Exercices : 04 - Ondes, diffusion

— Solutions —

A. Généralités

1. Caractérisation d'une onde plane

Réponses : $3x+4y+5z=\text{Cte}$, $k=5\sqrt{2}\,\text{m}^{-1}$, $c=4,4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, $\lambda=0,89\,\text{m}$, $\underline{\psi}(\vec{r},t)=A\exp i(\omega t-5\sqrt{\frac{3}{2}}z-5\frac{1}{\sqrt{2}}x)$.

2. Vitesse de phase et vitesse de groupe

Réponses : $v_\varphi=c/\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$, $v_g=c\sqrt{1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}}$, $v_\varphi>c$ ne transporte pas d'information, $v_g<c$.

3. Onde de Sine-Gordon

Réponses : $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$, m ; $k^2=\frac{\omega^2}{c^2}-\frac{1}{\lambda^2}$; $v_\phi=c/\sqrt{1-\frac{c^2}{\lambda^2\omega^2}}$, $v_g=c\sqrt{1-\frac{c^2}{\lambda^2\omega^2}}$.

B. Ondes électromagnétiques

4. Ondes dans une ligne électrique, impédance caractéristique

Réponses : $\frac{\partial u}{\partial x}=-\Lambda\frac{\partial i}{\partial t}$, $\frac{\partial i}{\partial x}=-\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\rho=Z_0$, $i(x,t)=i_0\exp i\omega t[\exp -ikx+\frac{Z_0-Z}{Z_0+Z}\exp ik(x-2d)]$, $u(x,t)=Z_0 i_0\exp i\omega t[\exp -ikx-\frac{Z_0-Z}{Z_0+Z}\exp ik(x-2d)]$, $Z_l(x)=Z_0\frac{(Z_0+Z)\exp -ikx-(Z_0-Z)\exp ik(x-2d)}{(Z_0+Z)\exp -ikx+(Z_0-Z)\exp ik(x-2d)}$, $Z=Z_0$ alors plus d'onde réfléchie.

5. Liaison entre trois lignes électriques

Réponses : $\frac{\mathrm{d}Z_l}{\mathrm{d}x}=(j\omega)\Gamma(Z_l^2-Z_0^2)$; $Z_l(x)=Z_0\dfrac{1-A\exp(-j\frac{2\omega x}{c})}{1+A\exp(-j\frac{2\omega x}{c})}$, $Z_l(x)=Z_0$; diviseur de tension pour $\frac{u(x+dx)}{u(x)}$ entre $\frac{Z_l(x+dx)}{1+j\omega\Gamma dx Z_l(x+dx)}\simeq Z_l(x+dx)(1-j\omega\Gamma dx Z_l(x+dx))$ donne $\frac{u(x+dx)}{u(x)}=\frac{Z_l(x+dx)}{Z_l(x)}-j\omega\Gamma dx Z_l$ d'où $\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{Z_l}\frac{\mathrm{d}Z_l}{\mathrm{d}x}-j\omega\Gamma Z_l$ avec l'équation différentielle de Z_l : $\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-j\omega\Gamma\frac{Z_0^2}{Z_l}$, par dérivation $-(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\frac{1}{u})^2+\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=j\omega\Gamma\frac{Z_0^2}{Z_l^2}\frac{\mathrm{d}Z_l}{\mathrm{d}x}$, $\frac{1}{u}\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=-\omega^2\Gamma\Lambda=-\frac{\omega^2}{c^2}$ d'où $u(x)=A'\exp i\frac{\omega}{c}x+B'\exp -i\frac{\omega}{c}x$, l'impédance des deux lignes en parallèle est différente de l'impédance caractéristique de la première ligne : il y a nécessairement une onde réfléchie, on pose $u_i=u_0\exp j(\omega t-\frac{\omega}{c}x)$, $u_r=\rho u_0\exp j(\omega t+\frac{\omega}{c}x)$, $u_t=\tau u_0\exp j(\omega t-\frac{\omega}{c}x)$, en $x=0$: $u_i+u_r=u_t$, $1+\rho=\tau$, avec $\frac{\partial u}{\partial x}=-\Lambda\frac{\partial i}{\partial t}$ ou $\frac{\partial i}{\partial x}=-\Gamma\frac{\partial u}{\partial t}$ amène $i_i=\frac{u_0}{Z_0}\exp j(\omega t-\frac{\omega}{c}x)$, $i_r=-\frac{\rho u_0}{Z_0}\exp j(\omega t+\frac{\omega}{c}x)$, $i_t=\frac{\tau u_0}{Z_0}\exp j(\omega t-\frac{\omega}{c}x)$, en $x=0$: $i_i+i_r=2i_t$, $1+\rho=2\tau$, $\rho=-\frac{1}{3}$, $\tau=\frac{2}{3}$, fraction de puissance réfléchie $\frac{1}{9}$, fraction de puissance transmise $2\times\frac{4}{9}$.

