

Exercices : 03 - Électronique numérique.

1. Critère de Shannon

Un signal téléphonique a son spectre limité à 3,4 kHz pour réduire son encombrement spectral. Il est échantillonné à $F_e = 8,0$ kHz. Pour la réalisation d'un CD audio, on souhaite conserver la fréquence maximale du domaine audible qui est de 20,0 kHz. Le signal audio est échantillonné à $F_e = 44,1$ kHz.

1. Lorsque la condition de SHANNON est respectée, combien d'échantillons sont prélevés au minimum par période d'un signal $s(t)$ sinusoïdal ?
2. Le critère de Shannon est-il respecté pour la téléphonie et pour le CD audio ?
3. Présenter sur deux graphiques l'allure du spectre du signal téléphonique et l'allure du spectre de ce même signal une fois qu'il a été échantillonné. Ce dernier spectre fait apparaître une zone vide appelée zone de transition, quelle est sa taille ?
4. Comparer la largeur du spectre et la largeur de la zone de transition aussi bien dans le cas du signal téléphonique échantillonné que dans le cas du signal audio échantillonné.
5. En comparant les deux résultats de la question précédente, comparer les qualités des filtres nécessaires pour restituer le signal dans chacun des cas.

2. Effet d'un parasitage

Un capteur de vibration transforme les vibrations mécaniques d'une charpente métallique en signal électrique. Ce signal est analysé par la fonction FFT d'un oscilloscope numérique qui donne le spectre de la figure 1.

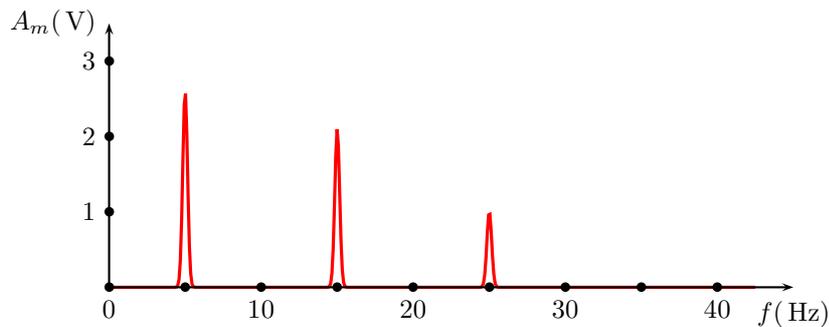


FIGURE 1 – Spectre des vibrations d'une charpente métallique

1. Pour numériser ce signal, on choisit une fréquence d'échantillonnage $f_e = 80$ Hz. Justifier le choix.
2. Dresser le spectre du signal numérisé dans l'intervalle $[0, 240$ Hz].
3. Le signal subit un parasitage par le signal du réseau électrique à la fréquence de 50 Hz. Quelle modification du spectre cela provoque-t-il ? Pourquoi est-ce problématique ?
4. Quel type de filtrage doit-on faire subir au signal électrique pour éviter cet inconvénient ? Proposer un montage simple réalisant ce filtrage en précisant les caractéristiques numériques des composants.

3. Oscilloscope numérique

La structure d'un oscilloscope numérique comprend un étage d'entrée atténuateur qui possède une impédance d'entrée de $1\text{ M}\Omega$ - information inscrite sur l'appareil en général -, un échantillonneur fonctionnant à la fréquence F_e - et qui, par conséquent, prélève F_e échantillons par seconde -, un convertisseur analogique-numérique qui envoie les données dans la mémoire et un système de traitement pour fournir l'image sur l'écran de l'oscilloscope. Un utilisateur souhaite pouvoir analyser des signaux classiques - sinusoïdal, triangle, créneau, impulsion - présentant des fréquences comprises entre 0,1 Hz et 10 MHz.

