

Exercices : 02 - Analyse de Fourier.

— Solutions —

A. Signaux périodiques et séries de Fourier

1. Multiplication par un signal créneau

Réponses : $\frac{1}{2p+1}, (2p+1)f_0 \pm \frac{\omega}{2\pi}$.

2. Vibration quasi-monochromatique

Réponses : $A_0 \exp(i2\pi f_0 t)(1 + \cos \pi \Delta f t)$; si $\Delta f \ll f_0$ $\cos \pi \Delta f t$ est très lent devant $\cos 2\pi f_0 t$.

3. Non linéarité d'un amplificateur

Réponses : $[0; f_0; 2f_0; 3f_0], [0; f_0 \pm \frac{\Delta f}{2}; 2f_0 \pm \Delta f; 3f_0 \pm \frac{3\Delta f}{2}]$.

4. Effet d'un filtre passe-bande

Réponses : $H = \frac{1}{\sqrt{1+Q^2(\frac{f}{f_0}-\frac{f_0}{f})^2}}$, très sélectif $\Delta f_{1/2} = \frac{f_0}{Q}$, $f_e = f_0$, $\Delta f_{1/2} \rightarrow 0$, $f_e = f_0$ ou $f_e \pm f_m = f_0$, oui
fondamental sinusoïdal à 1200 Hz, créneau : sortie sinusoïdale si $f_e = 1200$ Hz, 400 Hz, 240 Hz, 80 Hz et 48 Hz,
dent de scie : sortie sinusoïdale si $f_e = 1200$ Hz, 600 Hz, 400 Hz, 300 Hz, 240 Hz, 200 Hz, 150 Hz, 120 Hz, 100 Hz,
80 Hz, 75 Hz, 60 Hz, 50 Hz, 48 Hz, 40 Hz.

5. Filtrage d'une tension créneau dissymétrique

Réponses : $u_e^{moy} = \alpha E = 4$ V, $T_0 = 0,02$ s, harmoniques d'amplitude décroissante $n = 3$ et $n = 6$ sont absentes du spectre car $\alpha n = 1$ ou 2 pour ces deux harmoniques, il manque les fréquences 150 Hz et 300 Hz, $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+jRC\omega}$, $f_c = \frac{1}{2\pi RC}$ d'où $R = \frac{1}{2\pi C f_c} = 16$ k Ω , c'est un filtre passe-bas, il laisse la moyenne intacte, la fréquence fondamentale voit son amplitude divisée par environ 5 comme elle était d'environ E/π , on est un peu en dessous du volt, la fondamentale est aussi déphasée, l'harmonique suivante est celle pour $n = 2$, sa fréquence est de 100 Hz, $|\underline{H}| \simeq \frac{1}{10}$ elle est fortement atténuée, elle est de l'ordre de 0,2 V, les harmoniques suivantes sont de contribution nettement moindre encore, finalement la tension de sortie est une tension sinusoïdale de fréquence f_0 d'amplitude environ 1 V et de moyenne 4 V avec une petite oscillation résiduelle à 100 Hz, on peut réaliser un passe-bande en mettant en série une bobine pour faire un circuit RLC série en prenant la tension de sortie aux bornes de R , si la fréquence centrale est 100 Hz, on récupère une oscillation sinusoïdale à cette fréquence, à 150 Hz on ne récupère rien car cette harmonique n'est pas présente dans le spectre du signal d'entrée puisque $\alpha n = 1$.

6. Tripleur de fréquence

Réponses : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{1}{R}(L\omega-\frac{1}{C\omega})} = \frac{1}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 5000$ rad \cdot s $^{-1}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = 100$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = 1667$ rad \cdot s $^{-1}$, on a $\omega_0 = 3\omega$, en réels on a $u_s(t) = -\frac{8E}{\pi^2}(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{H((2n+1)\omega)}{(2n+1)^2} \cos((2n+1)\omega t + \varphi((2n+1)\omega)))$, la bande passante du filtre est très réduite $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = 50$ rad \cdot s $^{-1}$, seule l'harmonique $n = 1$ de pulsation $\omega = \omega_0$ passera dans le filtre, toutes les autres sont très atténuées, on peut envisager de constituer un analyseur de FOURIER si l'on peut faire varier finement, par exemple, la valeur de la capacité C du condensateur.