6. Propagation dans un câble coaxial

Réponses : la première impulsion possède une abscisse qui évolue selon $x_1=ct$ jusqu'au bout du câble, c'est à dire jusqu'à la date $t_r=\frac{\ell}{c}$. Après réflexion, on $x_1=\ell-c(t-\frac{\ell}{c})=2\ell-ct$. Le graphique $x_1(t)$ est un triangle. L'impulsion 2 voyage avec une abscisse $x_2=c(t-T_e)$ jusqu'à ce qu'elle arrive en bout de câble, puis elle évolue avec $x_2=2\ell-c(t-T_e)$. On peut voir sur le graphique que $\frac{\ell}{2c}=0,5\,\mu\text{s}$ et donc que $\frac{\ell}{c}=1\,\mu\text{s}$. La durée de l'aller et retour de l'impulsion est donc de $2\,\mu\text{s}$. Le second signal enregistré par l'oscilloscope placé au milieu correspond donc au retour de l'impulsion 1. Elle revient à la date $t=\frac{3\ell}{2c}=1,5\,\mu\text{s}$. Elle revient avec un changement de signe car sur le graphique $u(t,0)$, on note un changement de signe. La réponse est donc le graphique a). Comment expliquer la question du signe de l'impulsion. Il faut donc savoir ce qu'il se passe en bout de câble. Comme on ne nous dit rien, on peut supposer que l'extrémité du câble n'est pas branchée. La condition aux limites est donc un nœud de courant. La condition aux limites est $i_{\text{incident},x=\ell}+i_{\text{réfléchi},x=\ell}=0$. C'est l'amplitude du courant qui change de signe pas celle de la tension. Le graphique de la bonne réponse est a) et donc cela ne va pas avec le constat précédent. On peut aussi raisonner en connaissant le coefficient de réflexion en tension lorsque l'on change de milieu du milieu 1 vers le milieu 2 : $r=\frac{Z_2-Z_1}{Z_2+Z_1}$ avec, ici, une impédance caractéristique du câble vraisemblablement $Z_1=50\,\Omega$ ou $Z_1=75\,\Omega$ et une impédance $Z_2\to\infty$ puisqu'il n'y a rien de branché en bout de câble. On a donc $r\to+1$. Si on court-circuitait le bout du câble, on réaliserait alors $Z_2=0$ et alors $r=-1$. il y aurait alors changement de signe de l'impulsion de tension. On peut aussi comprendre le changement de signe en sachant que l'on réalise maintenant un nœud de tension en bout de câble : $u_{\text{incident},x=\ell}+u_{\text{réfléchi},x=\ell}=0$. L'énoncé n'indique pas que le câble est court-circuité à l'extrémité.

