

Exercices : 01 - Électricité - Électronique

— Solutions —

A. Régime linéaire

1. Électrocinétique et symétries

Réponses : b, a et c, a et d. On raisonnera par association de résistance pour le cas a), par symétrie pour le cas b) en observant que $I_{DB} = I_{AC} = 0$, enfin on utilisera le théorème de superposition pour c).

2. Modèles de Thévenin et de Norton

Réponses : $i = \frac{E}{R+R_u}$ et $u = \frac{R_u}{R+R_u}E$; $I_0 = \frac{E}{R}$; on conserve bien les mêmes propriétés aux bornes de R_u .

3. Modèle équivalent Thévenin

Réponses : le modèle de THÉVENIN possédera une force électromotrice $E_1 = RI_0$ et une résistance interne en série R ; on peut lui associer la résistance R en série pour former un générateur de tension de fem E_1 et de résistance $2R$; le générateur de tension est transformé en générateur de courant de courant de courant électromoteur E/R et de résistance R , cette résistance se retrouve en parallèle avec une résistance R , on peut alors associer R en parallèle avec R ce qui donne une résistance $R/2$; on revient à un générateur de tension de fem $E/2$ et de résistance interne $R/2$; il ne reste plus qu'à associer les deux générateurs de tension pour obtenir le modèle de THÉVENIN $R_{th} = \frac{5}{2}R$, $E_{th} = \frac{1}{2}E + RI_0$; $I_{cc} = \frac{E}{5R} + \frac{2}{5}I$; $i_{AB} = \frac{E+2RI_0}{2R_u+5R}$; $R_u = R_{th} = \frac{5}{2}R$. Pour retrouver R_{th} , on éteint tous les générateurs ($E = 0$ et $I_0 = 0$) et on calcule la résistance équivalente. Pour trouver E_{th} , on débranche R_u et on calcule u_{AB} à vide, c'est-à-dire pour $I_{AB} = 0$.

4. Mesures en courant continu

Réponses : Montage en croix, $v = e \frac{Az}{1+\beta(\theta-\theta_0)} \simeq eAz(1-\beta(\theta-\theta_0))$ au premier ordre $v \simeq eAz$; $E_{Th} \simeq eAz$, $R_{Th} \simeq R_0(1-\beta(\theta-\theta_0))$, $v \simeq eAz \frac{\rho_1}{\rho_1+R_0(1-\beta(\theta-\theta_0))}$, les effets de la température se font sentir par l'intermédiaire du terme $R_0(1-\beta(\theta-\theta_0))$; $v \simeq eAz$, $v'' \simeq -(1+2\frac{\rho_2}{\rho_1})\frac{\rho_4}{\rho_3}eAz$, le terme évoqué précédemment n'intervient plus, on peut aussi amplifier le signal proportionnel à z .

5. Prise de Terre

Réponses : $R_b = \rho \frac{\ell}{S}$; $S(r) = 2\pi(r^2 + rL)$; $R_s = \frac{\rho}{2\pi} \int_{r_T}^{\infty} \frac{dr}{(L+rr)}$, après réduction en éléments simples on a $R_s = \frac{\rho}{2\pi L} \ln(1 + \frac{L}{r_T}) = 30,3 \Omega$; $R_c = \frac{1}{\sigma} \frac{4d}{\pi D^2} = 1,7 \times 10^{-3} \Omega$ résistance très petite devant R_s ; $R_{n+1} = \frac{R_n R_s}{R_n + R_s} + R_c$, à la limite $R_\infty = \frac{R_\infty R_s}{R_\infty + R_s} + R_c$ d'où $R_\infty = \frac{1}{2}(R_c + \sqrt{R_c^2 + 4R_c R_s})$ avec $R_c \ll R_s$ on a $R_\infty \simeq \sqrt{R_c R_s}$, la résistance infinie tend est $R_\infty \simeq 0,23 \Omega$, si l'on néglige la résistance du câble on peut considérer que les résistances R_s sont en parallèles, deux suffisent pour passer en dessous de 25Ω puisque $R_s \parallel R_s = R_s/2 \simeq 15 \Omega$.

6. Conduction électrique dans un milieu granulaire

Réponses : la résistance est inversement proportionnelle à la section. Cela est logique parce que plus la section est petite plus le débit de charge sera difficile à faire passer. En ce qui concerne la proportionnalité de la résistance électrique avec la longueur, il ne faut pas oublier que le régime permanent pour lequel on définit la notion de résistance est un régime de déplacement des charges pour lequel les frottements fluides qui modélisent les chocs avec les autres entités du conducteur compensent la force électrique à l'origine du mouvement de ces charges. Plus le déplacement est long, plus le travail résistant de ces forces de frottements est important. Il est donc aussi logique que la résistance traduise cela. On a $\rho = \frac{RS}{L}$, la résistivité s'exprime donc en $\Omega \cdot m$.

Si les boules ne sont pas au contact l'une avec l'autre, la résistance électrique est infinie puisque les charges sont supposées ne pas traverser l'isolant entre les deux. On a donc $R_{\delta > 2r} \rightarrow \infty$. S'il y a contact, c'est la section au niveau du contact qui sera primordiale pour la valeur de la résistance électrique. La résistance électrique sera plutôt élevée, nettement plus grande que celle d'un ampèremètre et s'approchant sans doute de celle du voltmètre. Le montage à réaliser est un montage longue dérivation comme celui réalisé à la figure 1.