7. Associer un signal et un spectre

Réponses : Les signaux de valeur moyenne d'évidence non nulle sont u_2, u_3 et u_4 et seuls trois spectres présentent une composante continue non nulle : \hat{v}_a, \hat{v}_c et \hat{v}_d . On doit donc associer ces trois signaux à ces trois spectres ! On constate que u_2 présente des discontinuités donc comporte des harmoniques de rang élevé en plus grande importance que pour u_3 qui n'a que des discontinuités de pentes et que u_4 qui n'a pas de discontinuités. De plus, on voit que le signal u_4 semble être composé de la somme de deux sinusoïdes principales (en plus de la composante continue). Finalement $\hat{u}_2 = \hat{v}_d, \hat{u}_3 = \hat{v}_c$ et $\hat{u}_4 = \hat{v}_a$. Il reste à traiter les trois signaux restants u_1, u_5 et u_6 . Ce dernier est le seul de moyenne nulle présentant des discontinuités, donc il présente le spectre le plus riche qui est \hat{v}_e (avec seulement les harmoniques de rang impair par propriété de type $s(t+T/2) = -s(t)$...). Enfin, le signal u_5 est plus déformé par rapport au fondamental seul que le signal u_1 , donc son spectre est plus riche et on peut conclure : $\hat{u}_6 = \hat{v}_e, \hat{u}_5 = \hat{v}_f$ et $\hat{u}_1 = \hat{v}_b$. Tous les signaux sont *a priori* périodiques de fréquence fondamentale 1 kHz (vu les raies dessinées par l'élève...). L'élève aurait pu préciser les périodes de 1 ms (environ) sur les figures des signaux temporels... Attention, un signal avec des discontinuités contient de nombreux harmoniques de rang élevé mais pas forcément de forte amplitude ! Le premier filtre qui donne \hat{v}_g est probablement un filtre passe-bande non linéaire de fréquence centrale $f_0 \simeq 4,5$ kHz car les basses et hautes fréquences sont atténuées et il existe de nouvelles composantes harmoniques ! Le second filtre doit être de type passe-bas linéaire de fréquence de coupure de l'ordre de 3 ou 4 kHz (atténuation uniquement dans les plus

hautes fréquences, sans ajout de composantes). Le troisième filtre doit être de type passe-haut linéaire d'ordre assez élevé de fréquence de coupure autour de 1 kHz (suppression de la composante continue et pas d'ajout de composante). On peut aussi imaginer obtenir le même spectre final avec un filtre passe-bande à bande bien plus large que celle rendue sur le graphe de \hat{v}_i (on ne voit alors pas l'atténuation aux plus hautes fréquences).

8. Détection de signaux micro-ondes

Réponses : Un filtre linéaire ne fournit un signal constant non nul que si il ne laisse passer qu'une composante continue existante (filtrage passe-bas moyennneur). Or, celle-ci ne donne pas du tout une image de l'amplitude A du signal sinusoïdal. L'opération de mesure directe de A par filtrage linéaire est donc impossible. La représentation graphique du signal de sortie est effectuée sur la figure 1 (le signal d'entrée $e(t)$ est en pointillés, avec choix d'origine des temps à son maximum) :