1. Pourquoi ne peut-on pas se contenter d'un oscilloscope dont la bande passante est égale à la fréquence maximale souhaitée ?
2. Quelle est la valeur minimale du taux d'échantillonnage nécessaire ?
3. La notice de l'appareil précise que, pour une bonne gestion de la capacité de la mémoire d'une capacité de 256 ko, le taux d'échantillonnage F_e est ajusté en fonction du calibre sélectionné sur l'appareil. En supposant qu'un échantillon occupe 2 octets, quel taux d'échantillonnage F_e maximal permettrait d'observer 10 périodes d'un signal de fréquence 10 kHz ? On restreint la cadence à $100\text{ Méch}\cdot\text{s}^{-1}$, combien un balayage occupe-t-il de capacité mémoire ? Combien cela représente-t-il de points par période ?

4. Le choix du convertisseur conditionne fortement le prix de l'appareil. Commenter les valeurs du tableau suivant.

Nombre de bits	8	12	16
Nombre de niveaux	256	4 096	65 536
Plus petite variation décelable	0,4%	244 ppm	15 ppm

5. Peut-on avec les convertisseurs proposés atteindre une précision de 0,1 mV pour une tension de 240 V ?
6. En fait, pour mesurer des tensions de quelques dizaines ou de centaines de volts, on utilise une sonde qui atténue le signal d'un facteur 10. Quelle est la précision que l'on peut obtenir en utilisant un convertisseur 12 bits ?

4. Le CD audio

On cherche à enregistrer un concert sur un CD audio en format non compressé (WAV par exemple) afin de ne pas perdre en qualité. Le son est capté par un microphone (signal analogique), puis subit un filtrage passe-bas et, enfin, est échantillonné avec une fréquence $f_e = 44,1$ kHz, la quantification étant faite sur 16 bits.

- Quelle est la gamme de fréquence audible ? La fréquence f_e choisie est-elle donc acceptable ?
- On choisit tout d'abord de ne pas mettre le filtre passe-bas en amont du CAN. Un signal de surpression de fréquence $f_1 = 43$ kHz est enregistré en plus lors du concert. Ce signal est-il audible lors du concert ? Que deviendra-t-il après échantillonnage ? En quoi cela pose-t-il problème ?
- Expliquer pourquoi l'ajout du filtre passe-bas en amont de l'échantillonneur peut résoudre ce problème. Estimer sa fréquence de coupure.
- Quel autre problème peut apporter à son tour ce filtre ? Pour atténuer ce problème, on augmente l'ordre du filtre et on se situe en sur-échantillonnage. Expliquer.
- On cherche maintenant à calculer la durée d'enregistrement que peut contenir un CD audio enregistrable du commerce à 700 Mo. De combien de bits a-t-on besoin pour enregistrer 1 s de concert en stéréo non compressé (16 bits; 44,1 kHz) ? En déduire la durée totale d'enregistrement du CD audio (en négligeant la présence d'autres informations à coder).
- Il est possible de compresser le signal pour l'enregistrer au format MP3. La fréquence d'échantillonnage et la quantification sont inchangées, mais un traitement numérique du signal repère les redondances pour ne les écrire qu'une seule fois et enlève les signaux peu audibles ; le taux de compression peut aller typiquement de 4 à 20. Quelle durée de musique peut-on alors enregistrer sur 700 Mo ?

5. Stroboscopie

Une corde en mouvement ondulatoire, excitée par un vibreur sinusoïdal à la fréquence du réseau électrique, ne peut pas être observée correctement à l'œil qui n'est pas assez rapide pour discerner ses différentes positions. Pour ralentir artificiellement le mouvement de la corde, on l'éclaire avec une lamp stroboscopique qui délivre des flashes lumineux très brefs à la fréquence f_e réglable par un potentiomètre gradué.

- Quelle fréquence f_e faut-il choisir pour observer de façon confortable un mouvement apparent dans le sens du mouvement réel et avec une période apparente $T_a = 1/f_a$ de 0,5 s ?
- Faire le lien entre ce problème et le repliement de spectre. Citer un exemple de ce phénomène que l'on peut voir au cinéma ou à la télévision.
- Serait-il possible d'observer un mouvement apparent en sens inverse du mouvement réel, par exemple pour une progressive qui recule au lieu d'avancer ?