Avec la loi fournie pour la force F , on passe en échelle log (à base 10). On peut donc écrire que $\log F = 1 + \frac{3}{2} \log d$. La distance totale est $d_{tot} = (N-1)d$. On passe là aussi en échelle log. On obtient $\log d_{tot} = \log d + \log(N-1)$. On obtient la relation $\log d_{tot} = \frac{2}{3} \log F - \frac{2}{3} A + \log(N-1)$. La pente sur le graphique proposé doit être $\frac{2}{3}$. C'est bien ce que l'on constate puisque pour 3 décades en abscisse, on voit une progression de la droite de 2 décades. En s'appuyant sur le théorème de PYTHAGORE, on peut écrire que $a^2 = r^2 - (r - \frac{d}{2})^2 = rd - \frac{d^2}{4}$. En restant à l'ordre le plus bas, on a bien $a_{g\acute{e}om} = \sqrt{rd}$. Avec les informations fournies par l'énoncé, on peut écrire $2a^2 = rd = r \left(\frac{3(1-\nu^2)F}{E\sqrt{2r}} \right)^{2/3}$. En transformant cette égalité, on arrive à $a = \left(\frac{3(1-\nu^2)Fr}{4E} \right)^{1/3}$. Si l'on regarde le graphique, on voit qu'une valeur de $F = 100 \text{ N}$ est bien située dans l'intervalle des forces explorées. L'énoncé

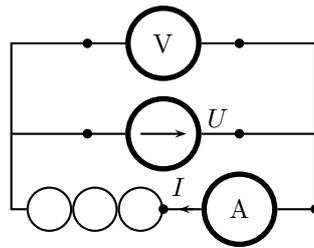


FIGURE 1 – Montage dit longue dérivation

dit que $r = 4 \text{ mm}$, on peut donc faire l'application numérique, on trouve $a = 0,11 \text{ mm}$. L'écrasement est assez modeste.

La bille présente une section πr^2 alors que pour le contact, c'est $\pi a_{\text{g\^eom}}^2 = \pi r d \ll \pi r^2$. La résistance du contact est nettement plus grande que celle intrinsèque de la bobine. On a $d = 5,2 \times 10^{-5} \text{ m}$. Cela permet de dire que $\frac{R_{\text{contact}}}{R_{\text{bille}}} = \frac{r}{d} \simeq 80$. La résistance évolue en $\frac{1}{a^2}$ et a évolue en $F^{1/3}$. On peut en déduire que la résistance évolue en $F^{-2/3}$ et donc $R = \beta F^{-2/3}$. Si l'on passe en échelle logarithmique, on peut écrire que $\log R = \log \beta - \frac{2}{3} \log F$. On constate une décroissance de 4,5 décades pour une évolution de la force F de 3 décades. La pente du graphique est donc $-\frac{4,5}{3} = -\frac{3}{2}$. Cela ne correspond pas à la loi théorique qui prévoyait une pente de $-\frac{2}{3}$. C'est, selon toute vraisemblance, lié à la difficulté de modélisation de ce qu'il se passe au niveau du contact et donc de l'écrasement des sphères.

7. Charge la plus rapide

Réponses : Le temps caractéristique de charge ou de décharge d'un circuit de type RC est $\tau = R_{eq} C_{eq}$. Il faut donc minimiser le produit de la résistance par la capacité. En série, les résistances s'additionnent, pour les capacités c'est en parallèle. Pour une association parallèle de deux résistances, on a $R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Si l'on met deux résistances en parallèle, on a $R_{eq} = R/2$. C'est la plus petite des valeurs de résistances. Pour les condensateurs, c'est l'association en série qui va être importante pour minimiser la capacité puisque $C_{eq} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2}$. On a $C_{eq} = C/2$. Le circuit le plus rapide possède donc un temps caractéristique de charge $\tau_r = \frac{RC}{4}$. La bonne réponse est d).

8. Flash d'éclairage routier

Réponses : avec la lampe éteinte, on a un simple circuit RC alimenté par la tension E . Lorsque la lampe éclaire, il faut la remplacer par une résistance électrique sans doute faible pour assurer un courant élevé et une décharge rapide du condensateur, ce qui fait que le flash est très court par rapport à la période des flashes. Cette période est $T = \frac{60}{70} \text{ s}$. Prenons comme date $t = 0$, le début de l'extinction. La tension aux bornes du condensateur étant continue, la tension u aux bornes de la lampe (et du condensateur) est $u(t = 0) = U_e$. L'équation différentielle de charge du condensateur est, à partir de ce moment-là, $RC \frac{du}{dt} + u = E$. La solution est $u(t) = (U_e - E) \exp -\frac{t}{\tau} + E$ avec $\tau = RC$. La date où la lampe se rallume est t_a telle que $u(t_a) = U_L$. On a donc $t_a = RC \ln \frac{E - U_e}{E - U_L}$. La durée d'allumage étant très brève, on va donc considérer que la période du signal est assimilable à la durée t_a . On en déduit que la résistance doit vérifier $R = \frac{T}{C \ln \frac{E - U_e}{E - U_L}}$. On trouve $R \simeq 430 \text{ k}\Omega$.

9. Régime critique

Réponses : $i_1 = i_2 = i = 0, u = 0$; $i_1 = 0, i_2 = i = \frac{E}{2R}, u = \frac{E}{2}$; dans a) u diverge, dans c) en régime permanent $u \neq \frac{E}{2}$, dans d) $\frac{1}{C}$ n'est pas un temps; $(\frac{1}{RC} + \frac{R}{L})^2 = \frac{8}{LC}$; $R = 59 \Omega$ ou $R = 341 \Omega$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}} = 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $u = \frac{E}{2} [1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)]$; $\tau_{1\%} \simeq \frac{\ln 100}{\omega_0} \simeq 5 \times 10^{-3} \text{ s}$.

10. Réseaux R, L, C parallèle

Réponses : $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{LC} \frac{e_0}{R}$, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, continuité de i_L et u_C ou bien la rupture de tension est assimilée à un signal de fréquence infinie donc la bobine a une impédance infinie et le condensateur est un fil, $i_{0+} = \frac{e_0}{R}$ et $-RC \frac{di}{dt}_{0+} = \frac{e_0}{R}$, $i(t) = \frac{e_0}{R} (1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \exp(-2\omega_0 t) \text{sh}(\omega_0 \sqrt{3} t))$; critique si $R = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$, $q(t) = C e_0 [1 - (1 + \omega_0 t) \exp(-\omega_0 t)]$.

11. Antirésonance

Réponses : $Z = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$ et $Z^2(\omega) = \frac{R^2 + L^2\omega^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2 C^2 \omega^2}$; $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, en dérivant $Z^2(\omega)$ on trouve bien l'expression appropriée, on a $\alpha = 10^{-6}$ d'où $\omega_m \simeq \omega_0$; $Z = R$ pour $\omega = 0$ et $Z = 0$ pour $\omega \rightarrow \infty$, $|Z|$ passe

forcément par un maximum donc $|z|$ par un minimum d'où le terme d'antirésonance ; on a $\underline{Z}i = (R + jL\omega)i'$ d'où $i' = \frac{i}{(1-LC\omega^2)+jRC\omega}$; $I' \simeq \frac{I}{RC\omega_0} = I \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ d'où $I' = 10^3 I$.

