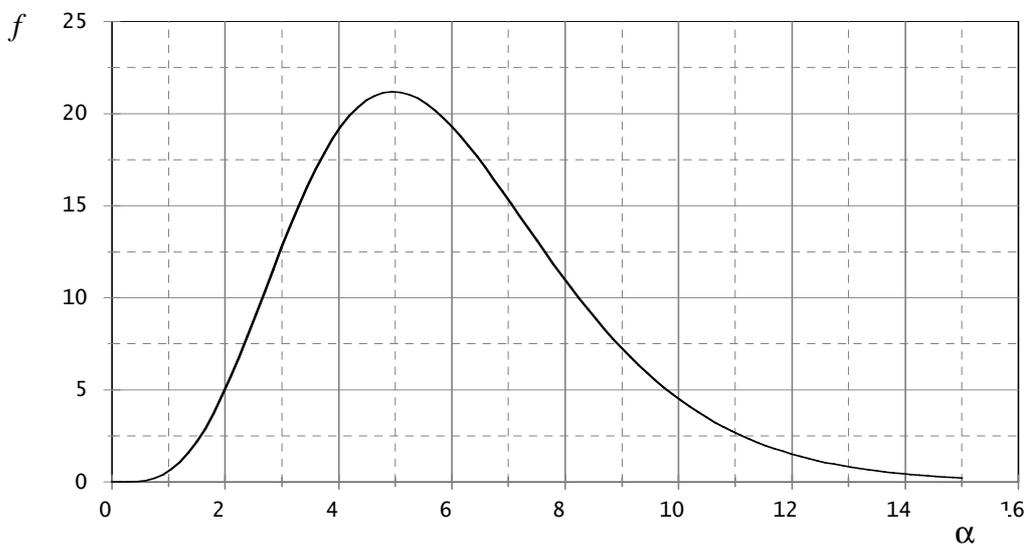
Décrire la densité spectrale du flux surfacique rayonné, c'est analyser la forme de cette fonction. Le tracé de la fonction f est relativement aisé ; nous remarquerons que :

¹¹ Ce schéma indique aussi la répartition spectrale du rayonnement solaire, tel qu'il est perçu au niveau de la mer ; on note une absorption supplémentaire, qui est cette fois-ci le fait de l'atmosphère elle-même.

$$f'(\alpha) = \frac{5\alpha^4}{(e^\alpha - 1)^2} \left[e^\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{5} \right) - 1 \right]$$

qui vérifie $f'(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow 0}{\approx} 4\alpha^3 > 0$ et $f'(\alpha) \underset{\alpha \rightarrow \infty}{\approx} -\alpha^5 e^{-\alpha} < 0$, ce qui prouve l'existence d'au moins un maximum.

L'étude numérique¹² de $f' = 0$ montre l'existence d'une solution unique, $\alpha_m = 4,9651$. La valeur correspondante est $f(\alpha_m) = 21,2014$. On en déduit la forme de $f(\alpha)$, et donc de la loi de Planck, à une température donnée, la courbe correspondante est tracée ci-dessous.



12.3.2. Loi du déplacement de Wien

Comme on l'a vu ci-dessus, le rayonnement partant (ou incident) à l'équilibre thermique admet toujours un maximum unique pour une certaine longueur d'onde λ_{\max} . Cette longueur d'onde du maximum d'émission vérifie la *loi du déplacement de Wien*¹³ :

$$\lambda_{\max} T = \frac{hc}{k_B \alpha_m}$$

ou encore :

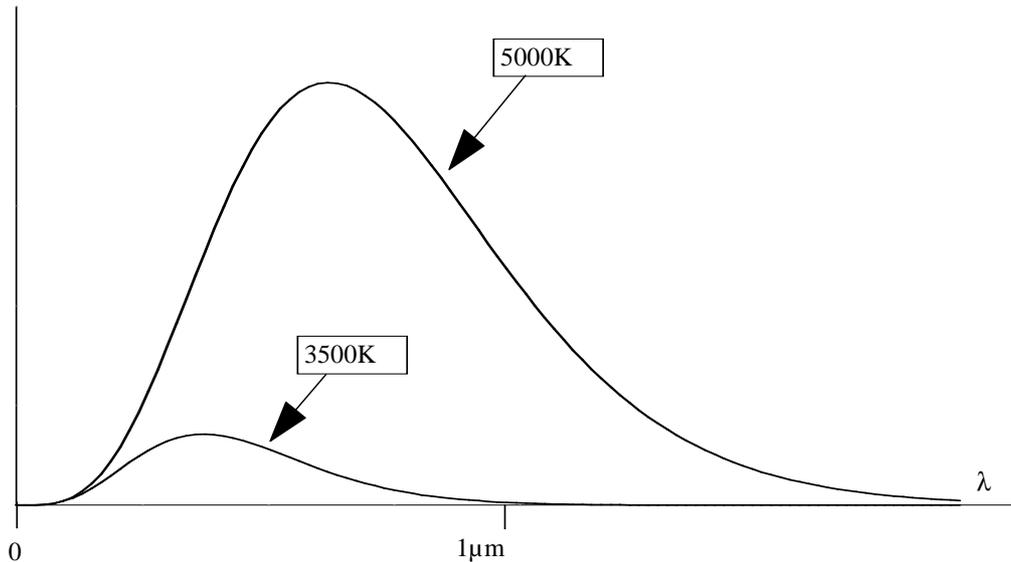
$$\lambda_{\max} T = 2,895 \cdot 10^{-3} \text{ m.K} = 2895 \mu\text{m.K}$$

¹² Une recherche analytique est possible, en remarquant qu'au dénominateur de f , l'exponentielle l'emporte très vite sur 1 ; la fonction f admet alors la forme approchée $f(\alpha) \cong \alpha^5 e^{-\alpha}$ dont le maximum est atteint pour $\alpha = 5$.