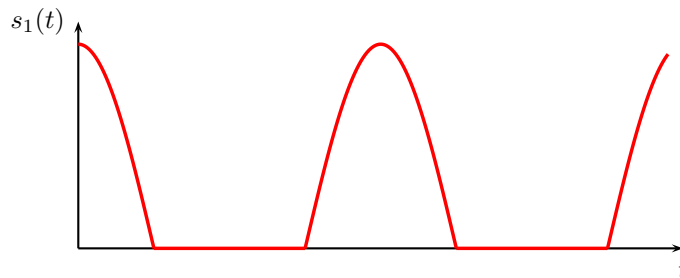


FIGURE 1 – Redressement mono-alternance

On parle de *redresseur simple* (ou *redresseur simple alternance*) puisque seules les arches sinusoïdales positives sont conservées (sinon le signal est nul). Le signal redressé a la même fréquence f que la sinusoïde d'entrée. Son spectre comprend les trois premières raies suivantes : une composante constante (fréquence nulle) correspondant à la valeur moyenne non nulle, une composante fondamentale de fréquence f et une composante à l'octave de fréquence $2f$. On voit que l'opérateur est non linéaire puisqu'il y a génération d'harmoniques à sa traversée (modification des fréquences présentes dans le spectre). On peut faire appel à un filtre passe-bas en tant que moyennneur sous réserve que sa fréquence de coupure f_c vérifie $f_c \ll f$ (où $f = 1/T$ est la fréquence du fondamental). Pour le signal $s_1(t)$ associé à la sinusoïde redressée en simple alternance, la valeur moyenne (indépendante du choix d'origine des temps) est $D = \langle s_1(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(\omega t) dt$. Le calcul est élémentaire (en exploitant la parité de la fonction intégrée) et il vient $\frac{D}{A} = \frac{1}{\pi}$. En pratique, il est possible d'amplifier directement cette valeur en utilisant un filtre de gain statique de valeur adaptée (supérieure à l'unité bien sûr !). En sortie du redresseur bi-alternance, le signal est composé d'arches de sinusoïdes redressées, voir la figure 2.

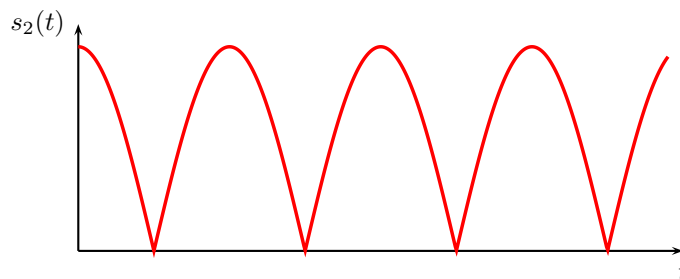


FIGURE 2 – Redressement bi-alternance ou double-alternance

Du coup, la période de ce signal de sortie $s_2(t)$ est la moitié de celle du signal d'entrée, ce qui fait que ses composantes spectrales sont aux fréquences 0 (moyenne non nulle), $2f$, $4f$, $6f$ et ainsi de suite... Les raies spectrales ne sont donc pas placées de façon exactement identique à celles du signal redressé en simple alternance. On reprend le filtre moyennneur antérieur. Cette fois-ci, il va permettre de récupérer une valeur moyenne plus élevée et le gain statique pourra être choisi plus faible. En plus, l'ondulation résiduelle sera plus faible car le fondamental (fréquence $2f$) est davantage dans la bande atténuée du filtre (par rapport au cas du signal $s_1(t)$ où il est seulement à la fréquence f). La valeur moyenne du signal de sortie est à présent $D' = \langle s_2(t) \rangle = \frac{2}{T} \int_{-T/4}^{T/4} A \cos(\omega t) dt = 2 \langle s_1(t) \rangle = 2D$ donc $\frac{D'}{A} = 2 \frac{D}{A} = \frac{2}{\pi}$. Le redressement bi-alternance du signal sinusoïdal double la valeur moyenne par rapport au redressement simple alternance.