12. Ligne à retard

Réponses : $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$ en BF $|\underline{H}| = 1$ et en HF $|\underline{H}| = 0$, idem pour $\underline{H} = \frac{i_s}{i_e}$, $\alpha = \delta = 1 - \frac{LC\omega^2}{2}$, $\beta = -jL\omega(1 - \frac{LC\omega^2}{4})$, $\gamma = -jC\omega$, circuit ouvert en BF $u_s = u_e$ en HF $u_s = \frac{1}{1 - \frac{LC\omega^2}{2}} u_e \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \infty$, court-circuit en BF $i_s = i_e$ en HF $i_s = \frac{1}{1 - \frac{LC\omega^2}{2}} i_e \rightarrow 0$ si $\omega \rightarrow \infty$, matrice inverse $\text{Det} = \alpha\delta - \beta\gamma = 1$ et $\begin{bmatrix} u_e \\ i_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta & -\beta \\ -\gamma & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_s \\ i_s \end{bmatrix}$, $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$, à l'ordre 2 $\frac{u_s}{u_e} = \frac{1}{1 - \frac{LC\omega^2}{2} + j\frac{L\omega}{R}}$, $\varphi(\omega) = -\arctan \frac{1}{\frac{1}{\omega\sqrt{LC}} - \frac{\omega\sqrt{LC}}{2}}$, à l'ordre le plus bas $\varphi(\omega) = -\arctan \omega\sqrt{LC}$, retard τ de l'ordre de \sqrt{LC} .

13. Filtrage par un pont de Wien

Réponses : en basse fréquence les dipôles sont équivalents à des résistances le pont diviseur donne $\frac{u_s}{u_e} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{10}$ puisque le gain est de -20 dB, en haute fréquence, c'est le contraire les dipôles sont équivalents à des condensateurs, $\frac{u_s}{u_e} = \frac{C_1}{C_1 + C_2} = \frac{1}{10^4}$ puisque le gain est de -80 dB, on trouve $R_1 = 9R_2$ d'où $R_2 = 10$ kΩ et $C_2 \simeq 10^4 C_1$ d'où $C_1 = 100$ μF, pour $f_1 = 10$ kHz on a par la linéarité un gain de -60 dB donc une division par 10^3 de l'amplitude, la seconde harmonique est $f = 20$ kHz et $\log \frac{f}{f_0} = 3 + \log 2$, le gain par linéarité est -66 dB ce qui correspond à une multiplication par 5×10^{-4} , on obtient donc une amplitude de 6 mV pour le fondamental et 2 mV pour la première harmonique, pour le signal de fréquence 10 Hz, on a un gain de -20 dB donc une division par 10 de l'amplitude qui sera de 1 V, pour 100 kHz, on aura un gain de -80 dB donc une division par 10^4 de l'amplitude qui ne sera plus que de 1 mV, on a filtré très nettement le signal basse fréquence pour le débarrasser de la haute fréquence qu'il comportait.

14. Caractère dérivateur d'un filtre et résonance

Réponses : La sortie étant à vide, on utilise la formule du pont diviseur de tension, d'où $\underline{H} = \frac{v_s}{v_e} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$. On pose la fréquence réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et le facteur de qualité $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$. Alors, $\underline{H} = \frac{-x^2 + \frac{jx}{Q}}{-x^2 + \frac{jx}{Q} + 1}$. On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-haut d'ordre 2. On peut le vérifier grâce à l'étude du comportement asymptotique basse fréquence (BF) et haute fréquence (HF) : $G_{dB,BF} = 20 \log \frac{x}{Q}$ et $\varphi_{BF} = \frac{\pi}{2}$, $G_{dB,HF} = 0$ et $\varphi_{HF} = 0$. Ce filtre présente une pente en gain BF de 20 dB/dec et ce comporte donc, à basse fréquence, de façon analogue à un filtre passe-haut d'ordre 1. Le montage est dérivateur dès lors que sa fonction de transfert vaut à peu près $\underline{H}_{deriv} = H_0 jx$ où $H_0 \in \mathbb{R}^*$. D'après l'étude asymptotique précédente, cela ne peut être le cas qu'en basse fréquence et, en cherchant de ce côté là, on tire les conditions $x^2 \ll \frac{x}{Q} \ll 1$. Cela revient à dire que l'on doit avoir $\frac{\omega}{\omega_0} \ll Q$ si $Q \leq 1$ ou $\frac{\omega}{\omega_0} \ll \frac{1}{Q}$ si $Q \geq 1$. Cette étude pouvait être aussi menée dans le domaine temporel en écrivant l'équation différentielle associée à la fonction de transfert et en étudiant les ordres de grandeur des divers termes de cette équation (pour la ramener à une dérivation simple). On obtient le tracé suivant de la figure 2.

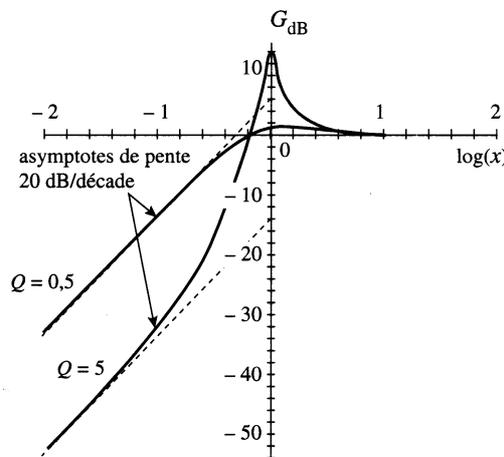


FIGURE 2 – Diagramme de BODE

Ce tracé est en accord avec l'étude asymptotique déjà réalisée. On calcule $\omega_0 = 6,7 \cdot 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $f_0 = 10$ kHz. De plus, $Q = 0,5$ pour $R = 140 \Omega$ et $Q = 5$ pour $R = 14 \Omega$. Pour $Q = 0,5$, le montage effectue bien la dérivation