¹³ Loi établie expérimentalement dès 1895 par **Wilhelm Wien** (1864-1928).

On retiendra la valeur approchée $\lambda_{\max} T \cong 3000 \mu\text{m.K}$.

En plus du déplacement du maximum d'émission avec la température, on n'oubliera pas que la *hauteur du maximum* varie aussi avec la température, proportionnellement à la puissance 5 de T :



On peut ainsi proposer, sur la figure ci-dessus, la comparaison des répartitions spectrales de flux $dj_{\text{ray}}/d\lambda$ rayonnés à 3500K et 5000K. Ainsi, avec un émetteur thermique à la température de 3500K, le maximum d'émission est-il atteint pour une longueur d'onde $\lambda_{\max} = 0,83 \mu\text{m}$ (ou 830nm), dans le domaine du *proche infrarouge*. Par contre, avec un émetteur thermique à la température de 5000K, ce maximum d'émission correspond à la longueur d'onde $\lambda_{\max} = 0,58 \mu\text{m}$ (ou 580nm), dans le domaine visible ; il s'agit de lumière *jaune*.

TEMPERATURE DE COULEUR

Cette variation de la longueur d'onde avec la température de l'émetteur est liée à une classification des couleurs dominantes en *températures de couleur*, utilisée notamment en photographie.

Ainsi, la température de couleur d'un éclairage de jour est de l'ordre de 6000K (c'est aussi un ordre de grandeur de la température de surface du Soleil) tandis qu'un éclairage par lampes à incandescence a une température de couleur de l'ordre de 3500K (dans l'infrarouge donc).

Si notre cerveau compense automatiquement le décalage spectral qui en résulte, il n'en va pas de même des prises de vue photographiques ou vidéo. En l'absence de compensation, une photographie prise en intérieur semblerait posséder une très forte dominante rouge.



Dans le domaine vidéo, comme lors du tirage sur papier de photographies, la compensation est réalisée de façon électronique (on parle de « balance des blancs »).

Par contre, la photographie sur diapositives ne peut faire l'objet d'aucune correction après le développement ; on rencontre donc divers types de films diapositifs, adaptés aux différentes conditions d'éclairage possibles (naturel, lampes flash, éclairage fluorescent, éclairage incandescent). La sensibilité relative des différentes couches sensibles (rouge, vert, bleu) est modifiée selon le type d'éclairage attendu, pour compenser les décalages spectraux prévus par la loi de Planck.

12.3.3. Loi de Stefan-Boltzmann

L'étude de la loi de répartition spectrale de Planck montre que l'émission totale d'un corps rayonnant à l'équilibre thermique augmente très fortement avec la température.

On peut caractériser cette augmentation de façon globale (indépendamment de la longueur d'onde) par le flux surfacique total rayonné j_{ray} (mesuré en $\text{W}\cdot\text{m}^{-2}$) :

$$j_{\text{ray}} = \int_{\lambda=0}^{\infty} \frac{dj_{\text{ray}}}{d\lambda} d\lambda = \int_{\nu=0}^{\infty} \frac{dj_{\text{ray}}}{d\nu} d\nu = \frac{2\pi k_B^4 T^4}{c^2 h^3} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1} d\alpha$$

qu'on écrira encore sous la forme de la *loi de Stefan-Boltzmann*¹⁴ :

$$j_{\text{ray}} = \sigma T^4 \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{2\pi k_B^4}{c^2 h^3} \int_{\alpha=0}^{\infty} \frac{\alpha^3}{e^\alpha - 1} d\alpha$$

et, la valeur de l'intégrale ci-dessus étant $\pi^4/15$, il vient aussi :

$$j_{\text{ray}} = \sigma T^4 \quad \text{où} \quad \sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3}$$

où on retiendra la valeur numérique de la *constante de Stefan* :

$$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$$

Remarquons enfin que le spectre d'émission donné par la loi de Planck reste peu étendu de part et d'autre de la longueur d'onde du maximum d'émission.

¹⁴ Loi établie expérimentalement en 1879 par **Joseph Stefan** (1835-1893), avant d'être retrouvée par des considérations thermodynamiques en 1884 par **Ludwig Boltzmann** (1844-1906).

On qualifie en général d'*étendue spectrale* d'un émetteur thermique à la température T l'intervalle de longueurs d'onde $[\lambda_{\max}/2 ; 8 \lambda_{\max}]$ car on peut montrer numériquement que :

$$j_{\text{ray}}\left[\frac{\lambda_{\max}}{2}, 8\lambda_{\max}\right] = \int_{\lambda=\frac{\lambda_{\max}}{2}}^{8\lambda_{\max}} \frac{dj_{\text{ray}}}{d\lambda} d\lambda = 0,98 \cdot \sigma T^4$$

ce qui signifie que cette étendue spectrale concentre 98% du rayonnement partant du corps rayonnant considéré. On dira donc abusivement que « tout » le rayonnement est concentré dans cet intervalle, même si le rayonnement d'équilibre thermique à *toute température* contient quelques composantes à très petite et très grande longueurs d'onde.

