

Exercices : 04 - Ondes, diffusion

A. Généralités

1. Caractérisation d'une onde plane

Une onde mécanique monochromatique de fréquence $f = 5 \text{ Hz}$ est représentée en un point M de l'espace par l'expression complexe $\underline{\psi}(\vec{r}, t) = A \exp i(\omega t - \phi(\vec{r}))$, \vec{r} étant le vecteur position situant M dans un repère $Oxyz$.

1. Quelle est sa surface d'onde lorsque $\phi(\vec{r}) = 3x + 4y + 5z$?
2. Déterminer la célérité de propagation de cette onde ainsi que sa longueur d'onde.
3. Donner l'expression de cette même onde lorsqu'elle se propage dans une direction normale à l'axe Oy en faisant un angle de 30° avec l'axe Oz .

2. Vitesse de phase et vitesse de groupe

On étudie une onde plane progressive monochromatique représentée par la notation complexe : $f = f_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ dans laquelle la pulsation et le vecteur d'onde vérifient l'équation de dispersion : $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c^2}$ où c est la vitesse de la lumière dans le vide et ω_0 une certaine constante positive.

1. Déterminer la vitesse de phase et la vitesse de groupe.
2. Vérifier la conformité avec la théorie de la relativité restreinte d'Einstein.
3. Tracer les courbes donnant ces deux vitesses en fonction de la pulsation ω .

3. Onde de Sine-Gordon

Un système physique est caractérisé par une fonction sans dimension $\psi(x, t)$, des variables espace x et temps t , qui satisfait à l'équation différentielle suivante appelée équation de Sine-Gordon :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\sin \psi}{\lambda^2}$$

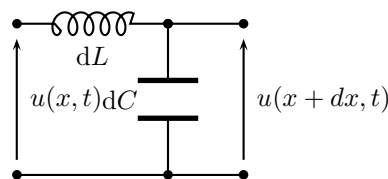
où c et λ sont des constantes ; le soliton est la réalité décrite par la solution de cette équation différentielle. Un soliton est une onde particulière qui profite des non-linéarités du milieu dans lequel il se propage pour ne pas être affecté par exemple d'un amortissement. Ce phénomène relativement rare a toutefois été observé dès le 19^{ème} siècle.

1. Quelles sont les dimensions physiques de c et λ ?
2. Chercher une solution approchée de l'équation précédente de la forme : $\psi(x, t) = \epsilon \cos(\omega t - kx)$ avec $\epsilon \ll 1$. En déduire la relation entre k et ω .
3. Représenter les évolutions de la vitesse de phase et de la vitesse de groupe en fonction de la pulsation ω .

B. Ondes électromagnétiques

4. Ondes dans une ligne électrique, impédance caractéristique

Une ligne électrique à constantes réparties est modélisée comme sur la figure ci-contre, un élément de longueur dx de ligne comportant une inductance propre $dL = \Lambda dx$ et une capacité $dC = \Gamma dx$. L'ensemble est parcouru par des courants harmoniques de pulsation ω . On note $i(x, t)$ et $i(x + dx, t)$ les intensités dans la ligne aux abscisses respectives x et $x + dx$. L'impédance totale de la ligne située *au-delà* de l'abscisse x , vue depuis le point d'abscisse x , sera donc $Z_l(x) = \frac{u(x)}{i(x)}$.



On notera encore $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}$ et $Z_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

1. Écrire les relations différentielles entre u et i .
2. Établir l'équation de propagation.
3. Vérifier que les solutions de l'équation de propagation peuvent être mises sous la forme suivante :

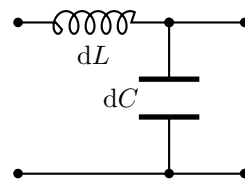
$$i = i_0 \exp i(\omega t - kx) + i_1 \exp i(\omega t + kx) \quad \text{et} \quad u = \rho i_0 \exp i(\omega t - kx) - \rho i_1 \exp i(\omega t + kx)$$

Calculer ρ et la vitesse de propagation des signaux dans la ligne. Que représentent chacun des deux termes présents dans les expressions de i et u ?

- L'extrémité de la ligne de longueur d est fermée sur une impédance Z . Calculer $i(x, t)$ et $u(x, t)$ en fonction de i_0, ρ, Z, ω, k et d .
- Calculer $Z_l(x)$. Pour quelle valeur particulière de Z , appelée *impédance caractéristique*, $Z_l(x)$ est-elle indépendante de x ? Dans ce cas, que peut-on observer dans les expressions de $i(x, t)$ et $u(x, t)$?