attendue : on prévoit que $V_{s,m} \simeq \frac{4f}{Q\omega_0} V_{e,m} \simeq 12 \text{ mV}$ (ok sur le graphe). Pour $Q = 5$, le caractère dérivateur du montage est masqué par un signal pseudo-périodique amorti lié au pic de résonance de la courbe de gain. C'est le même problème que pour un filtre passe-bande : les harmoniques de fréquence voisine à f_0 sont trop amplifiées. Dans un signal créneau, l'amplitude des harmoniques non nulles décroît en $1/n$. Les harmoniques de rang n voisin de 100 sont sur-amplifiées de la distance entre l'asymptote et le maximum, soit de près de 30 dB (soit environ 31 fois). Leur amplitude devrait être le centième de l'amplitude du fondamental si le signal de sortie était un créneau. Ici, leur amplitude est du même ordre de grandeur que celle du fondamental.

15. Comparaison de l'efficacité de deux filtres

Réponses : BF C circuit ouvert, HF C fil, passe-bas, 2 équations $\frac{e}{R} + \frac{s}{R} + jC_2\omega s = V_A(\frac{2}{R} + jC_2\omega)$ et $\frac{V_A}{R} = (\frac{1}{R} + jC_1\omega)s$, non passe-bas, non homogène, non passe-bas, si $C_2 \rightarrow 0$ $T = 1$ alors que diviseur de tension donne $T = \frac{1}{1+2jRC_1\omega}$, $|T_1|$ pente à -40 dB par décade meilleur filtre que -20 dB par décade.

16. Démodulation de fréquence

Réponses : $H = \frac{1-j\omega/\omega_0}{1+j\omega/\omega_0}$; $\varphi(\omega) = -2 \arctan(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})$; en remplaçant C_D par R_D et en supprimant le fil court-circuit qui ramène l'entrée + sur la tension d'entrée du montage précédent, on obtient un soustracteur; $\underline{u} = (1 - H)\underline{u}_e$, au voisinage de $\omega = \omega_0$ amplitude proportionnelle à $\sqrt{2}(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})$.

17. Impédances d'entrée

Réponses : $Y_a = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_1 R_2 C(j\omega)}$, $Y_b = -\frac{1}{R}$; équivalence avec une bobine idéale (sans résistance) $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{R}$ et $Y_t = \frac{1}{R_1 R_2 C(j\omega)}$; $(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R}) \frac{d^2 u}{dt^2} + [\frac{1}{\tau}[(1 - \frac{\mu_0}{2})(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}) + (1 + \frac{\mu_0}{2})\frac{1}{R}] + \frac{1}{R_1 R_2 C}] \frac{du}{dt} + (1 - \frac{\mu_0}{2}) \frac{1}{\tau} \frac{u}{R_1 R_2 C} = \frac{d^2 i}{dt^2} + (1 - \frac{\mu_0}{2}) \frac{1}{\tau} \frac{di}{dt}$; oscillateur à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{R_1 R_2 C C_0}}$.

18. Générateur différentiel de courant

Réponses : En régime linéaire pour l'AO idéal, $u_+ = u_-$ donc $R_2 i = -R'_2 i'_e$, soit $i = -\frac{R'_2}{R_2} i'_e$. La loi des nœuds en S s'écrit $i_s = i + i_e = -\frac{R'_2}{R_2} i'_e + i_e$ soit $i_s = -\frac{R'_2}{R_2} \frac{u'_e - u_s}{R'_1} + \frac{u_e - u_s}{R_1}$ d'où $i_s = \frac{1}{R_1} u_e - \frac{R'_2}{R'_1 R_2} u'_e + (\frac{R'_2}{R'_1 R_2} - \frac{1}{R_1}) u_s$. Le dispositif est un générateur de courant si i_s ne dépend pas de la charge R_u , donc de u_s . On en déduit simplement la condition $R_1 R'_2 = R'_1 R_2$. Dans ce cas, le circuit est bien un générateur de courant commandé par la tension différentielle ($u_e - u'_e$) puisque $i_s = \frac{u_e - u'_e}{R_1}$. La stabilité du système en régime libre s'étudie en éteignant les générateurs de commande. On doit s'assurer qu'alors aucun parasite ne peut amener le système à saturation. Pour cela, on regarde si la solution $u_{s0}(t)$ reste bornée dans le régime libre. Cela revient à brancher les résistance R_g sur chacune des entrées sans mettre de source de tension. Les tensions des entrées inverseuse et non inverseuse s'établissent par diviseurs de tension : $u_- = \frac{R+R_g}{R+R_g+R} u_{s0} = k_- u_{s0}$ et $u_+ = \frac{(R+R_g)\parallel R_u}{(R+R_g)\parallel R_u+R} u_{s0} = k_+ u_{s0}$ avec $\frac{1}{k_+} = 1 + \frac{R}{R_u} + \frac{R}{R+R_g} > 1 + \frac{R}{R+R_g} = \frac{1}{k_-}$ donc $k_+ < k_-$. L'équation différentielle de la tension de sortie de l'AO s'écrit alors $\tau \frac{du_{s0}}{dt} + [1 + \mu_0 (k_- - k_+)] u_{s0} = 0$. Le coefficient de u_{s0} étant positif, la solution de cette équation différentielle est bornée, donc le circuit est stable.

19. Oscillateur

Réponses : $H = \frac{u_2}{u_1} = \frac{(jRC\omega)^3}{1+5(jRC\omega)+6(jRC\omega)^2+(jRC\omega)^3}$, passe-haut à 60 dB par décade; $u_2(t) = \alpha \exp \frac{x_1 t}{RC} + \beta \exp \frac{x_2 t}{RC} + \gamma \exp \frac{x_3 t}{RC}$; montage à AO avec un suiveur puis un inverseur tel que $\frac{u_1}{u_2} = -\frac{R_2}{R_1} = k < 0$; l'équation différentielle est : $(1 - k)R^3 C^3 \frac{d^3 u_2}{dt^3} + 6R^2 C^2 \frac{d^2 u_2}{dt^2} + 5RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = 0$, $k_0 = -29$, solution $u_2(t) = \alpha \cos(\frac{t}{\sqrt{6RC}}) + \beta \sin(\frac{t}{\sqrt{6RC}})$, $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{6RC}}$.