6. Erreurs sur un CAN

Du fait de la numérisation par un CAN, une erreur d'arrondi est commise sur chaque échantillon (bruit de quantification). Le CAN étudié présente la loi de quantification linéaire unipolaire représentée à la figure 2 (de façon simplifiée avec seulement huit niveaux) : les paliers présentent tous le même quantum q , sauf le premier ($q/2$) et le dernier ($3q/2$) ; la hauteur de chaque palier est q . On ne considère pas le problème de l'échantillonnage (fréquence f_e assez élevée).

- Préciser dans quel intervalle l'erreur de quantification ϵ prend sa valeur.
- On considère un essai du CAN sur une rampe de pente α en entrée.
- Quelle est l'évolution temporelle typique de $\epsilon(t)$?

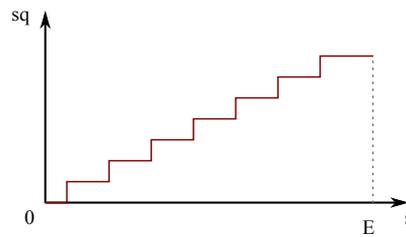


FIGURE 2 – Loi de quantification du CAN

- Déterminer la valeur moyenne $\langle \epsilon \rangle$ en raisonnant sur durée comportant un nombre entier de périodes. Quelle est aussi la valeur efficace ϵ_{eff} ? La comparer à la pleine échelle E_s de conversion du signal de sortie pour un CAN 8 bits.
- Les propriétés précédentes sont-elles conservées pour une rampe décroissante ?
- Que peut-on penser qualitativement de l'erreur de quantification pour un signal de forme quelconque ?
- Quel intérêt peut-il y avoir à adopter une loi de quantification avec $q/2$ pour le bas niveau et $3q/2$ pour le haut niveau ? Est-il gênant que ce dernier niveau soit aussi long ?

7. Filtre passe-haut

On étudie la réalisation d'un filtre numérique passe-haut du premier ordre par la méthode d'EULER.

- On note \underline{e} et \underline{s} les grandeurs complexes associées au signal d'entrée et au signal de sortie. On raisonne en régime harmonique. Rappeler la forme complexe de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ du filtre passe-haut sachant que sa constante de temps caractéristique est notée τ .
- En déduire l'équation différentielle qui lie entrée et sortie pour un régime temporel d'évolution quelconque.
- Écrire l'équation récurrente associée l'équation différentielle de ce filtre passe-haut.
- Programmer en langage *Python* cette équation pour observer la réponse $s(t)$ de ce filtre à un échelon de tension imposé en entrée.
- Commenter le graphique obtenu.

8. Montage à commande numérique

Dans le circuit de la figure 3, quatre interrupteurs peuvent mettre en contact la résistance $2R$ soit avec le générateur (tension E , position 1), soit avec la masse (position 0).

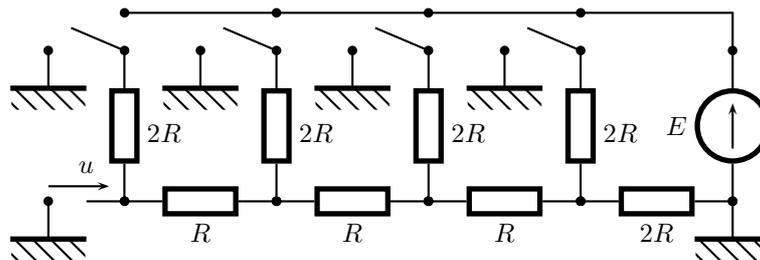


FIGURE 3 – Montage à commande numérique

- Déterminer, en fonction de l'état des interrupteurs, la tension u aux bornes de l'ensemble. On pourra définir une suite de quatre nombres ϵ_k avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ et $\epsilon_k = 0$ ou 1.
- Commenter et préciser le rôle du circuit. Généraliser à n interrupteurs.