Le tableau ci-après donne quelques valeurs numériques d'étendues spectrales :

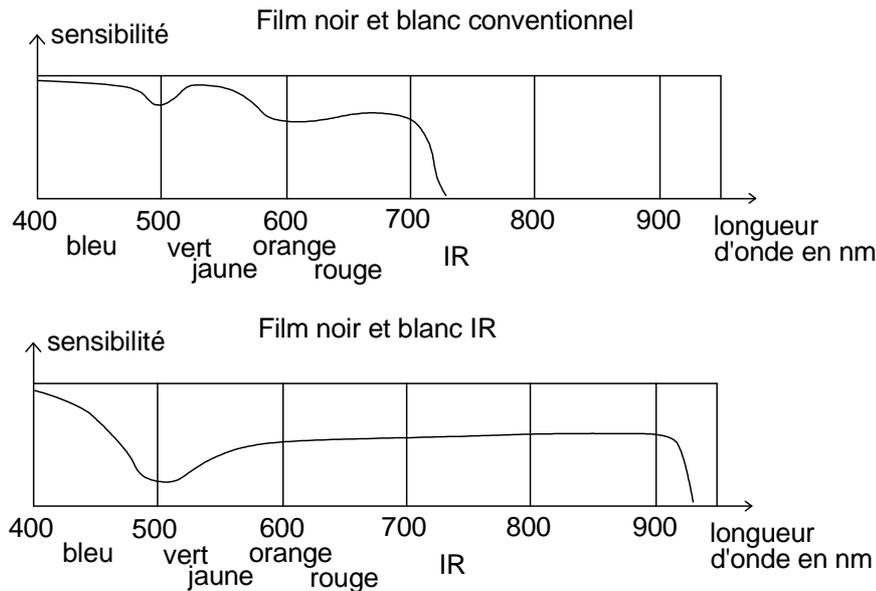
Température d'équilibre	$\lambda_{\max}/2$	$8 \lambda_{\max}$	Domaine
3K	0,48mm	7,7mm	Radio
300K	5 μm	80 μm	Infrarouge
1500K	1 μm	16 μm	Infrarouge
5700K	0,26 μm	4,2 μm	Visible

LA PHOTOGRAPHIE EN INFRAROUGE

Ce domaine de la photographie n'est pas seulement réservé aux professionnels. Il est aussi accessible aux amateurs possédant un matériel classique, en tenant compte des spécificités imposées par la sensibilité des films aux infrarouges. On trouve dans le commerce deux types d'émulsions infrarouges : noir et blanc ou couleur. Le noir et blanc est le plus utilisé. Le film présentant la plus grande bande passante est le Kodak® High Speed Infrared 2481. Sa courbe de sensibilité est représentée page suivante.

Les films infrarouges noir et blanc peuvent être utilisés tels quels. Mais pour obtenir un effet plus important, on pourra utiliser des filtres, en particulier un filtre « noir » arrêtant la quasi-totalité du rayonnement visible. Cela n'est pas sans poser quelques difficultés. La présence du filtre noir sur l'objectif rend totalement inutile le viseur. Il faut donc faire la mise au point avant d'installer le filtre. Là, un autre problème se pose. Pour un objectif classique, le point de focalisation du bleu sera un peu différent de celui du rouge, les traitements des objectifs remédient correctement à cela. Dans le cas de l'infrarouge, l'effet est plus important (il existe des objectifs corrigés jusque dans ce domaine de longueur d'onde). Si la mise au point est faite en visible, l'infrarouge focalisera au-delà de l'émulsion car les rayons infrarouges sont moins déviés que les rouges et a fortiori que les bleus. Cet effet peu sensible sur les courtes focales le devient beaucoup plus sur les grandes focales. Deux cas se présentent. Soit l'appareil possède un repère infrarouge et après avoir fait la mise au point en visible, on décale la bague jusqu'au repère. Soit il n'en possède pas et après la mise au point en visible, on décale le réglage « au jugé » vers l'avant pour atteindre le moment où le flou naît.





L'effet principal des films infrarouges noir et blanc est de faire apparaître sur la photographie la végétation en blanc car celle-ci réfléchit particulièrement les infrarouges.

L'utilisation du film demande quelques autres précautions. Sa conservation s'effectue dans un réfrigérateur ou dans un congélateur à -18°C pour les longues durées. A la température ambiante, il serait progressivement voilé par les émissions infrarouges des objets qui l'entourent. On dispose toutefois d'un délai d'environ 24 heures pour l'utiliser une fois sorti du réfrigérateur. Ce type de film étant susceptible d'être voilé non seulement par la lumière visible mais aussi par les infrarouges, on devra prendre soin de le manipuler (chargement, déchargement, développement) loin de tout émetteur thermique. Après utilisation, il faut le remettre au froid et le faire développer le plus rapidement possible.

Un point relativement pernicieux peut empêcher la réalisation de photos infrarouges. En effet, de plus en plus d'appareils sont dotés d'une diode infrarouge dans le dispositif de comptage de l'avancement du film. Cette diode voilerait aussitôt le film. Seuls les appareils dotés, pour l'avancement du film, d'un dispositif mécanique (à cabestan) permettent la photographie infrarouge.

Le seul film infrarouge couleur disponible sur le marché est le film Kodak® Ektachrome Infrared 2236. Les mêmes contraintes que pour le noir et blanc existent (elles sont même plus sévères sur le plan de l'influence de la température). De plus, il s'utilise avec un filtre jaune de préférence. On obtient alors des photographies « surnaturelles » où le bleu fonce et devient presque noir, où le vert passe au bleu, le rouge au vert et l'infrarouge au rouge. La végétation prend une couleur magenta très étonnante nous permettant, par exemple, de voir des vaches, peu affectées sur le plan chromatique, broutant un pré magenta.



PRESSION DE RADIATION ET LOI DE STEFAN-BOLTZMANN

La méthode thermodynamique de Boltzmann aboutissant à la loi de Stefan-Boltzmann repose sur la notion de *pression de radiation*.