20. Filtre et oscillateur

Réponses : $H(j\omega) = \frac{1+\frac{R_2}{R_1}}{2+jR_3(C\omega-\frac{2}{L\omega})}$, filtre passe-bande centré en $\omega_0 = \sqrt{\frac{2}{LC}}$; $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{1}{R_3 C} (1 - \frac{R_2}{R_1}) \frac{du_s}{dt} + \frac{2}{LC} u_s = 0$; le coefficient de la dérivée première s'annule lorsque $R_1 = R_2$, on a un oscillateur à ω_0 .

21. Caractérisation d'une impédance

Réponses : on a $\underline{v} = -\frac{Z}{R}\underline{e}$ d'où $v(t) = -\frac{\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{R} E_0 \cos(\omega t + \varphi)$ avec $\tan \varphi = \frac{B(\omega)}{A(\omega)}$; $u(t) = ke(t)v(t) = -kE_0^2 \frac{\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{R} \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$ que l'on peut écrire $u(t) = -k \frac{E_0^2 \sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{2R} (\cos(2\omega t + \varphi) + \cos \varphi)$; $\frac{s}{\underline{u}} = \frac{1}{1+jR_1 C_1 \omega}$ est intégrateur pour $R_1 C_1 \omega \gg 1$, intégrer revient à calculer la moyenne de $u(t)$ et donc à obtenir en sortie $s = -k \frac{E_0^2 \sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}{2R} \cos \varphi$, or $\cos \varphi = \frac{A(\omega)}{\sqrt{A^2(\omega)+B^2(\omega)}}$ d'où $s = -kE_0^2 \frac{A(\omega)}{2R}$; pour accéder à la partie imaginaire de \underline{Z} , on peut envisager de déphaser $v(t)$ de $\pi/2$ pour gérer $\varphi - \frac{\pi}{2}$ plutôt que φ ensuite, un circuit déphaseur est réalisable avec un amplificateur opérationnel.

B. Puissance

22. Conducteur ohmique

Réponses : \vec{e}_z est le vecteur perpendiculaire à la section du conducteur, $I = \vec{j} \cdot ab\vec{e}_z = jab$, on a $\vec{j} = \frac{I}{ab}\vec{e}_z$ avec $j = 2,5 \times 10^2 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$, $\rho_l = -e\mathcal{N}_A \frac{\mu_{Ag}}{M_{Ag}} = -8,3 \times 10^9 \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$, $\vec{j} = \rho_l \vec{v}_l$ avec $\vec{v}_l = -v_l \vec{e}_z$ et $v_l = 3,0 \times 10^{-8} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \vec{j}$, $E = 4,0 \times 10^{-6} \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$, la puissance de la force électrique est $P_e = -e\vec{E} \cdot \vec{v}_l$, pour la puissance volumique, on doit encore multiplier par la densité volumique d'électrons libres $n_l = \frac{\rho_l}{-e}$, on trouve que $p_{vol} = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma \vec{E}^2 = \frac{\vec{j}^2}{\gamma} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$.

23. Adaptation d'impédance

Réponses : $I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_u + R_g)^2 + (X_u + X_g)^2}}$; $P_u = R_u I^2$; $R_u = R_g$ et $X_u = -X_g$.

24. Lignes Haute Tension

Réponses : $I_1 = \frac{P}{U_1} = 250 \text{ A}$ et $I_2 = 1000 \text{ A}$, $S_1 = \frac{I_1}{j} = 357 \text{ mm}^2$ et $S_2 = 1428 \text{ mm}^2$, $R_1 = \rho \frac{\ell}{S_1} = 7,3 \Omega$ et $R_2 = 1,82 \Omega$, $P_{J1} = R_1 I_1^2 = 0,46 \text{ MW}$ et $P_{J2} = 1,82 \text{ MW}$, $\eta_1 = 99,54\%$ alors que $\eta_2 = 98,18\%$, la tension de 400 kV est la plus appropriée pour le transport sur de longues distances.

25. Alimentation d'un moteur

Réponses : $Z_m = r + jL\omega$ et $|Z_m| = \sqrt{r^2 + L^2\omega^2} = 31,6 \Omega$, le déphasage est $\cos \varphi = \frac{r}{|Z_m|}$ ou $\tan \varphi = \frac{L\omega}{r} = 3$ d'où $\varphi = 71,6^\circ$; $P_m = rI^2$ avec $I = \frac{E_0}{\sqrt{(R_g + r)^2 + L^2\omega^2}} = 0,18 \text{ A}$ d'où $P_m = 0,32 \text{ W}$; $P_{gen} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} E_0 \sqrt{2} \cos \omega t I \sqrt{2} \cos(\omega t + \psi) dt = E_0 I \cos \psi$ avec $\cos \psi = \frac{R_g + r}{\sqrt{(R_g + r)^2 + L^2\omega^2}} = 0,89$, on trouve $P_{gen} = 1,92 \text{ W}$, le rendement du transfert de puissance est $\eta = \frac{P_m}{P_{gen}} = 17\%$.

26. Une installation domestique

Réponses : $I_{12} = 20,5 \text{ A}$; $I_3 = \frac{P_3}{U \cos \varphi_3}$; $Z = R + jL\omega$ $\arg(Z) > 0$ $Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2}$; $\cos \varphi_3 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}$ avec $P_3 = UI_3 \cos \varphi_3$ et $U = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} I_3$, on trouve $P_3 = RI_3^2$; $E_{lav} = 400 \times 3600 = 1,44 \times 10^6 \text{ J}$; $E_{chauf} = 5 \times 4,18 \times 10^3 \times 45 = 9,4 \times 10^5 \text{ J}$ cela représente 65% de la puissance totale, $P_{moy\ chauf} = \frac{E_{chauff}}{\Delta t} = 209 \text{ W}$; $I'_3 = \frac{P_3}{U \cos \varphi_3} = 12,8 \text{ A}$ et $I'_4 = 10,4 \text{ A}$; $I' = \sqrt{(I'_3 \cos \varphi_3 + I'_4 \cos \varphi_4)^2 + (I'_3 \sin \varphi_3 + I'_4 \sin \varphi_4)^2}$, on trouve $I' \simeq 23,0 \text{ A}$, il y a sans doute un danger avec une multiprise qui n'est pas forcément prévue pour une telle intensité!