Réponses : on pensera à mettre tous les interrupteurs en positions 0 sauf l'un d'eux, par exemple celui le plus à gauche de la figure qui sera sur 1. On pourra continuer en ne mettant que le second en partant de la gauche sur 1. On pensera à appliquer le théorème de superposition. $u = E(\frac{\epsilon_0}{16} + \frac{\epsilon_1}{8} + \frac{\epsilon_2}{4} + \frac{\epsilon_3}{2})$; convertisseur numérique

en tension, $u = E(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\epsilon_k}{2^{n-k}})$ avec $\epsilon_k = 0$ ou 1.

9. Multiplexage temporel

Un système de transmission téléphonique permet la transmission simultanée de 30 communications sur la même ligne. Il utilise la Modulation d'Impulsions et Codage de sigle MIC.

1. Pour ce faire, chaque signal est tout d'abord numérisé. Justifier le choix de la cadence de 8 000 échantillons par seconde, sachant que la bande fréquentielle est limitée à [300 Hz, 3 400 Hz].

Afin d'assurer la transmission simultanée de 30 voix, le signal est organisé en trames de 32 intervalles de temps, chaque communication se voyant assigner un intervalle de temps par trame. Les deux intervalles de temps restants servent à la gestion du réseau.

2. Quelle est la durée d'une trame? En déduire le débit d'échantillons par seconde, toutes communications confondues. Chaque signal vocal est numérisé sur 8 bits selon une loi non linéaire (on parle de compression).
3. Déterminer le débit binaire, exprimé en bits par seconde, du signal complet.
4. La loi de compression distribue les niveaux de quantification de manière non équidistante, le quantum étant plus faible pour les faibles valeurs de signal. Quel en est l'intérêt, sachant que les signaux vocaux varient dans une large gamme d'amplitude?

10. Généralisation du critère de Shannon

1. On considère un signal à support borné, c'est-à-dire un signal présentant un spectre continu de 0 à f_{max} . Il est échantillonné à la fréquence F_e . Représenter le spectre du signal échantillonné pour $F_e > 2f_{max}$ et pour $F_e < f_{max}$. En étudiant ce qu'il se passe pour des fréquences inférieures à F_e , retrouver le critère de SHANNON.
2. On considère un signal à bande étroite de largeur B centrée autour de la fréquence f_0 . Représenter le spectre du signal échantillonné pour $F_e < 2f_0$. Analyser.
3. Le spectre à bande étroite est celui des radios FM dont la bande de fréquence occupe l'intervalle de $f_m = 87,5$ MHz à $f_M = 108$ MHz. Il est échantillonné avec une fréquence $F_e = 43,5$ MHz. Le critère de SHANNON est-il respecté? Peut-on récupérer à l'aide d'un filtre passe-bande uniquement le signal initial?
4. On reprend la question précédente avec une fréquence d'échantillonnage $F_e = 50$ MHz.
5. Généraliser les études précédentes et établir que l'on peut récupérer parfaitement le signal initial en l'échantillonnant à une fréquence F_e s'il existe un entier n tel que :

$$\frac{2f_M}{n} < F_e < \frac{2f_m}{n-1}$$

11. Numérisation

De nos jours, de nombreux signaux de télécommunications sont transportés sous forme numérique (la télévision depuis 2011, la radio numérique est actuellement en développement...). Cette partie est consacrée à l'étude de la transformation d'un signal numérique en signal analogique et réciproquement. Le signal physique est une tension comprise entre 0 et 5 V. On suppose que le signal numérique correspondant est codé sur un octet, c'est-à-dire 8 bits, chaque bit pouvant prendre la valeur 0 ou 1. Réciproquement, lors du passage du signal numérique à un signal analogique, on souhaite que ce dernier soit également compris entre 0 et 5 V.

1. L'octet correspondant à la tension 0 V est 00000000, et l'octet correspondant à la tension 5 V est 11111111. En déduire l'octet correspondant à la tension 3,549 V.