Rappelons ici (cf. cours d'Electromagnétisme) que la pression de radiation exercée par une onde d'énergie électromagnétique volumique moyenne u_{inc} , parvenant sous l'incidence θ sur un miroir parfaitement réfléchissant, s'écrit :

$$p_{\theta} = 2 u_{\text{inc}} \cos^2 \theta$$

Réalisant comme ci-dessus la moyenne des pressions de radiation correspondant à diverses valeurs de θ , on écrira pour la pression de radiation totale :

$$p = \frac{\int p_{\theta} d\Omega}{\int d\Omega} = 2u_{\text{inc}} \frac{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta}{\int_{\theta=0}^{\pi/2} \sin \theta d\theta}$$

soit, après calculs, $p = \frac{2}{3} u_{\text{inc}} = \frac{1}{3} u$ puisque la densité totale d'énergie électromagnétique est égale au double de la densité incidente, à l'équilibre radiatif. Cette relation peut aussi être traitée comme l'équation d'état d'un gaz de photons d'énergie interne U dans une enceinte de volume V :

$$p = \frac{1}{3} \frac{U}{V}$$

où on remarquera l'analogie avec l'équation d'état des gaz parfaits monoatomiques :

$$pV = \frac{2}{3} U$$

Toute transformation réversible du gaz de photons peut donc être caractérisée par le transfert de travail :

$$\delta W_{\text{rév}} = -pdV = -\frac{1}{3} u(T) dV$$

où on cherche ici l'expression de u , en supposant qu'il s'agisse d'une fonction de la seule température T de l'émetteur du rayonnement. On en déduit encore :

$$\delta Q_{\text{rév}} = dU - \delta W_{\text{rév}} = d(Vu(T)) + \frac{1}{3} u(T) dV = V du(T) + \frac{4}{3} u(T) dV$$

d'où la différentielle de l'entropie du gaz de photons :

$$dS = \frac{\delta Q_{\text{rév}}}{T} = V \frac{1}{T} \frac{du}{dT} dT + \frac{4}{3} \frac{u}{T} dV$$

soit aussi :

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = V \frac{1}{T} \frac{du}{dT} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{4}{3} \frac{u}{T}$$

Finalement, l'application du théorème de Schwartz aux dérivées de S mène à :

$$\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T \Rightarrow \frac{1}{T} \frac{du}{dT} = \frac{4}{3} \frac{1}{T^2} \left(\frac{du}{dT} T - u \right)$$

donc après calcul :

$$\frac{du}{u} = 4 \frac{dT}{T} \Rightarrow u = aT^4$$

d'où la loi de Stefan-Boltzmann :

$$j_{\text{ray}} = \frac{c}{4} u = \frac{ca}{4} T^4 = \sigma T^4$$



LE RAYONNEMENT DE FOND COSMOLOGIQUE

Dans le tableau présenté page 459, la valeur 3K n'est pas citée par hasard. Les modèles cosmologiques actuels (dits du *big bang*) supposent que l'état « initial » de l'univers était exclusivement constitué de rayonnement, en équilibre thermique à une température très élevée, donc à une longueur d'onde très faible.

Le refroidissement rapide associé à l'expansion de l'Univers amena la fin de cette première phase lorsque la température devint suffisamment basse (de l'ordre de 4000K) pour permettre la recombinaison des électrons et des noyaux en atomes, puis en molécules : c'est la phase de dominante matérielle, qui dure encore actuellement.

Le rayonnement qui avait été émis à ce moment poursuit depuis une existence propre, découplée de l'évolution matérielle ; il continue de remplir uniformément l'Univers. Cependant, il subit, comme le reste de l'Univers, l'expansion universelle. Ainsi, il possédait au moment de la recombinaison (il y a environ 15.10^9 années) une température de l'ordre de 4000K, avec donc une répartition donnée par la loi de Planck, et un maximum d'émission à la longueur d'onde de $0,72\mu\text{m}$.

La réalisation d'observations astronomiques à grande distance revient, compte tenu de la vitesse finie de propagation des ondes électromagnétiques, à une observation du passé. Cependant, une telle observation est affectée par l'*effet Doppler-Fizeau*, c'est-à-dire par un « *décalage vers le rouge* » (vers les basses longueurs d'onde) du rayonnement, proportionnel au rapport v/c , où v est la vitesse d'éloignement (on parle aussi de *vitesse de récession*) de l'objet observé, et c la vitesse de la lumière.

Dans le cas de ce rayonnement, le rapport v/c pour la « frontière » de la zone de rayonnement (c'est-à-dire aussi, la limite de l'univers observable) correspond environ à $v/c = 1500$, donc la longueur d'onde de ce rayonnement, tel qu'il est observé depuis la terre, atteint aujourd'hui une valeur de l'ordre de 1mm, ce qui correspond à une température apparente de 2,7K ; on dit que l'expansion universelle « refroidit » ce rayonnement thermique, qui porte le nom de *rayonnement de fond cosmologique*.

Ce rayonnement, prévu par les théoriciens de la cosmologie, a été observé pour la première fois en 1965 par les radioastronomes américains **Arno Penzias** et **Robert Wilson**.

Conformément aux prévisions théoriques de la cosmologie, ce fond de rayonnement est pratiquement isotrope¹⁵ et est très bien représenté par la loi de Planck ; les mesures effectuées le satellite COBE évaluent actuellement sa température à $2,74\pm 0,06\text{K}$.