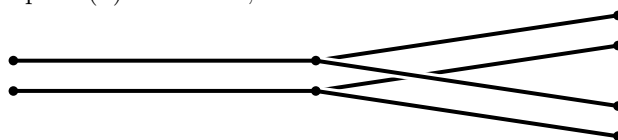
5. Liaison entre trois lignes électriques

Une ligne électrique à constantes réparties est modélisée comme sur la figure ci-contre, un élément de longueur dx de ligne comportant une inductance propre $dL = \Lambda dx$ et une capacité $dC = \Gamma dx$. L'ensemble est parcouru par des courants harmoniques de pulsation ω ; on notera en particulier $\bar{u}(x) \exp(j\omega t)$ la tension aux bornes de la ligne, et $\bar{i}(x) \exp(j\omega t)$ le courant dans celle-ci, à l'abscisse x . L'impédance totale de la ligne située *au-delà* de l'abscisse x , vue depuis le point d'abscisse x , sera donc $\bar{Z}_l(x) = \frac{\bar{u}(x)}{\bar{i}(x)}$.



On notera encore $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ et $Z_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$.

- Établir l'équation différentielle (E_1) du premier ordre vérifiée par $\bar{Z}_l(x)$. À quelle condition $\bar{Z}_l(x)$ est-elle indépendante de x ? Commenter.
- Sans nécessairement résoudre (E_1), établir, en considérant par exemple un diviseur de tension, une équation différentielle (E_2) du second ordre vérifiée par $\bar{u}(x)$. Résoudre, commenter.
- Une ligne électrique identique à celle décrite ci-dessus occupe la région $x < 0$; en $x = 0$, elle est connectée à deux autres lignes, identiques à la première, connectées en parallèle, de longueur suffisante pour qu'on puisse les considérer comme infinies.



Un générateur adapté impose dans la première ligne (pour $x < 0$) une onde électrique incidente caractérisée par $\bar{u}_i(x) = \bar{u}_0 \exp(-j\omega x/c)$. Montrer l'existence d'une onde réfléchie. Déterminer les coefficients de réflexion en tension, en courant et en puissance au point $x = 0$.

6. Propagation dans un câble coaxial

Un câble coaxial peut être le siège de la propagation d'un signal de tension électrique. On envoie une impulsion unique de tension très courte dans un câble de longueur ℓ . Un oscilloscope placé immédiatement en entrée du câble affiche le signal de tension $u(0, t)$ de la figure 1. Quel signal $u(\ell/2, t)$ aurait-il affiché s'il avait été placé au milieu du câble?

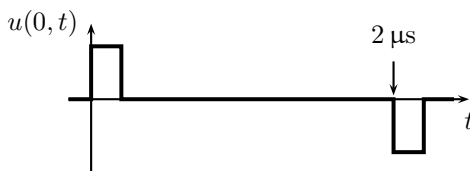


FIGURE 1 – Tension mesurée en début de câble

Proposition de réponses à la figure 2.

C. Cordes vibrantes

7. Corde de clavecin

Une corde de clavecin représentée sur la figure 3 de masse linéique μ est tendue avec une force T entre deux points distants de a . On caractérise les petits mouvements transversaux de la corde par la fonction $y(x, t)$, y étant l'élongation à la date t de l'élément de corde d'abscisse x . Le mouvement de la corde est régi par une équation différentielle de la forme :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0 \quad v = T^\alpha \mu^\beta$$

- Déterminer α et β .
- On cherche des solutions de la forme $y(x, t) = X(x)T(t)$. Donner l'expression générale de ces solutions et décrire les mouvements correspondants.

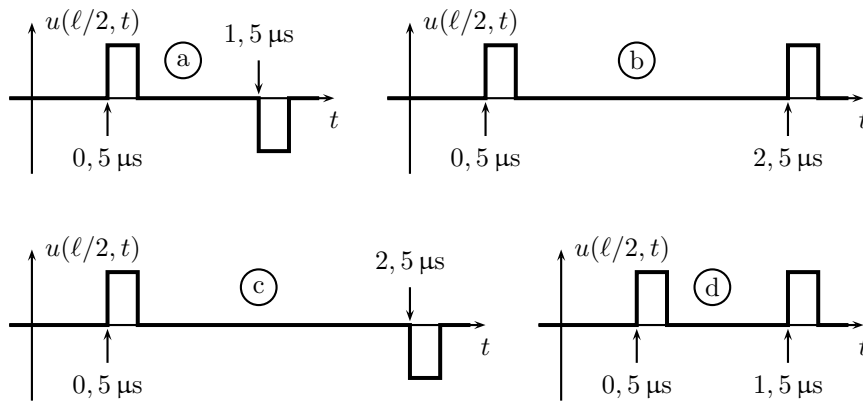
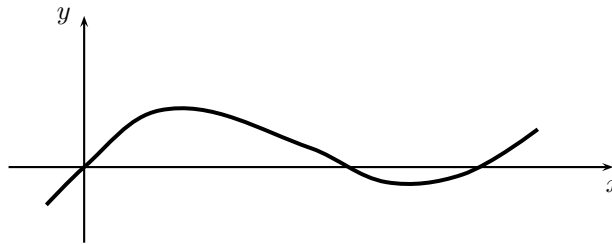
FIGURE 2 – Impulsions enregistrées $u(\ell/2, t)$ 