On appelle V_i avec $i \in [0..7]$ les huit tensions d'entrée d'un montage additionneur, qui correspondent aux 8 bits de la valeur numérique de la tension à rendre analogique. $V_i = 0$ si le bit numéro i vaut 0 et

$V_i = u_0 = 40$ mV si le bit numéro i vaut 1. En sortie de l'additionneur, on a $V_A = \sum_{i=0}^7 2^i u_0$ pour les bits i non nuls. La sortie de l'additionneur est reliée à l'entrée d'un amplificateur de gain γ fournissant une tension $V_S = \gamma V_A$. L'ensemble constitue un convertisseur numérique analogique (CNA).

2. Dans quel intervalle est comprise la tension intermédiaire V_A ?
3. Écrire l'expression de la tension de sortie V_S en fonction des tensions d'entrée V_i . Quelle doit être la valeur de γ pour que V_S soit comprise entre 0 et 5 V?
4. En déduire la plus petite valeur de tension non nulle que l'on peut mesurer.
5. Soit l'octet suivant : 01001101. Quelles sont les valeurs numériques des tensions d'entrée $V_0, V_1, V_2, \dots, V_7$ pour cet octet?

6. La conversion numérique analogique est-elle instantanée ? Quels sont les éléments du montage qui limitent la fréquence de conversion ?

Pour transformer un signal analogique en signal numérique, on utilise un convertisseur analogique-numérique (CAN). On note V la tension analogique à convertir en écriture numérique. La figure 4 propose un exemple de CAN. Le compteur est un élément qui compte en binaire : il part de 00000000, puis augmente régulièrement 00000001, 00000010, 00000011... La durée entre l'affichage de deux octets successifs est notée t_0 . Ensuite, un convertisseur numérique analogique transforme ces nombres binaires en tension V_B comprise entre 0 et 5 V.

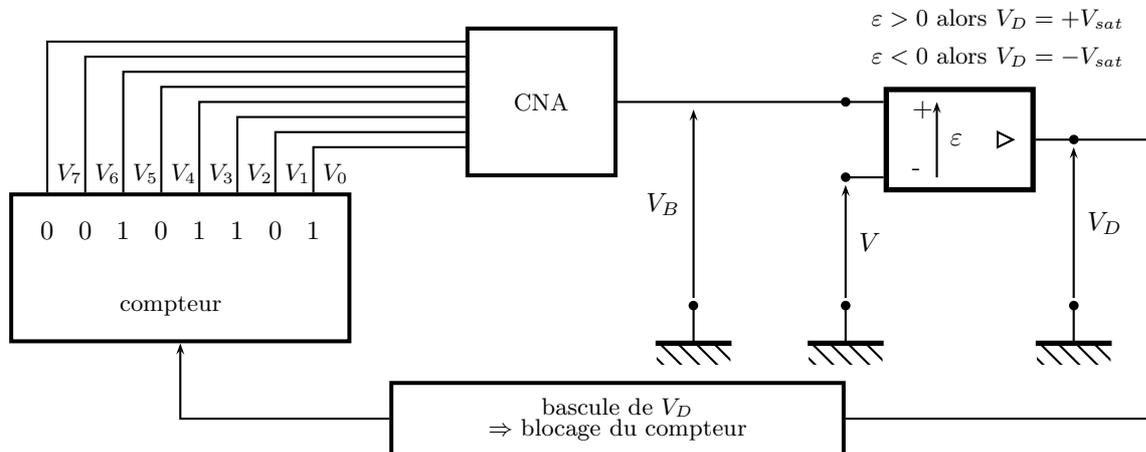


FIGURE 4 – Schéma complet d'un convertisseur analogique-numérique : la tension analogique à numériser est V . Un compteur permet de compter en binaire, et grâce à un convertisseur numérique-analogique, de créer une tension V_B analogique qui augmente tous les t_0 . Les tensions V_B et V sont comparées et le compteur s'arrête lorsque la tension V_D change de signe.