9. Moteur alimenté en courant redressé

Réponses : Le début du développement en série est $u(t) = E_0[\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin 2\pi ft - \frac{2}{\pi}(\frac{1}{3} \cos 4\pi ft + \frac{1}{15} \cos 8\pi ft + \dots)]$, $ri + L\frac{di}{dt} = u(t)$, $i(t)$ se compose de la réponse à chaque harmonique, $\underline{Z} = r + jL2\pi f$, à 50 Hz $L2\pi f \simeq 188 \Omega$ alors que $r = 5 \Omega$ donc $\underline{Z} \simeq jL2\pi f$, l'impédance est considérée imaginaire pure pour les autres harmoniques aussi, donc $i(t) = \frac{E_0}{\pi r} + \frac{E_0}{2L2\pi f} \sin(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) - \frac{2E_0}{3\pi L4\pi f} \cos(4\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \dots$, numériquement $i(t) = 1,530 + 0,064 \sin(2\pi ft - \frac{\pi}{2}) - 0,014 \cos(4\pi ft - \frac{\pi}{2}) + \dots$, du fait de $\underline{Z} \simeq jL2\pi f$ les harmoniques ont une contribution quasi-nulle à la puissance consommée, $P_{moy} \simeq \frac{E_0^2}{\pi^2 r} \simeq 2,34 \text{ W}$.

10. Commande d'une alimentation à découpage

Réponses : $u'(t) = E_0$ sur $[0; \alpha T]$ et 0 sinon, $w_0 = \alpha E_0$, $w_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} = \frac{2E_0}{\pi} \sin \pi n \alpha$, $\bar{H} = \frac{1}{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}) + j\frac{L\omega}{R}}$, $G = \frac{1}{\sqrt{(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2})^2 + \frac{L^2\omega^2}{R^2}}}$, $C_0 = \frac{L}{2R^2} = 15,6 \mu\text{F}$, donc G est toujours monotone décroissante avec ω , $G(\omega = 0) = 1$ d'où $v_0 = E_0\alpha$, harmonique $n = 1$: $G(\omega) \simeq \frac{1}{80}$ d'où $v_1 = \frac{2E_0}{80\pi} \sin \alpha\pi$, $v_1 \ll v_0$, $v(t)$ sensiblement constante et $v_m = \alpha E_0$, harmonique $n = 2$: $w_2 = \frac{E_0}{\pi} \sin 2\pi\alpha$ et $G(2\omega) \simeq \frac{1}{316}$, v_2 peut être négligé devant v_1 , $\Delta v = \frac{E_0}{20\pi} \sin \alpha\pi$, $\frac{\Delta v}{2v_m} = \frac{\sin \alpha\pi}{40\alpha\pi} = 0,75\%$, très faible.

11. Développement en série de Fourier d'un champ magnétique

Réponses : $\frac{d^2 B_{xz,max}^{(n)}}{dx^2} - \frac{4\pi^2 n^2}{\lambda^2} B_{xz,max}^{(n)} = 0$, $B_{x,max}^{(n)} = A_n \text{ch} \frac{2\pi n x}{\lambda}$, $B_{z,max}^{(n)} = B_n \text{sh} \frac{2\pi n x}{\lambda}$, $\text{div} \vec{B} = 0$ d'où $A_n = B_n$, $A_n \text{ch} \frac{\pi n x_0}{\lambda} = \frac{2}{\lambda} \int_0^\lambda B_x(z) \sin \frac{2\pi n z}{\lambda} dz$, $A_n = \frac{4B_0}{\pi n} \frac{1}{\text{ch} \frac{\pi n x_0}{\lambda}} \sin n \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi n a}{\lambda}$.

12. Démodulation d'amplitude

Réponses : pour $\omega > \omega_0$ seule la moyenne passera de valeur $\frac{2A(t)}{\pi}$; fondamental : $-\frac{4A(t)}{3\pi} \cos 2\omega t$, il faut $\omega \approx 500\omega_0$.

B. Signaux quelconques et intégrales de Fourier

13. Pression et largeur de raie

Réponses : $\underline{V}(f) = \frac{A_0\tau}{2\sqrt{2\pi}} [\frac{1}{1 - i2\pi(f+f_0)\tau} + \frac{1}{1 - i2\pi(f-f_0)\tau}]$; dans le domaine des fréquences positives la contribution du terme en $f + f_0$ n'est pas significative, $\Delta f_{1/2} = 1/\pi\tau$.

14. Effet Doppler et largeur de raie

Réponses : $V(f) = \frac{A_0\tau}{2\sqrt{2}} \exp[-\pi^2(f - f_0)^2\tau^2]$, $\Delta f_{1/2} = \frac{\sqrt{2 \ln 2}}{\pi\tau}$.