FIGURE 3 – Corde de clavecin

3. La corde est abandonnée sans vitesse initiale; on aura donc $\frac{\partial y}{\partial t}(x, t = 0) = 0$ et $y(x, 0) = f(x)$ où f est une fonction connue. Montrer qu'une solution possible de l'équation différentielle est :

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \sin\left(n \frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(n \frac{\pi v t}{a}\right)$$

où on exprimera les α_n en fonction de $f(x)$.

4. La corde (de clavecin) est initialement pincée en son milieu d'une hauteur h ; combien y a-t-il d'harmoniques dont l'amplitude est supérieure à 1% de l'amplitude du fondamental?
5. Établir l'équation du mouvement pour le déplacement $y(x, t)$ de l'élément de corde d'abscisse x . On négligera le poids, et on fera l'hypothèse que les déplacements transversaux de la corde sont faibles. On montrera dans un premier temps que la relation de la dynamique appliquée à un élément de corde compris entre les abscisses x et $x + dx$ peut s'écrire :

$$\mu dx \left(\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} \vec{e}_x + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \vec{e}_y \right) = \vec{T}(x + dx) - \vec{T}(x)$$

puis que la projection de cette relation sur l'axe Oy donne :

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(\sin \alpha(x + dx) - \sin \alpha(x))$$

où $\alpha(x)$ est l'angle que fait la corde avec l'axe Ox à l'abscisse x . On conclura en utilisant le fait que les angles sont petits et en justifiant que $\sin \alpha(x) \approx \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_x$.

8. Expérience de la corde de Melde

Une sinusoïde d'amplitude a et de période λ a pour équation $y = a \sin(2\pi x/\lambda)$.

- Lorsque $a \ll \lambda$, calculer la longueur s d'une période λ de cette courbe.
- On réalise l'expérience de la corde de Melde. Il se produit une résonance transversale sur le mode m , c'est-à-dire qu'on observe m fuseaux. La corde utilisée est inextensible de longueur L . On utilise un vibreur longitudinal d'amplitude A et de fréquence ajustable F , voir la figure 4. Les ondes se propagent sur la corde avec la célérité c supposée constante. Lorsque la résonance est établie sur m fuseaux, la corde vibre avec une fréquence f et avec une amplitude a . Établir les relations entre F et f d'une part et entre A et a d'autre part.

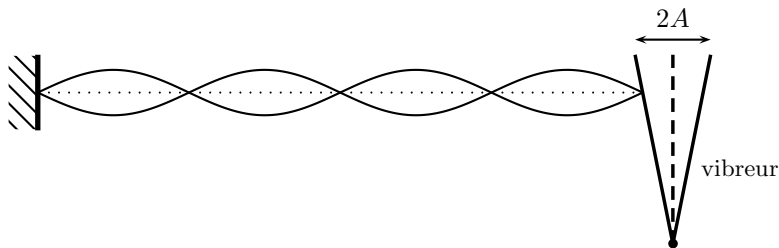


FIGURE 4 – Représentation de la corde de Melde

3. Application numérique : $L = 1 \text{ m}$, $m = 4$, $c = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et $a = 1 \text{ mm}$. Calculer F et A .

9. Ondes transverses dans une corde vibrante

On étudie (fig. 5) les oscillations transverses d’une corde élastique tendue, de masse linéique λ . Au repos, cette corde est confondue avec l’axe (Ox) . On étudie des oscillations dans le plan (Oxy) en négligeant le poids. À l’instant t , on note $T(x, t)$ la tension de la corde à l’abscisse x et $\alpha(x, t)$ l’angle fait par la corde avec l’axe (Ox) . On supposera $|\alpha(x, t)| \ll \pi$. Les oscillations d’un brin de corde d’abscisse x sont décrites par $y(x, t)$.