7. Lorsque la tension V_D change de signe, le compteur se bloque, et on peut y lire la tension numérisée en nombre binaire. Combien de temps faut-il pour que V_B passe de 0 à 5 V ? Dessiner l'allure de $V_B(t)$ en faisant apparaître une échelle caractéristique sur chaque axe.
8. On souhaite numériser la tension $V = 1,781$ V. Expliquer succinctement le fonctionnement du montage et donner la valeur obtenue au compteur une fois qu'il est bloqué. Quel est le temps nécessaire pour numériser cette tension avec ce montage ?

12. Analyse d'un CNA

On suppose disposer du signal traité numériquement, que l'on veut remettre sous forme analogique. Le Convertisseur Numérique Analogique (CNA) réalise cette opération. Le principe d'un CNA est représenté à la figure 5. Un CNA dit à échelle comprend autant de sources qu'il y a de bits dans le signal numérique ; par convention, l'état de fermeture d'un commutateur correspond à la valeur binaire $e_k = 1$ et l'état d'ouverture (borne reliée à la masse) à la valeur $e_k = 0$. Le circuit à AO fournit en sortie la grandeur analogique étudiée.

- Quelle est la résistance de l'ensemble du circuit à la droite du point A_1 de la figure 5 ?
- En déduire que le courant immédiatement à droite de ce point est égal au i_1 de la figure 5.
- Toujours avec les notations de la figure 5, montrer que :

$$i_s = \frac{V_{ref}}{2R} \left(\frac{e_0}{2^0} + \frac{e_1}{2^1} + \dots + \frac{e_{n-1}}{2^{n-1}} + \frac{e_n}{2^n} \right)$$

- Quel est, écrit en base 2, le nombre représenté en base 10 dans la relation établie à la question précédente ?
- Quelle doit-être la valeur minimale de n si l'on veut obtenir au moins 250 valeurs différentes de la tension de sortie ?
- Quelle est la fonction du circuit encadré en pointillés dans la figure 5 ? Exprimer u_s (évaluée par rapport à la masse) en fonction de i_s .
- Établir l'expression du quantum δu_s de ce CNA. Sachant que $R = 10,0$ k Ω , $R' = 2,00$ k Ω et que $n = 8$ (information codée sur un octet), calculer V_{ref} pour que $\delta u_s = 10,0$ mV.

8. La source de tension V_{ref} ayant la valeur calculée dans la question précédente, déterminer la valeur de u_s lorsque $N_{(2)} = (10010010)$.
9. Réciproquement, connaissant la valeur numérique de u_s , obtenue à la question précédente, proposer un algorithme permettant de connaître l'état de tous les commutateurs du CNA ou, ce qui revient au même l'expression de $N_{(2)}$.
10. Le signal analogique de sortie reste quantifié. Par quel genre de traitement électronique pourrait-on, à partir de ce signal constant par morceaux, obtenir une courbe continûment dérivable ?