15. Spectre de Fourier d'une source lumineuse

Réponses : $\hat{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} \exp(-j\omega t_0) (\exp(-j\omega NT) - 1)$, $\mathcal{R}e = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} (\cos \omega(t_0 + NT) - \cos \omega t_0)$, $\mathcal{I}m = \frac{E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 - \omega_0^2} (\sin \omega t_0 - \sin \omega(t_0 + NT))$, $|\hat{E}| = \frac{2E_0}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega}{|\omega^2 - \omega_0^2|} |\sin N\pi \frac{\omega}{\omega_0}|$, $\hat{E}(\omega) = \frac{E_0\Delta t}{2\sqrt{2}} [\exp - \frac{(\omega_0 - \omega)^2 \Delta t^2}{4} \exp j(\omega_0 - \omega)t_0 + \exp - \frac{(\omega_0 + \omega)^2 \Delta t^2}{4} \exp - j(\omega_0 + \omega)t_0]$, $\mathcal{R}e = \frac{E_0\Delta t}{2\sqrt{2}} [\exp - \frac{(\omega_0 - \omega)^2 \Delta t^2}{4} \cos(\omega_0 - \omega)t_0 + \exp - \frac{(\omega_0 + \omega)^2 \Delta t^2}{4} \cos(\omega_0 + \omega)t_0]$, $\mathcal{I}m = \frac{E_0\Delta t}{2\sqrt{2}} [\exp - \frac{(\omega_0 - \omega)^2 \Delta t^2}{4} \sin(\omega_0 - \omega)t_0 - \exp - \frac{(\omega_0 + \omega)^2 \Delta t^2}{4} \sin(\omega_0 + \omega)t_0]$.

16. Régime impulsionnel

Réponses : $\frac{d^2 u_s}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_s}{dt} + \omega_0^2 u_s = 0$, $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\omega_0$, solution valable si $Q \gg \frac{1}{2}$, intégration de l'équation différentielle $\frac{du_s}{dt}(t_0^+) - \frac{du_s}{dt}(t_0^-) + \frac{\omega_0}{Q}(u_s(t_0^+) - u_s(t_0^-)) = \frac{\omega_0}{Q}(u_e(t_0^+) - u_e(t_0^-)) = \frac{\omega_0}{Q} \Delta E$, intégration de la primitive avec $\int_{t_0^-}^{t_0^+} u_e dt = 0$ et $\int_{t_0^-}^{t_0^+} u_s dt = 0$ d'où $u_s(t_0^+) - u_s(t_0^-) = 0$, atténuation exponentielle négligeable : $u_s(t) \simeq \frac{E_0}{Q} \sin(\omega_0(t + \theta))$, $u_s(0^+) \simeq \frac{E_0}{Q} \sin(\omega_0\theta)$, $\frac{du_s}{dt}(0^+) \simeq \frac{E_0\omega_0}{Q} (\cos(\omega_0\theta) - 1)$, $s_i(t) = \frac{\omega_0}{Q} \cos \omega_0 t \exp - \frac{\omega_0 t}{2Q}$, fonction continue approximée par des créneaux successifs, dans le cas où $u_e(t) = E_0 \exp j\omega t$, $u_s(t) = \bar{H}(j\omega) E_0 \exp j\omega t$, $\bar{H}(j\omega) = [\exp(-j\omega t) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\omega t_0) s_i(t - t_0) dt_0]$, transformée de FOURIER de la réponse impulsionnelle.

17. Diffusion thermique et transformée de Fourier

Réponses : $T_0(z) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikz) dk$ d'où $A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(z') \exp(-ikz') dz'$, $T(z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T_0(z') [\int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik(z - z') - k^2 ht) dk] dz'$, $T(z, t) = \frac{\theta_0}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{ht}} \exp - \frac{z^2}{4ht}$, l'énergie de $z = 0$ diffuse progressivement en $z > 0$ avec des durées proportionnelles au carré des distances.