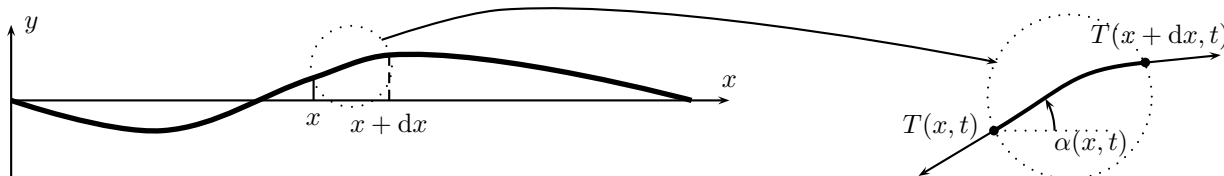


FIGURE 5 – Corde vibrante

- Relier $\alpha(x, t)$ et une dérivée de $y(x, t)$.
Par projection du principe fondamental de la dynamique, montrer que $T(x, t)$ ne dépend pas de x . Cette force est donc égale à la tension T_0 imposée à la corde à ses deux extrémités ; on la supposera indépendante du temps dans la suite.
- Quelles sont l’unité de mesure et l’interprétation physique de la grandeur $f(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$?
Mêmes questions pour la grandeur $p(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$.
- Montrer l’équation de propagation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et établir l’expression de c en fonction de λ et T_0 . Quelle est la forme générale des solutions de cette équation ?
- On note $\epsilon_c(x, t) = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$ et $\epsilon_p(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$. Dans quelles unités se mesurent ces grandeurs ?
Montrer une relation simple entre $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial \epsilon_c}{\partial t}$ et $\frac{\partial \epsilon_p}{\partial t}$. Proposer une interprétation physique.
- On considère une onde transverse de représentation complexe $y(x, t) = y_0 \exp [i(\omega t - kx)]$, avec $k > 0$.
Exprimer k et les valeurs moyennes $\langle p \rangle$, $\langle \epsilon_c \rangle$ et $\langle \epsilon_p \rangle$. En déduire une expression de la vitesse de transport de l’énergie mécanique le long de la corde ; commenter.

10. Ondes stationnaires

La corde vibrante de l’exercice 9, de longueur L , est fixée à ses deux extrémités en un point de l’axe (Ox) , de sorte que $y(x = 0, t) = y(x = L, t) = 0$ à tout instant.

- Montrer l’existence de solutions harmoniques de la forme $y(x, t) = f(x) \exp (i\omega t)$. Quelles sont les pulsations permises ? On montrera l’existence d’une pulsation minimale ω_1 .
- La corde est abandonnée sans vitesse initiale à partir d’une position initiale donnée par $y(x, t = 0) = y_0(x)$. On cherche des solutions propagatives de la forme $y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} y_n \exp (in\omega_1 t) \sin \frac{n\pi x}{L}$. Exprimer les y_n , sous forme intégrale, en fonction de $y_0(x)$.

3. La corde est initialement pincée en son milieu : $y_0(x)$ est affine dans chacun des deux intervalles $[0, L/2]$ et $[L/2, L]$ avec $y_0(0) = y_0(L) = 0$ et $y_0(L/2) = y_m$. Déterminer l'amplitude relative du premier harmonique relativement au fondamental, $\eta = y_3/y_1$.

11. Réflexion sur un nœud

La corde vibrante de l'exercice 9, de très grande longueur, est réalisée en deux parties. La partie de corde située en $x < 0$ est soumise à l'action d'un vibreur qui impose la présence d'une onde incidente progressive $y_{inc}(x, t) = y_0 \exp[i(\omega t - k_1 x)]$. En $x = 0$, un nœud de masse M relie la corde à une autre corde analogue à la précédente, de grande longueur, disposée le long des $x > 0$. Le nœud a un mouvement transverse, le long de l'axe $x = 0$.

Les deux cordes sont soumises à la même tension T_0 ; on note λ_1 et λ_2 les masses linéiques des deux portions de corde, respectivement pour $x < 0$ et $x > 0$.

1. Exprimer k_1 .
2. La présence du nœud impose l'apparition d'une onde réfléchie $y_r(x, t) = \rho y_0 \exp[i(\omega t + k_1 x)]$ pour $x < 0$ et d'une onde transmise $y_t(x, t) = \tau y_0 \exp[i(\omega t - k_2 x)]$. Montrer que $1 + \rho = \tau$.
3. Écrire le principe fondamental de la dynamique pour le nœud. En déduire les expressions de ρ et τ .
Qu'observe-t-on si $\lambda_2 \gg \lambda_1$? Commenter.
4. Calculer la grandeur $p(x, t)$ (définie dans l'exercice 9), respectivement pour $x < 0$ et $x > 0$. Calculer aussi sa moyenne temporelle $\langle p(x, t) \rangle$.
Définir et déterminer un coefficient de réflexion R et un coefficient de transmission T pour l'énergie mécanique. Quelle relation lie R et T ? Commenter.