12.4. BILANS ENERGETIQUES

12.4.1. Effet de serre

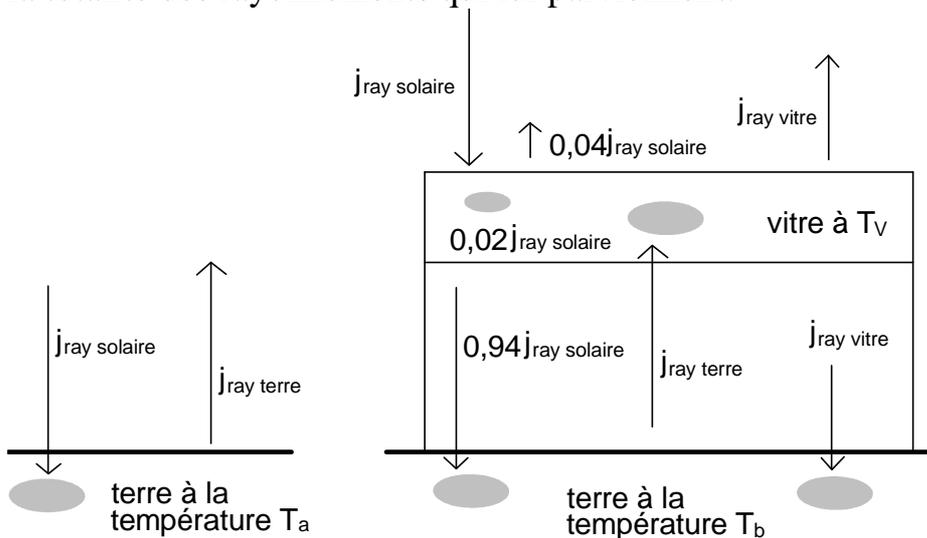
Un effet de serre peut se produire lorsqu'un corps absorbe une partie du rayonnement et en laisse passer une autre : les longueurs d'onde

¹⁵ Les anisotropies du rayonnement de fond cosmologique sont un sujet d'étude actuel. Une seule anisotropie majeure a été actuellement détectée, liée (via, là encore, les lois de l'effet Doppler-Fizeau) au mouvement propre de notre galaxie (à la vitesse de $600\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ environ) par rapport au reste de l'Univers.

incidentes devant correspondre à une fenêtre de transmission, les longueurs d'onde réémises devant correspondre à un intervalle d'absorption.

L'exemple le plus courant est le verre qui est presque totalement transparent aux longueurs d'onde du visible et du proche IR et qui, par contre, est presque totalement absorbant pour des longueurs d'onde de l'ordre de 4 à $30\mu\text{m}$. En prenant, pour fixer les idées, $\lambda=10\mu\text{m}$, cela signifie que le verre absorbe de façon quasi-totale le rayonnement émis par un corps supposé noir de température $T=300\text{K}$ si on applique avec un peu d'approximation la loi du déplacement de Wien ($\lambda_{\text{max}} T \cong 3000\mu\text{m.K}$).

Ce fait est exploité dans la réalisation de la serre du jardinier comme nous allons le comprendre grâce à la modélisation qui suit. Même si la situation paraît un peu caricaturale, elle dégagera bien l'origine du renforcement de l'effet du rayonnement solaire à l'intérieur de la serre. Pour cela, nous allons comparer la température d'une terre exposée en plein soleil à celle obtenue lorsqu'elle est surmontée d'une vitre de verre. Nous supposons qu'il y a toujours équilibre des corps rayonnants considérés. Nous utiliserons comme donnée fondamentale le flux surfacique solaire incident estimé à $j_{\text{ray solaire}} \cong 650\text{W.m}^{-2}$ sous incidence normale à la surface de la terre. Nous avons vu que le verre réfléchissait environ 4% du rayonnement normal incident, nous supposons qu'il est aussi un peu absorbant pour 2%. Nous ferons également l'hypothèse que la terre absorbe la totalité des rayonnements qui lui parviennent.



On compare donc les deux situations présentées sur le schéma ci-dessus ; les taches grises indiquent qu'il y a absorption de rayonnement.

Dans le cas a) l'équilibre de la terre impose $j_{\text{ray terre}} = j_{\text{ray solaire}}$ d'où, en utilisant la loi de Stefan, $\sigma T_a^4 \cong 650 \text{W.m}^{-2}$.

On trouve ainsi que $T_a = 327\text{K}$, c'est-à-dire 54°C . Cette valeur n'est pas si éloignée de la réalité que cela. Il suffit de penser à la température atteinte l'été au soleil par le goudron des routes. Celui-ci constitue un meilleur corps noir que la terre du jardin qui n'absorbe pas en totalité la fraction du rayonnement solaire lui parvenant.

Dans le cas b), il faut traduire deux équilibres : celui de la terre qui reçoit, entre autres, un rayonnement de la part du soleil et celui de la vitre. C'est le flux surfacique émis par la vitre, ici considérée comme un corps noir, qui est responsable de l'effet de serre. En effet, la vitre absorbe (dans notre modèle, de façon totale) le rayonnement émis par la terre. Ce rayonnement absorbé contribue en grande partie à ce que la vitre émet. Comme celle-ci rayonne de façon équivalente par ses deux faces, la moitié du rayonnement total absorbé par la vitre va être renvoyée vers la terre, produisant ainsi l'effet de serre. Profitons-en pour rappeler que la formule de Stefan en σT^4 (W.m^{-2}) concerne des puissances surfaciques *hémisphériques*, émises donc dans un demi-espace décrit par l'angle solide $\Omega_{\square \text{ espace}} = 2\pi$.

On comprendra alors que la vitre à la température T_V émette σT_V^4 dans l'atmosphère et aussi σT_V^4 vers le sol. Les bilans énergétiques sont donc les suivants :

- 1) Equilibre de la terre : $0,94 j_{\text{ray solaire}} + \sigma T_V^4 = \sigma T_b^4$
- 2) Equilibre de la vitre : $0,02 j_{\text{ray solaire}} + \sigma T_b^4 = 2\sigma T_V^4$

Ce système de deux équations se résout aisément en multipliant, par exemple, la première équation par 2 et en lui additionnant la seconde. On obtient :

$$1,90 j_{\text{ray solaire}} = \sigma T_b^4$$

que l'on comparera à la situation précédente où :

$$j_{\text{ray solaire}} = \sigma T_a^4$$

On ne peut que prévoir : $T_b > T_a$. La valeur numérique est : $T_b = 384\text{K}$ ou 111°C . On en déduit aussi que :

$$0,96 j_{\text{ray solaire}} = \sigma T_V^4$$

d'où $T_V = 324\text{K}$ ou 51°C .