C. Régime non linéaire

27. Détecteur de crête

Réponses : Voir la figure 3, décroissance exponentielle après une crête plus ou moins rapide en fonction de R , $RC \gg \frac{1}{f}$ $R = 100 \text{ k}\Omega$ possible, amplificateur inverseur à AO de gain $-\frac{R_2}{R_1}$ avec $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

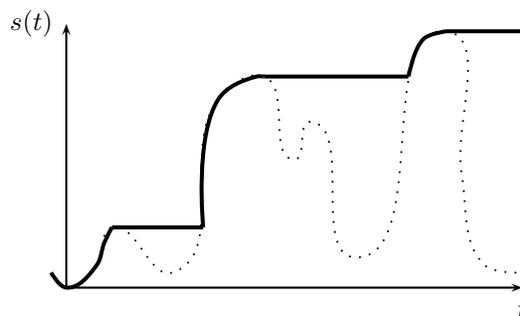


FIGURE 3 – Détecteur de crête pratique - Solution

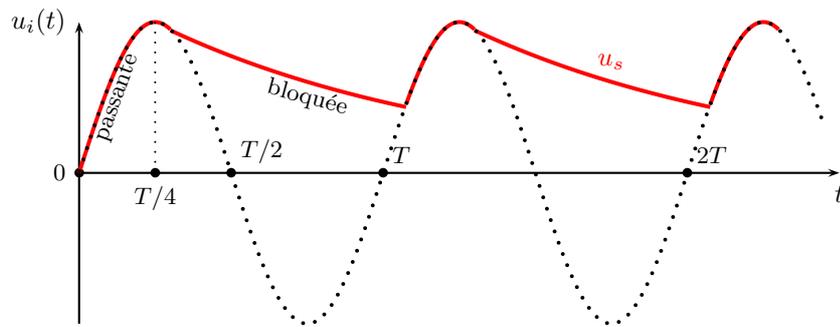
28. Détecteur de crête et modulation

Réponses : diode passante $u_e = u_s$ tant que $i_d \geq 0$ or $i_d = \frac{U_{e0}}{R} [\sin \omega t + \omega \tau \cos \omega t] \simeq C\omega u_{e0} \cos \omega t$, $i_d \geq 0$ jusqu'à environ $\frac{T}{4} = \frac{\pi}{2\omega}$, ensuite diode bloquée, $u_s = u_{e0} \exp -\frac{t - \frac{T}{4}}{\tau}$ tant que $u_e < u_s$, quasiment jusqu'à $t = \frac{5T}{4}$ et ainsi de suite, $u_s(t) = u_{e0}(t)$, u_s suit la crête de $u_e(t)$.

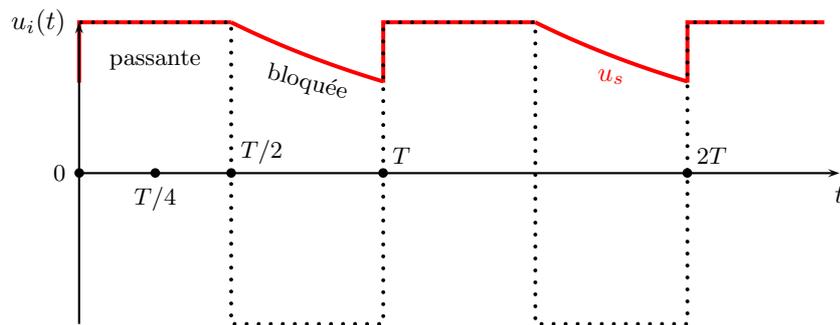
29. Accumulateur

Réponses :