12. Propagation en présence d'une force extérieure magnétique

On étudie les petits mouvements dans la direction ascendante \vec{e}_z d'une corde métallique de longueur L , fixée en ses deux extrémités d'abscisses $x = 0$ et $x = L$. On néglige la pesanteur. La corde est parcourue par un courant d'intensité $I = I_0 \cos \omega t$ (orienté dans le sens des x croissants) et plongée dans un champ magnétique $\vec{B} = B_0 \sin(\pi x/L) \vec{e}_y$. On note F la tension de la corde et μ sa masse linéique.

1. Montrer que le déplacement $z(x, t)$ d'un point de la corde est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A \sin(\pi x/L) \cos \omega t$$

où c et A sont à préciser.

2. En régime sinusoïdal forcé, on cherche une solution de la forme $z(x, t) = C \sin(\pi x/L) \cos \omega t$. Déterminer C pour $\omega \neq \pi c/L$. Que se passe-t-il lorsque ω tend vers $\pi c/L$?
3. En réalité, le champ magnétique est créé par un aimant en U dont l'entrefer a une largeur $e < L$ et peut être modélisé par un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \vec{e}_y$ pour $(L - e)/2 < x < (L + e)/2$ et un champ magnétique nul en dehors. On constate alors que le phénomène étudié à la question précédente se produit pour toutes les pulsations $\omega_n = n\pi c/L$. Interpréter brièvement sans calculs.

D. Ondes acoustiques

13. Tuyau sonore

On considère un tuyau sonore, constitué par un cylindre homogène, ouvert à ses deux extrémités. On donne l'expression de la vitesse des ondes sonores dans un gaz considéré comme parfait :

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$$

où $\gamma = c_p/c_V$ et M est la masse molaire du gaz dans lequel se propage le son. La fréquence du son que le tuyau peut émettre dans l'air diminue si :

Proposition de réponses :

- a) On remplace l'air par de l'hélium.
- b) On augmente la température de la pièce.
- c) On bouche l'une des extrémités du tuyau.
- d) On perce le tuyau à sa moitié.

14. Ondes sonores dans un pavillon acoustique

On considère un pavillon d'ondes acoustiques, d'axe de révolution Ox et de section circulaire variable $S(x)$. La pression dans le fluide a pour expression : $p(x, t) = p_0 - \frac{1}{\chi S(x)} \frac{\partial(S\psi)}{\partial x}$ où p_0 est la pression moyenne et χ le coefficient de compressibilité isentropique. L'équation différentielle à laquelle satisfait le déplacement $\psi(x, t)$ d'une tranche de fluide, comprise entre x et $x + dx$ est : $\frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{S} \frac{\partial(S\psi)}{\partial x} \right] = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}$ où $v^2 = 1/\rho\chi$, ρ étant la masse volumique de l'air. La section $S(x)$ varie selon : $S(x) = S_0 \exp \alpha x$. Voir la figure 6.

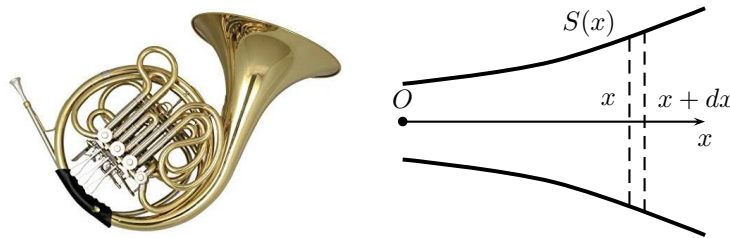


FIGURE 6 – Cor d'harmonie et la modélisation de son pavillon acoustique

1. Par une analyse dimensionnelle portant sur le produit $\rho\chi$, justifier l'expression de la célérité v des ondes acoustiques.
2. Chercher des solutions de la forme complexe : $\psi(x, t) = A \exp i(\omega t - kx)$.
3. Montrer qu'il existe une pulsation de coupure ω_c en deçà de laquelle il n'y a pas de propagation. Exprimer ω_c en fonction de v et α .
4. Un cor d'harmonie comporte notamment un tuyau, appelé pavillon, de diamètre minimal $d_{min} = 12$ cm et qui s'évase jusqu'à un diamètre de sortie $d_{max} = 31$ cm. Sans pavillon, le cor n'émet pas grand chose de bien audible dans les basses fréquences; c'est ce pavillon qui améliore l'émission et on peut choisir de le calibrer pour qu'il permette le rayonnement des ondes de fréquences supérieures à $\nu_p = 120$ Hz. Déterminer la longueur du tuyau du pavillon du cor d'harmonie.