Les valeurs de température obtenues ne sont pas très réalistes pour une serre de jardin réelle pour plusieurs raisons. D'abord, la serre ne reçoit pas 650W.m^{-2} à chaque instant de la journée du fait de l'inclinaison des rayons solaires par rapport à la normale à la surface vitrée. Le coefficient de réflexion évoqué dans le paragraphe 12.1.1 augmente fortement lorsque l'angle d'incidence se rapproche de $\pi/2$. En simplifiant et en ne considérant que des ondes électromagnétiques dont le champ électrique \vec{E} est perpendiculaire au plan d'incidence, on peut montrer :

$$P_{\text{réfléchié}} = \frac{\sin^2(r - i)}{\sin^2(r + i)} P_{\text{incidente}}$$

où i est l'angle d'incidence sur le dioptre et r l'angle de réfraction. Dans le cas d'un dioptre air-verre, on a :

$$\sin i = 1,5 \sin r$$

Avec $i = 80^\circ$, on trouve $r = 41^\circ$ et :

$$P_{\text{réfléchié}} \cong 0,55 P_{\text{incidente}}$$

Cela fait 55% de réflexion, cette valeur est beaucoup plus importante que les 4% de l'incidence normale. Notons aussi que nous n'avons pas évoqué la présence d'éventuels nuages...

De plus, il est un peu abusif de considérer à chaque instant qu'il y a équilibre des systèmes étudiés. D'ailleurs, ceux-ci ne sont pas exactement des corps noirs. Enfin, il existera au niveau de la vitre des transferts thermiques par convection que nous n'avons pas évoqués. Dans les effets bénéfiques de la serre, nous avons mis en évidence le plus fondamental qui concerne le rayonnement, il ne faudrait pas oublier que la serre protège de la convection directe du vent sur le sol.

L'atmosphère qui enveloppe la terre réalise aussi un effet de serre. Elle absorbe la quasi-totalité du rayonnement émis par la terre et lui en renvoie donc environ la moitié. Cet effet est fondamental dans le bilan énergétique de la terre et explique le fait que la température moyenne sur terre soit d'environ 10°C . On peut proposer d'évaluer la valeur moyenne de la température terrestre en l'absence d'effet de serre selon la méthode suivante. Considérons que $j_{\text{ray solaire}} \cong 1\text{kW.m}^{-2}$, appelons R_T le rayon de la terre. Le flux surfacique solaire arrive sur terre perpendiculairement à un disque de surface πR_T^2 . Du fait de la rotation de la terre de surface $4\pi R_T^2$, on peut dire qu'en moyenne chaque point de la surface de la terre est sou-

mis à un flux surfacique $j_{\text{ray solaire}}/4$. En adoptant le modèle du corps noir, on écrira donc enfin $\sigma T_{\text{moy}}^4 \cong 250 \text{W.m}^{-2}$.

On trouve alors $t_{\text{moy}} \cong -15^\circ\text{C}$. Dans notre calcul, l'effet de serre représente un gain de température moyenne de 25°C !

L'évolution de l'effet de serre, au cours du temps, pourrait avoir des conséquences notables sur notre vie. Si l'effet de serre se renforçait, il y aurait vraisemblablement réchauffement de la planète et s'il diminuait vraisemblablement refroidissement. Ces débats ont atteint ces dernières années le grand public sans qu'il soit encore possible de se faire une idée sûre.

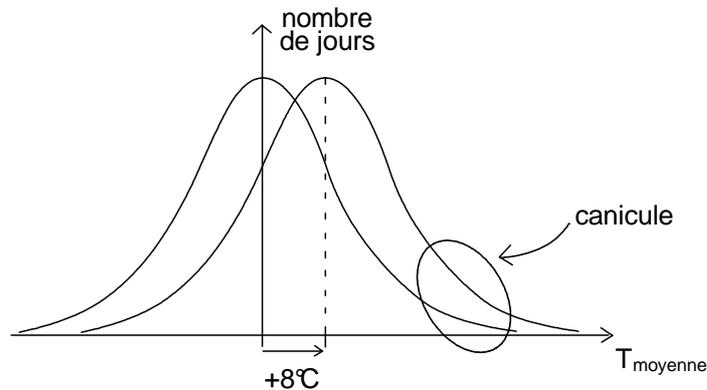


EFFET DE SERRE ET EVOLUTION DU CLIMAT

Le climat de l'hémisphère nord et plus particulièrement celui de l'Europe sont fortement influencés par la circulation de courants océaniques qui remontent des zones tropicales où ils sont chauds (25°C) vers l'Arctique où ils se refroidissent jusque vers 4°C . Les conditions clémentes existant à l'heure actuelle en Europe sont fortement liées aux transferts thermiques dus à ces courants océaniques. Ces courants sont d'ailleurs très sensibles à la quantité d'eau douce fournie par la fonte des glaces polaires. En particulier, une augmentation de la fonte des glaces entraîne une diminution de la salinité qui provoque un ralentissement de la remontée des courants océaniques chauds.