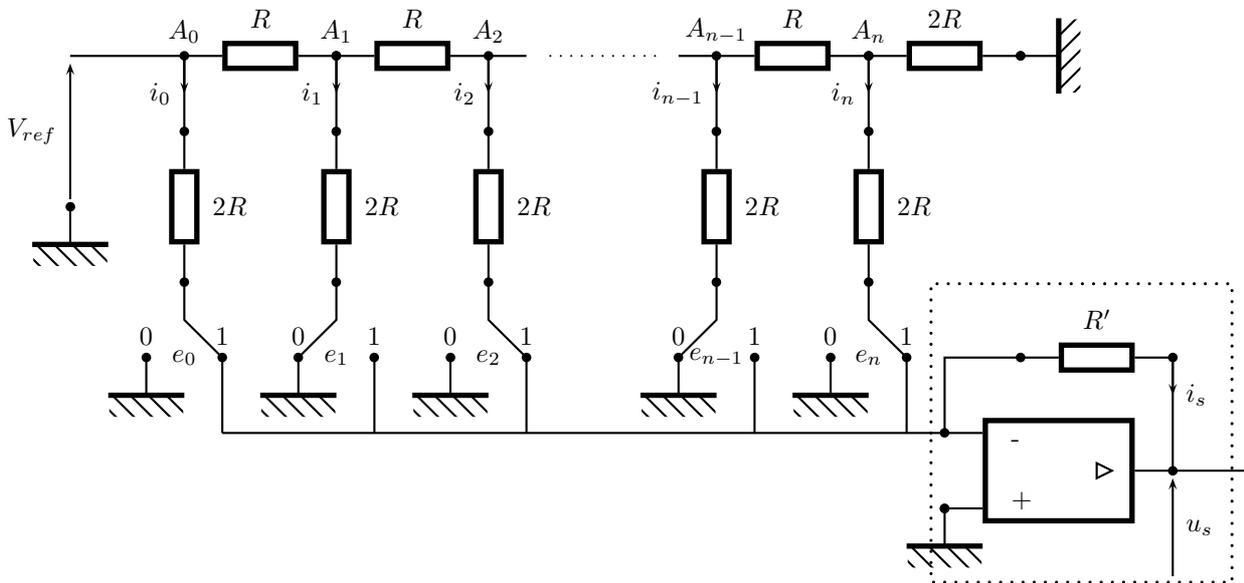


FIGURE 5 – CNA

13. Filtre numérique à moyenne glissante

Un signal $e(t)$ analogique est échantillonné à la fréquence $f_e = 1\,000\text{ Hz}$ (période $T_e = 1/f_e$). On appelle e_k la valeur de l'échantillon k : $e_k = e(t = kT_e)$. Les calculs numériques pourront être effectués par tableur ou par programmation (Python ou autre...).

1. Le signal $e(t)$ échantillonné est appliqué en entrée d'un filtre à moyenne glissante sur $n = 4$ échantillons consécutifs : chacun de ses échantillons de sortie est la moyenne des quatre derniers échantillons définis de e , c'est-à-dire :

$$s_k = \frac{e_k + e_{k-1} + e_{k-2} + e_{k-3}}{4}$$

- Si $e(t \leq 0) = 0$ et $e(t > 0) = 1$, obtenir numériquement les échantillons s_k et les représenter graphiquement. En déduire le type de filtre obtenu et estimer la valeur du gain G_{bp} dans sa bande passante.
2. Obtenir numériquement la courbe de gain en fonction de la fréquence $G_4(f)$ du filtre à moyenne glissante sur $n = 4$ échantillons consécutifs sur l'intervalle $[0; f_e]$. La fréquence f_e est-elle atténuée comme le ferait un filtre passe-bas analogique de fréquence de coupure inférieure à f_e ? Expliquer en quoi ce résultat était prévisible compte-tenu de l'échantillonnage. Quelle précaution prend-on en amont de l'échantillonnage pour éviter ce problème ? Confronter le reste du diagramme $G_4(f)$ à ce que donnerait un filtre passe-bas analogique.
 3. Refaire le tracé du gain $G_{10}(f)$ dans le cas d'une moyenne glissante sur $n = 10$ échantillons consécutifs sur l'intervalle $[0; f_e]$. Comment a évolué la fréquence de coupure basse à -3 dB ? Le filtre semble-t-il plus efficace si l'on augmente n ?
 4. Induire à partir de la lecture des diagrammes $G_n(f)$ réalisés numériquement pour divers choix de f_e et n la loi simple donnant les fréquences complètement coupées suivant les valeurs de f_e et de n . Pouvez-vous démontrer effectivement cette loi (sans chercher à obtenir l'expression analytique de $G_n(f)$) ?
 5. Application au filtrage de réjection de mode commun : la présence du secteur électrique à 50 Hz provoque un « ronflement » associé au parasitage des signaux électriques à 50 Hz et aussi à ses multiples ; montrer qu'un filtre numérique à moyenne mobile peut résoudre ce problème à condition de bien choisir la fréquence d'échantillonnage.

6. Obtenir l'expression analytique de $G_n(f)$ et vérifier sa cohérence avec l'étude numérique précédente.