15. Ondes acoustiques dans un cristal

On décrit un modèle de cristal cubique comme un alignement d'atomes le long d'un axe (Ox). Les atomes sont, au repos, disposés régulièrement aux abscisses $x_p^0 = pa$ ($p \in \mathbb{Z}$); on étudie ici des ondes mécaniques longitudinales au cours desquelles l'atome d'ordre p acquiert une position $x_p(t) = x_p^0 + u_p(t)$.

On note m la masse commune à tous les atomes; de plus, l'atome numéro k est soumis à une interaction potentielle avec le reste du réseau cristallin qu'on décrit par l'énergie potentielle $U_k = U_{k1} + U_{k2}$ formée de la somme de deux termes, l'un d'interaction avec les deux plus proches voisins, $U_{k1} = \frac{m\omega_0^2}{2} \frac{[u_k - u_{k+1}]^2 + [u_k - u_{k-1}]^2}{2}$ tandis que l'autre décrit l'interaction avec le reste du réseau cristallin, $U_{k2} = \frac{m\omega_1^2}{2} u_k^2$.

1. Par application du principe fondamental de la dynamique, déterminer $\frac{d^2 u_k}{dt^2} = \ddot{u}_k$ en fonction de u_k , u_{k+1} , u_{k-1} et de ω_0 et ω_1 : c'est l'équation (E).
2. On néglige le terme en ω_1 , mais on ne fait aucune hypothèse particulière relative à la grandeur a . On cherche des solutions de (E) sous la forme $u_k = u_0 \exp[i(\omega t - k\varphi)]$. Montrer une relation entre ω , ω_0 et φ . Quel est l'intervalle de fréquence permis pour ce type d'ondes ?
3. Quelle est la signification de la grandeur $K = \varphi/a$? Même question pour $V = \omega/K$.
4. La relation qui donne $\omega = \omega(K)$ est périodique. Montrer qu'on peut, sans perte de généralité, se restreindre à l'étude d'une demi-période de cette fonction, c'est-à-dire à l'intervalle $K \in [0, K_{\max}]$.
5. On considère une onde de compression telle que $K \sim K_{\max}$. Quelle est la relation entre les mouvements de deux atomes adjacents ? De quel type d'onde s'agit-il ?
6. On considère au contraire une onde de compression telle que $K \ll K_{\max}$. Quelle est la vitesse de propagation de l'onde ? Quelle est la vitesse de propagation de l'énergie associée à l'onde ?

16. Approche lagrangienne des ondes sonores

On considère une conduite de section S constante contenant un fluide de masse volumique μ_0 au repos. Le déplacement, à l'instant t , d'une particule (mésoscopique) de fluide, à l'abscisse x lorsque le fluide est au repos, est noté $\xi(x, t)$. La position de cette particule est donc $x + \xi(x, t)$ à l'instant t . On note respectivement $p(x, t)$ et $\mu(x, t)$ la surpression et la masse volumique à l'instant t au niveau de cette particule (qui était au repos en x). Puisqu'on suit une particule, on dit que l'on est dans une approche lagrangienne (différente de l'approche eulérienne où l'on ne suit pas une particule mais on regarde ce qui se passe en x à l'instant t). On se place dans le cadre de l'approximation acoustique, ce qui revient à supposer la longueur d'onde sonore grande : $\xi \ll \lambda$ et $|\partial\xi/\partial x| \simeq |\xi/\lambda| \ll 1$. On pourra alors linéariser les équations.

1. Montrer que la variation de masse volumique d'une tranche élémentaire de fluide, de section S et d'épaisseur dx au repos est :

$$\mu_1(x, t) = -\mu_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$$

2. En faisant intervenir le coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_S = -\frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$$

en déduire que :

$$\chi_S \frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

3. Établir l'équation du mouvement de cette même tranche de fluide et en déduire que :

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$$

4. En déduire l'équation de propagation vérifiée par les champs de vitesse et de surpression sonores.
5. Évaluer la célérité du son dans l'air dans les conditions ambiantes. Qu'aurait-on obtenu si, au lieu de supposer une évolution isentropique (hypothèse de LAPLACE), on aurait opté pour une évolution isotherme (hypothèse de NEWTON) ? Conclure.

E. Phénomènes de diffusion

17. Modélisation électrique d'un processus diffusif

On considère le dispositif électrique représenté à la figure 7 comportant N cellules (Z_1, Z_2) en chaîne. Les sources de courant I et de tension E sont constantes (la source de courant impose une intensité I dans la première impédance Z_1).