L'effet de serre perturbe nécessairement le climat mais à l'heure actuelle le débat reste très ouvert sur les conséquences de l'augmentation de la teneur de l'atmosphère en dioxyde de carbone. Celle-ci, en trois siècles, est passée de 280ppm (ppm = partie par million, 280ppm = 0,028%) à 360ppm. Les activités industrielles, agricoles et les transports en sont en partie responsables. Mais des causes naturelles sont aussi prouvées comme l'irruption volcanique du Pinatubo aux Philippines. L'augmentation de la teneur en dioxyde de carbone n'est pas le seul fait marquant qu'il faille relever concernant la composition de l'atmosphère. Depuis un siècle, plus particulièrement, il y a une augmentation notable de la teneur en méthane, en oxydes d'azote, en composés chlorés ou fluorés ainsi qu'en poussières. Les gaz cités ci-dessus contribuent à augmenter l'effet de serre et par conséquent à augmenter la température terrestre. Les poussières en empêchant le rayonnement solaire de parvenir sur terre ont l'effet inverse. Quoi qu'il en soit les mesures de température montrent que la tendance est à l'augmentation ! Cette hausse persistera-t-elle avec l'augmentation prévisible de l'effet de serre ? Rien n'est moins sûr... Les recherches en la matière sont particulièrement complexes. On commence à disposer d'ordinateurs suffisamment puissants pour réaliser des simulations numériques sur des modèles couplant l'atmosphère et les courants océaniques. On propose ainsi divers scénarios sur la rapidité d'augmentation (par exemple) des teneurs en gaz à effet de serre. Les résultats peuvent être très contrastés. Certaines simulations aboutissent d'ici à cinq siècles à une augmentation de la température moyenne en Europe de 8°C ce qui serait considérable. En réalité un décalage de ne serait-ce qu'un degré est d'une extrême importance. En effet, il s'agit d'un degré en moyenne annuelle, alors que la répartition des températures au cours de l'année est plus ou moins gaussienne (cf. page suivante). Ainsi, un déplacement faible de la courbe réaliserait une augmentation « expo-

entielle » du nombre de jours de canicule avec tous les effets météorologiques qu'on peut imaginer. 8°C de plus, ce ne serait pas seulement bronzer à Saint-Etienne, mais aussi un désert chaud en Languedoc et l'inondation de toute la Normandie...



D'autres simulations tendent à montrer qu'il y aurait, au bout du compte, un refroidissement consécutif à un fort ralentissement de la remontée des courants chauds du fait d'une forte baisse de la salinité par fonte des glaces polaires.

Ces difficultés de prévision ne doivent pas pour autant nous conduire à prendre à la légère le problème de l'effet de serre.

12.4.2. Coefficient de convection dû au rayonnement

Considérons un système, à symétrie sphérique de rayon r à la température T , plongé dans un rayonnement ambiant isotrope correspondant à un corps noir à la température T_0 . Nous supposons cette température relativement proche de T ¹⁶.

Revenons au système. La puissance surfacique globale, algébrisée du point de vue du système, est donc :

$$j_{\text{ray global}} = \sigma T_0^4 - \sigma T^4 = \sigma(T_0^4 - T^4)$$

Compte tenu de la condition sur les températures, on peut proposer l'approximation $T_0^4 - T^4 \cong 4T_0^3(T_0 - T)$. On écrira donc :

$$j_{\text{ray global}} = 4\sigma T_0^3(T_0 - T)$$



¹⁶ Il est difficile de concrétiser le fait que T soit relativement proche de T_0 , mais on pourra admettre qu'un n'oublions pas qu'il est courant en Physique de se fixer une différence de 10% maximum pour pouvoir considérer deux expressions comme identiques. C'est dans ce cadre qu'il faudra comprendre la proposition faite sur les températures.

Dans le cas où $T_0 > T$, le bilan radiatif est favorable au système. Si $T_0 < T$, c'est bien sûr le contraire. Cette situation est à comparer à celle de la convection pour laquelle nous avons vu que :

$$j_{\text{conv}} = h(T - T_0)$$

La première chose à remarquer est qu'on algébrise en général la convection du point de vue de l'extérieur, si $T_0 < T$ alors $j_{\text{conv}} > 0$. On compte positivement la puissance surfacique perdue par le système. Par souci de cohérence, on peut proposer ici :

$$j_{\text{ray global ext}} = 4\sigma T_0^3(T - T_0)$$

et définir un *coefficient de convection* dû au rayonnement selon :



$$h_{\text{ray}} = 4\sigma T_0^3$$

A la température ambiante, par exemple $T_0 = 300\text{K}$, on trouve $h_{\text{ray}} \cong 6\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$. Cette valeur est du même ordre de grandeur que $h_{\text{conv}} \cong 10\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ pour une convection naturelle. L'effet du rayonnement est loin d'être négligeable. Il peut devenir prépondérant si la température moyenne augmente du fait de la croissance en T^3 de h_{ray} . D'ailleurs, dans la documentation technique liée à l'industrie du bâtiment, les phénomènes de convection et de rayonnement sont toujours décrits ensemble, avec des caractéristiques fonction du lieu et des matériaux utilisés.

La linéarisation du bilan énergétique de rayonnement permet d'obtenir des calculs simples, ce qui ne serait pas le cas avec une loi en T^4 .