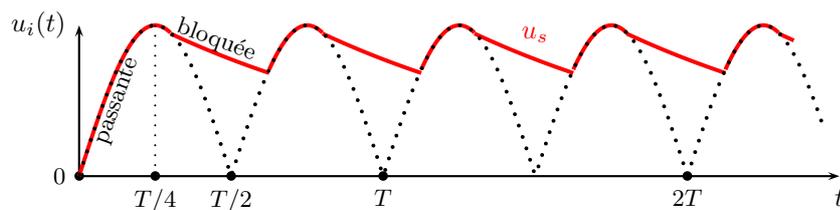
- On suppose que le condensateur n'est pas chargé à la date $t = 0$ et que la tension $u_e(t) = u_0 \sin 2\pi ft$. Comme $u_0 > 0$ et que le condensateur n'est pas chargé à la date $t = 0$, le courant traversant la diode sera nécessairement positif $i_d > 0$ au départ. On a donc une diode équivalente à interrupteur fermé avec $u_d = 0$. On a, dans un premier temps, $u_s = u_e$. Ce régime va persister jusqu'à ce que l'intensité $i_d = 0$. On a donc $i_d = \frac{u_s}{R} + C \frac{du_s}{dt} = \frac{1}{R}(u_e + RC \frac{du_e}{dt})$. Avec l'expression de la tension retenue, on obtient $i_d = \frac{u_0}{R}(\sin 2\pi ft + 2\pi f RC \cos 2\pi ft)$. L'intensité s'annule à la date t_b telle que $\tan 2\pi ft_b = -2\pi f RC < 0$. La première fois que c'est possible se produit entre $t = \frac{1}{4f}$ et $t = \frac{1}{2f}$. Pour le comprendre, il suffit de représenter la fonction tangente et de l'intersecter avec une droite horizontale de valeur négative. Le programme fourni au candidat était réalisé pour $R = 1 \text{ k}\Omega$. Si on commence par retenir cette valeur, on trouve $\tan 2\pi ft_b = -\pi$ puisque $C = 10 \text{ }\mu\text{F}$ et $f = 50 \text{ Hz}$. On trouve alors numériquement que $t_b = 6 \text{ ms}$ c'est-à-dire 1 ms après le quart de période puisque la période est $T = 20 \text{ ms}$. Cela signifie que la tension $u_e = u_s$ a commencé à décroître depuis le maximum atteint au quart de période. La diode est ensuite bloquée pour $t > t_b$. On trouve la tension à laquelle cela se produit en écrivant que $\tan 2\pi ft_b = -\pi = \frac{\sin 2\pi ft_b}{\sqrt{1 - \sin^2 2\pi ft_b}}$ d'où $\sin 2\pi ft_b = \frac{\pi}{\sqrt{1 + \pi^2}}$. On trouve que l'on a $u_s(t_b) = 0,953u_0$. Lorsque la diode est bloquée, on a l'équation différentielle $RC \frac{du_s}{dt} + u_s = 0$ qui va traduire la décharge du condensateur dans la résistance. La tension obéit alors à l'équation $u_s(t) = 0,953u_0 \exp -\frac{t-t_b}{RC}$. Comme la diode va être toujours bloquée jusqu'à, au moins, $t = 20 \text{ ms}$, c'est-à-dire jusqu'à la période du signal d'entrée. En effet, on a $u_d = u_e - u_s < 0$ puisque il n'y aura intersection de u_s à nouveau avec la tension u_e lorsque cette dernière sera redevenue positive. Pour se donner une idée du taux d'ondulation, on peut calculer $u_s(t = 20 \text{ ms})$. On trouve $u_s = 0,24u_0$! La tension de sortie sera encore plus basse encore lorsqu'il y aura à nouveau la diode passante mais cela suffit pour comprendre que u_s a perdu environ 75% de sa valeur. Le taux d'ondulation sera vraiment élevé ! Il faut que la décharge du condensateur en régime bloqué de la diode, soit beaucoup plus lent. On doit augmenter la valeur de la résistance. Considérons une résistance $R = a \text{ k}\Omega$ avec $a > 1$. La condition de blocage sera $\tan 2\pi ft_b = -a\pi$ et alors $\sin 2\pi ft_b = \frac{a\pi}{\sqrt{1 + a^2\pi^2}}$. Si on prend le cas où $a = 5$ et donc une résistance $R = 5 \text{ k}\Omega$, on trouve que le blocage s'effectue à $t_b = 5,2 \text{ ms}$. On se situe tout de suite après le maximum de la tension d'entrée au quart de période. La confirmation vient en calculant $u_e(t_b) = u_s(t_b) = 0,998u_0$. Si on étudie la phase bloquée, on a $u_s(t) = 0,998u_0 \exp -\frac{t-t_b}{\theta}$ avec $\theta = 50 \text{ ms}$. Cela permet de voir qu'après une période, on a $u_s(20 \text{ ms}) = 0,74u_0$. C'est mieux qu'avant mais pas encore suffisant. Il faut encore augmenter a . On considère alors que le blocage se produit à $t_b = 5 \text{ ms}$ au quart de période. On a $u_s = u_0$ au moment du blocage, ce qui fait qu'après on a $u_s(t) = u_0 \exp -\frac{t-t_b}{\theta}$ avec $\theta = a10 \text{ ms}$. On travaillera en ms avec $t_b = \frac{T}{4} = 5 \text{ ms}$. Le taux d'ondulation est $\tau = \frac{u_0 - u_{min}}{u_0 + u_{min}}$, on en déduit que $u_{min} = u_0 \frac{1-\tau}{1+\tau}$. La décroissance de la tension aux bornes du condensateur rattrape la montée de la tension d'entrée $u_e(t)$ lorsque $\exp -\frac{t-t_b}{\theta} = \frac{1-\tau}{1+\tau}$. On possède alors la relation $\theta = \frac{t-t_b}{\ln \frac{1-\tau}{1+\tau}}$. Nous recherchons θ mais la date t est encore inconnue. Il faut dire que cette date correspond à $u_0 \sin 2\pi ft = u_0 \frac{1-\tau}{1+\tau}$ pour $t \in]T, 5T/4[$. On peut donc écrire que $t = T(1 + \frac{1}{2\pi} \arcsin \frac{1-\tau}{1+\tau})$. Avec $t_b = T/4$, on peut donc écrire que la solution permettant de déterminer a et donc la valeur de la résistance est donnée par $\theta = \frac{T}{4} \frac{3 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1-\tau}{1+\tau}}{\ln \frac{1-\tau}{1+\tau}}$. Avec $\theta = 10a \text{ ms}$, $T = 20 \text{ ms}$, on trouve que $a = \frac{1}{2} \frac{3 + \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{1-\tau}{1+\tau}}{\ln \frac{1-\tau}{1+\tau}}$. On trouve numériquement $a = 18,6$. La résistance permettant d'obtenir le taux d'ondulation voulu est $R = 18,6 \text{ k}\Omega$. La figure 4 présente le principe du fonctionnement du circuit de redressement monoalternance et du filtrage réalisé par l'ensemble diode - circuit RC . On peut observer le phénomène d'ondulation en utilisant le fichier *Python* mis à disposition et en augmentant la résistance R , sur le schéma de la figure 4, on a $R = 4 \text{ k}\Omega$ ($a = 4$) ce qui est largement insuffisant pour assurer le taux d'ondulation requis et calculé avant mais cela permet de bien visualiser ce qu'il se passe.
- On a présenté le problème à la figure 4.
- Avec la tension créneau, on a une situation particulière puisque la diode est passante pendant toute la partie positive du signal et donc jusqu'à la date $t = T/2$, au départ, la charge du condensateur est instantanée en théorie, très rapide en pratique. Ensuite, dès que l'on bascule sur l'alternance négative du signal, on a une diode bloquée et donc une décroissance du signal en $u_s = u_0 \exp -\frac{t-T/2}{RC}$. La durée de la décroissance sera limitée à une demi-période puisque dès que $u_e = +u_0$, on a à nouveau une diode passante. On peut comprendre immédiatement que, pour une même résistance R par rapport au cas précédent, la décroissance entraînera une baisse plus petite de tension et donc un taux d'ondulation meilleur. Pour obtenir le bon taux d'ondulation, il faut une résistance telle que $u_{min} = u_0 \frac{1-\tau}{1+\tau} = u_0 \exp -\frac{T}{2\theta}$. Cela

FIGURE 4 – Redressement monoalternance et filtrage pour $R = 4 \text{ k}\Omega$

conduit à $a = \frac{1}{2fRC \ln \frac{1+\tau}{1-\tau}}$. On trouve numériquement $a = 10$ et donc $R = 10 \text{ k}\Omega$. C'est bien comme prévu plus faible que dans le cas précédent. La figure 5 montre la situation.