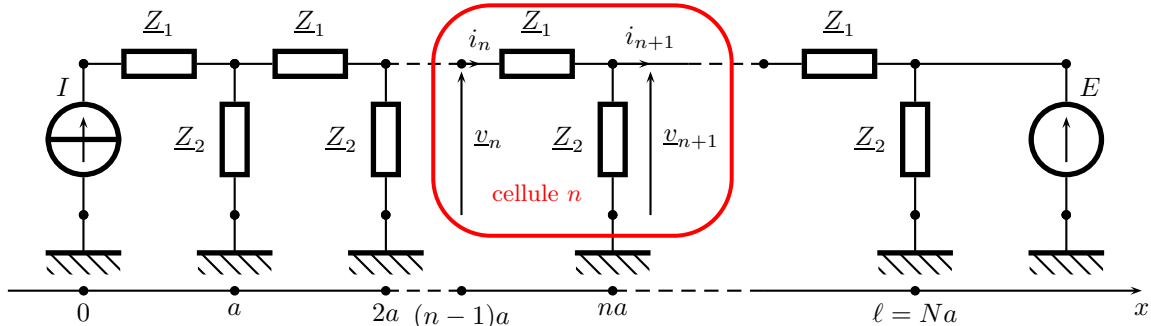


FIGURE 7 – Milieu modélisé par une succession de cellules identiques

- Déterminer la relation de récurrence suivie par la tension complexe v_n (harmonique de FOURIER).
- On suppose que l'approximation des milieux continus est valide ; on impose $u(x, t) = v_{n+1}(t)$ pour tout $x = na$ (avec $n \in \mathbb{N}_N$). Montrer, grâce à la question précédente, que le potentiel $u(x, t)$ vérifie l'équation de diffusion (\mathcal{E}) suivante, pour un choix pratique simple et peu encombrant de composants des cellules :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Préciser l'expression du coefficient de diffusion D , notamment en fonction de l'extension a de chaque cellule.

- Expliciter les conditions aux limites (\mathcal{L}) vérifiées en $x = 0$ et $x = \ell$ par $u(x, t)$ à tout instant. Proposer un exemple pratique, en diffusion thermique, modélisé par le dispositif électrique précédent (toujours dans le cadre de l'approximation des milieux continus).
- Déterminer la solution particulière stationnaire $u_\infty(x)$ vérifiant l'équation (\mathcal{E}) munie des conditions aux limites (\mathcal{L}). Interpréter physiquement cette solution.
- Montrer que la construction modale d'une solution de l'équation (\mathcal{E}) munie des conditions aux limites (\mathcal{L}) conduit à un résultat du champ $u(x, t)$ de la forme suivante :

$$u(x, t) = u_\infty(x) + \sum_{p=0}^{\infty} A_p \cos(k_p x) \exp -D k_p^2 t$$

On explicitera k_p . Les coefficients A_p restent à ce point des inconnues du problème.

- Préciser en fonction de ℓ, a et p la condition de validité de l'approximation des milieux continus relative au mode p de la série précédente. Si on réalise le circuit électrique avec $N = 100$, évaluer la valeur p_{\max} de p pour laquelle on peut tronquer la série précédente.
- L'équation (\mathcal{E}) est munie des conditions aux limites (\mathcal{L}) pour $t > 0$ mais aussi d'une condition initiale (\mathcal{I}) notée $u(x, 0) = h(x)$ pour $x \in [0; \ell]$. Comment peut-on simuler la condition initiale sur le dispositif électrique considéré précédemment ? Expliquer pourquoi les coefficients A_p sont calculables par la relation :

$$A_p = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell [h(x) - u_\infty(x)] \cos(k_p x) dx$$

ce qui fixe finalement la connaissance du champ $u(x, t)$ solution du problème posé, ainsi que celle des potentiels $v_n(t)$. On pourra s'appuyer sur toute formule de l'analyse de FOURIER.

18. Diffusion radioactive dans un barreau de grande longueur

Un barreau de grande longueur, parallèle à l'axe (Ox) peut comporter des marqueurs radioactifs. On étudie ici la diffusion de ces marqueurs dans le matériau qui constitue le barreau, à partir d'une situation initiale où ces marqueurs sont introduits au centre $x = 0$ du barreau. On note $n(x, t)$ la densité particulière des marqueurs radioactifs (nombre de particules par unité de volume) et s la section droite, constante, du barreau.

On admet que le transport des marqueurs dans le volume du barreau est régi par la loi de FICK : le nombre de marqueurs qui, à l'instant t , franchit la section droite s d'abscisse x dans le sens de l'axe (Ox) pendant la durée dt est donné par $-Ds \frac{\partial n}{\partial x} dt$, où le coefficient D est une constante qui porte le nom de coefficient de diffusion.