Dans une situation où se produisent convection et rayonnement, on peut proposer de définir un coefficient de convection global qui traduit la convection due à la conduction thermique dans la couche limite de fluide et celle due au rayonnement :

$$j_{\text{conv tot}} = h_{\text{global}}(T - T_0) = (h_{\text{conv}} + h_{\text{ray}})(T - T_0)$$

Nous allons utiliser la linéarisation du bilan radiatif dans deux situations afin d'en voir l'intérêt. Commençons par le cas d'une sphère de rayon r , de capacité thermique massique c et de masse volumique μ . Cette sphère, à la température T_1 à la date $t = 0$, se trouve dans un rayonnement isotrope permanent correspondant à la température T_0 . La condition $T_1 < T_0$ entraîne un bilan radiatif déficitaire du point de vue de la sphère. On a

donc, en ne prenant en compte que le rayonnement, à une date t où la température de la sphère est T :

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dt} = -(4\pi r^2)4\sigma T_0^3(T - T_0)$$

or :

$$\frac{dU_{\text{int}}}{dt} = \mu \frac{4}{3} \pi r^3 c \frac{dT}{dt}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\mu r c}{12\sigma T_0^3} \frac{dT}{dt} + T = T_0}$$

En posant $\tau = \mu r c / 12 \sigma T_0^3$, on arrive à la solution classique suivante pour un système linéaire du refroidissement de la sphère :

$$\boxed{T = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\frac{t}{\tau}}}$$

On peut aussi utiliser cette situation pour illustrer la notion de résistance de rayonnement. Pour cela, il est indispensable de se placer en régime stationnaire ce qui n'est pas cohérent avec le développement qui précède - toutefois on peut, en supposant le régime lentement variable, définir la résistance de rayonnement à une date quelconque t où la température de la sphère est T . Imaginons qu'un transfert énergétique compense les pertes par rayonnement et que la situation de la sphère à la température $T_1 < T_0$ perdure. La puissance totale transférée par rayonnement de la sphère à l'extérieur est donc :

$$P_{\text{ray global}} = j_{\text{ray global ext}} 4\pi r^2 = 4\pi r^2 h_{\text{ray}} |T_1 - T_0|$$

La résistance de rayonnement s'écrit alors :

$$R_{\text{th ray}} = \frac{|T_1 - T_0|}{P_{\text{ray global}}} = \frac{1}{4\pi r^2 h_{\text{ray}}} = \frac{1}{16\pi r^2 \sigma T_0^3}$$

Nous terminerons ce paragraphe en reprenant l'étude de la barre cylindrique de rayon r vue en 10.4.6 où nous avons établi que :

$$\frac{\partial j_{\text{cond}}(z)}{\partial z} + \frac{2}{r} (j_{\text{conv}}(z) - j_{\text{ray global}}(z)) + \frac{\partial u_{\text{int}}}{\partial t} = 0$$

En appelant $T(z)$ la température de la barre à l'abscisse z et T_0 la température ambiante uniforme et permanente, il vient l'équation suivante en utilisant les lois donnant les différentes puissances surfaciques :

$$-\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{2}{r} (h_{\text{conv}} + h_{\text{ray}}) (T - T_0) + \mu c \frac{\partial T}{\partial t} = 0$$

En régime stationnaire, l'équation différentielle se simplifie en :

$$\frac{r\lambda}{2(h_{\text{conv}} + 4\sigma T_0^3)} \frac{d^2 T}{dz^2} - T = T_0 \quad \text{noté} \quad l^2 \frac{d^2 T}{dz^2} - T = T_0$$

où le terme l est homogène à une longueur ; la solution générale de l'équation différentielle est alors :

$$T(z) = T_0 + A e^{-\frac{z}{l}} + B e^{+\frac{z}{l}}$$



METHODE D'INGENHOUSZ POUR LA MESURE DES CONDUCTIVITES THERMIQUES

Particularisons un peu cette solution, en proposant un thermostat maintenant la température $T_1 > T_0$ en $z = 0$. Supposons que la barre de longueur L soit suffisamment longue pour qu'à son extrémité la température soit en permanence T_0 . Cela signifie que la puissance transférée par le thermostat dans la barre en $z = 0$ est totalement évacuée par convection et rayonnement tout au long de la barre cylindrique avant d'arriver à l'extrémité. On a donc :

$$T(z = L) = T_0 = T_0 + A e^{-\frac{L}{l}} + B e^{+\frac{L}{l}}$$

Si $L \gg l$, alors :

$$A e^{-\frac{L}{l}} \cong 0$$

Cela implique que $B = 0$; avec la condition $T(z = 0) = T_1$ on détermine la forme finale de la loi d'évolution de la température le long de la barre :

$$T(z) = T_0 + (T_1 - T_0) e^{-\frac{z}{l}}$$

Un calcul d'ordre de grandeur va nous faire comprendre que la condition $L \gg l$ n'est pas très contraignante. Imaginons donc une barre métallique cylindrique de rayon $r = 5\text{cm}$, avec $\lambda \cong 10\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ et $h_{\text{conv}} \cong 4\sigma T_0^3 \cong 10\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$, on obtient $l \cong 0,35\text{m}$. Par conséquent, à partir de $L \cong 1,50\text{m}$, on est quasiment dans la situation $L \gg l$.

Il est intéressant de noter enfin que cette situation permet, à la fin du XVIII^{ème} siècle, au physicien hollandais **Jan Ingenhousz** (1730-1799) de comparer ce que nous appelons aujourd'hui la conductivité de différents types de corps. L'expérience consistait à mettre en contact avec un thermostat constitué par de l'eau en ébullition ($T_1 = 373\text{K}$) une extrémité de plusieurs barres constituées de matériaux différents. Les barres étaient enduites de cire dont la température de fusion est d'environ 60°C . Ainsi plus le lieu (correspondant à z_{cire} dans la suite des calculs) où s'arrêtait la fusion de la cire était éloigné du thermostat, plus le matériau constituant la barre était bon conducteur thermique.

On peut aisément justifier cette déduction d'Ingenhousz en écrivant :

$$T_{\text{fusion cire}} = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-\frac{z_{\text{cire}}}{l}}$$

On en tire facilement :

$$z_{\text{cire}} = l \ln \frac{T_1 - T_0}{T_f - T_0} = \sqrt{\frac{r\hat{\lambda}}{2h_{\text{global}}}} \ln \frac{T_1 - T_0}{T_f - T_0}$$

Cette expression montre bien que z_{cire} augmente avec la conductivité thermique λ du constituant de la barre.