FIGURE 5 – Ondulation à partir d'un signal créneau pour $R = 4 \text{ k}\Omega$

4. Avec le pont de diodes, on applique une tension toujours positive où il y a toujours une alternance positive sinusoïdale, cela revient à appliquer $u_0 |\sin 2\pi ft|$.
5. Cela est avantageux encore parce que la durée de blocage de la diode sera plus courte que pour le redressement monoalternance puisque la remontée de la tension en valeur positive se fera après la date $T/2$ plutôt qu'après la date T . La résistance R sera plus petite pour un même taux d'ondulation que pour le redressement monoalternance. Voir la figure 6.

FIGURE 6 – Redressement double alternance et filtrage pour $R = 4 \text{ k}\Omega$

6. Si on tient compte de la résistance interne de la diode, il suffit de rajouter dans notre calcul cette résistance R pour travailler avec une résistance équivalente $R_{eq} = R_{diode} + R$.
7. On peut aussi utiliser un filtre de type passe-bas du premier ordre en sortie à condition que la fréquence de coupure soit petite devant f la fréquence du signal après le redressement par la diode ou par le pont de diodes. Si on passe à des signaux numériques, on peut proposer un filtre numérique passe-bas d'ordre élevé, on peut facilement atteindre des ordres comme 8.

30. Diode Zener

Réponses : $u' = ri - E$, i'' est le courant descendant dans R alors $u' = -Ri''$ et $i'' = i + i'$; il faut faire 3 hypothèses pour le régime de fonctionnement de la diode, diode bloquée $u' \in]-u_z, 0[$ alors $i' = 0$ et $i'' = i$ d'où $u' = -\frac{R}{R+r}E > 0$ ce cas est possible lorsque $0 < \frac{R}{R+r}E < u_z$ donc pour $0 < \alpha < 1 + \frac{r}{R}$, on suppose la diode passante en sens direct $u' = 0$ et $i' > 0$ avec $i'' = 0$ puisque $u' = 0$ donc $i < 0$ or $E = ri$ et $E > 0$ ce cas de figure est impossible avec un générateur de tension $E > 0$, on suppose la diode passante en inverse c'est-à-dire en mode ZENER on a donc $i' < 0$ et $i = \frac{E - u_z}{r} = (\alpha - 1)\frac{u_z}{r}$ et $i'' = \frac{u_z}{R}$ d'où $i' = \frac{u_z}{r}(1 + \frac{r}{R} - \alpha) < 0$ d'où

$\alpha > 1 + \frac{r}{R}$ cette condition est complémentaire de celle trouvée pour le fonctionnement bloquée; dans la partie bloquée on a $u' = -Ri = -\alpha \frac{R}{R+r} u_z$ et $i = \alpha \frac{u_z}{R+r}$, dans la partie ZENER, on aura $i = (\alpha - 1) \frac{u_z}{r}$ et $u' = -u_z$ dans la partie ZENER, voir les graphiques de la figure 7; la situation est intéressante lorsque l'on se situe dans la partie ZENER car la tension aux bornes de la diode est fixée à u_z , on a une alimentation stabilisée quel que soit le courant jusqu'à ce qu'il soit trop important et que la diode grille...

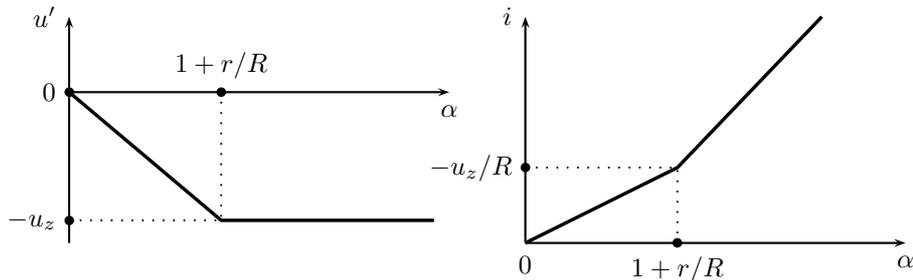


FIGURE 7 – Stabilisation de la tension

31. Enregistrement d'une figure d'interférences

Réponses : $u_{s1} = R_1 \beta \phi = R_1 \beta \phi_0 (1 + \cos 2\pi \frac{x}{\lambda})$; $u_{s1} = R_1 \beta \phi = R_1 \beta \phi_0 (1 + \cos 2\pi \frac{v_{ph}}{\lambda} t)$ de fréquence $f = \frac{v_{ph}}{\lambda}$; filtre passe-bas $\underline{H} = \frac{1}{1+jR_2C\omega}$, $f_c = \frac{1}{2\pi R_2C}$; $u_s = R_1 \beta \phi_0 \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+f^2/f_c^2}} \cos(2\pi ft - \arctan f/f_c) \right)$ en ne prenant pas en compte la solution homogène du régime transitoire; filtre coupe les parasites haute fréquence, pour mesurer f donc i , il faut choisir $f < f_c$.

32. Générateur de créneaux

Réponses : $v_+ = \pm \frac{V_{sat}}{2}$, $v_- = V_{sat}(1 - \exp -\frac{t}{RC})$ de $t = 0$ à $t = \tau_1 = RC \ln 2$, $v_- = V_{sat}(-1 + \frac{3}{2} \exp -\frac{t-\tau_1}{RC})$ de τ_1 à $\tau_1 + \tau_2$ avec $\tau_2 = RC \ln 3$, $v_- = V_{sat}(1 - \frac{3}{2} \exp -\frac{t-(\tau_1+\tau_2)}{RC})$ de $\tau_1 + \tau_2$ à $\tau_1 + 2\tau_2$, période $T = 2RC \ln 3$, phase décroissante $\tau_d = R_2C \ln 3$ et phase croissante $\tau_c = R_1C \ln 3$, période $T = (R_1 + R_2)C \ln 3$ et $\alpha = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$.