1. Quelle est l'unité de mesure de D ? On suppose de plus que la constante radioactive des marqueurs est très longue, c'est-à-dire qu'on néglige le nombre de ceux qui disparaissent par désintégration radioactive au cours de l'expérience. Montrer la loi (E) de conservation de la matière, $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2}$.

2. On cherche des solutions de (E) sous la forme $n(x, t) = f(x) \times g(t)$. Déterminer les équations différentielles vérifiées par f et g séparément ; on introduira une constante k homogène à l'inverse d'une longueur.

3. On admet que la solution générale de (E) s'écrit $n(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k) \exp(ikx - k^2 Dt) dk$. On note aussi $n_0(x) = n(x, t = 0)$ la répartition initiale du nombre de marqueurs radioactifs. Enfin, on rappelle que si $\Omega(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} u(t) \exp(-i\omega t) dt$ alors $u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(\omega) \exp(i\omega t) d\omega$.

En déduire l'expression de $n(x, t)$ sous forme d'une intégrale.

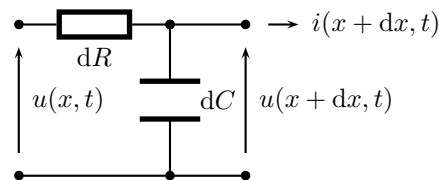
4. À l'instant initial, les marqueurs radioactifs sont concentrés dans le plan $x = 0$, ce qu'on notera sous la forme $n_0(x) = N_0 \delta(x)$ où la distribution de DIRAC δ vérifie $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) f(x) dx = f(0)$ pour toute fonction f .

Montrer que $n(x, t) = \frac{N_0}{2\sqrt{\pi Dt}} \exp\left(-\frac{x^2}{4Dt}\right)$; représenter l'allure de cette distribution $n(x, t)$ à deux instants t_1 et $t_2 > t_1$. Peut-on définir une vitesse du transport des marqueurs radioactifs dans ce barreau ?

On donne $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(j\alpha u - \beta u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\beta}} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4\beta}\right)$.

19. Électrisation d'un jet liquide

Dans une imprimante à jet d'encre, le liquide éjecté par les buses d'impression est assimilé à un long cylindre, de longueur L ; un élément de longueur dx de cylindre est (cf. ci-contre) assimilé à une résistance (en série) $dR = \rho dx$ et à un condensateur (en parallèle) $dC = \gamma dx$; la tension aux bornes de l'ensemble est notée $u(x, t)$ à l'instant t en un point du jet liquide d'abscisse x ($0 \leq x \leq L$).



Initialement ($t < 0$), l'ensemble est déchargé et $u(x, t) = 0$ pour tout x .

À partir de l'instant $t = 0$, on électrise le jet pour permettre ensuite sa déflexion par un champ électrique adapté afin de diriger le jet vers la position adaptée du papier. Pour cela, on admet qu'un dispositif adapté impose $u(x = 0, t) = E_0 > 0$ pour tout $t \geq 0$ tandis que $u(x, t = 0)$ reste nul pour $x \neq 0$.

1. Établir l'équation différentielle (E), $\frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{D} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ et déterminer l'expression et l'unité de mesure du coefficient de diffusion \mathcal{D} .

2. On pose $\theta(x, t) = u(x, t) - E_0$. Montrer que $\theta(x, t)$ vérifie l'équation différentielle (E) et déterminer $\theta(x = 0, t)$ ainsi que $\theta(x \neq 0, t = 0)$.

3. Montrer que (E) présente des solutions (S) de la forme $\theta(x, t) = (A \cos kx + B \sin kx) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$, sous réserve d'une relation que l'on établira entre k et τ .

4. Le jet de liquide arrive sur le papier considéré comme un isolant. On en déduit que $i(x = L, t) = 0$ à tout instant t . À l'aide des conditions aux limites, préciser la forme de (S).

5. Vérifier que les solutions (C), prenant en compte les conditions (C), ne peuvent pas satisfaire aux conditions initiales pour $t = 0$.

6. On cherche maintenant la solution de (E) sous la forme $\theta(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(2n + 1) \frac{\pi x}{2L} \exp\left(-\frac{t}{\tau_n}\right)$.
Déterminer les τ_n et u_n pour que cette tension vérifie l'ensemble des conditions, aux limites et initiales, imposées à $\theta(x, t)$.
7. Donner l'expression de $u(x, t)$. En déduire, en fonction de L et \mathcal{D} seulement, un ordre de grandeur de la durée nécessaire à l'électrisation complète du jet cylindrique. Commenter.