C. Cordes vibrantes

7. Corde de clavecin

Réponses : $\alpha = -\beta = 1/2$; $X(x) = X_0\cos(kx+\varphi)$, $T(t) = T_0\cos(\omega t+\psi)$ avec $\omega = kv$, $k = \frac{n\pi}{a}$; $\alpha_n = \frac{2}{2a}\int_{-a}^{a} f(x)\sin\frac{n\pi x}{a}dx$, $f(x) = \frac{2h}{a}x$ pour $x \in [0, a/2]$ et $f(x) = \frac{2h}{a}(a-x)$ pour $x \in [a/2, a]$, intégration par partie $\alpha_p = \frac{4h(-1)^p}{\pi^2(2p+1)^2}$; 5 harmoniques ($n = 1, 3, 5, 7, 9$).

8. Expérience de la corde de Melde

Réponses : $\lambda + \frac{\pi^2 a^2}{\lambda}$; $F = 2f$, $A = m\frac{\pi^2 a^2}{4\lambda}$; $F = 40\,\text{Hz}$, $A = 0,3\,\text{mm}$.

9. Ondes transverses dans une corde vibrante

Réponses : $\tan\alpha \simeq \sin\alpha \simeq \alpha \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$, $f(x,t)$ en N, $p(x,t)$ en W ; $c^2 = \frac{T_0}{\lambda}$, $y(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$; $\epsilon_c(x,t)$ et $\epsilon_p(x,t)$ en N ou bien $\text{J}\cdot\text{m}^{-1}$, $\frac{\partial\epsilon_c+\epsilon_p}{\partial t} = 2T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial t}$ et $\frac{\partial p}{\partial x} = -2T_0\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\frac{\partial y}{\partial t} - T_0(\frac{\partial y}{\partial x})^2\frac{\partial t}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}$ avec $\frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = 0$ d'où $\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial\epsilon_c}{\partial t} + \frac{\partial\epsilon_p}{\partial t} = 0$, puissance des forces égale à la variation d'énergie par unité de temps ; $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$, $< p >= \frac{1}{2}T_0 y_0^2\omega k < \epsilon_c >=< \epsilon_p >= \frac{1}{4}T_0 y_0^2\omega^2$, $< p >= v_{\text{énergie}} < \epsilon_c + \epsilon_p >$ d'où $v_{\text{énergie}} = c = v_{groupe} = v_{phase}$, situation idéale de D'Alembert.

10. Ondes stationnaires

Réponses : $f(x)$ vérifie $\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\omega^2}{c^2}f(x) = 0$, $f(x) = A\sin\frac{\omega}{c}x$ avec $\sin\frac{\omega}{c}L = 0$ d'où $\omega = n\frac{\pi c}{L}$, $\omega_1 = \frac{\pi c}{L}$; $y_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} y_0(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx$; $y_1 = \frac{2}{L}\int_0^{L/2}\frac{2y_m}{L}x\sin\frac{\pi x}{L}dx = \frac{4y_m}{\pi^2}$, $\frac{y_3}{y_1} = \frac{1}{9}$.

11. Réflexion sur un nœud

Réponses : $k_1 = \omega\sqrt{\frac{\lambda_1}{T_0}}$, en $x = 0$ on a $y_i + y_r = y_t$ d'où $1+\rho = \tau$, $m_{\text{nœud}}\vec{a} = \vec{F}_{tot}$ avec $m_{\text{nœud}} = 0$, en projection sur Oy on a $\left.\frac{\partial y_t}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.(\frac{\partial y_i}{\partial x} + \frac{\partial y_r}{\partial x})\right|_{x=0}$, $1-\rho = \sqrt{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\tau$, $\rho = \frac{\sqrt{\lambda_1}-\sqrt{\lambda_2}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}$, $\tau = \frac{2\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}}$, si $\lambda_1 \ll \lambda_2$ alors $\rho = -1$ et $\tau = 0$, réflexion totale avec changement de signe, comme sur un mur, $p(x<0,t) = T_0 y_0^2 k_1\omega[\sin^2(\omega t - k_1 x) - \rho^2\sin^2(\omega t + k_1 x)]$, $< p(x<0,t) >= \frac{T_0 y_0^2 k_1\omega}{2}(1-\rho^2)$, $p(x>0,t) = T_0 y_0^2 k_2\omega\sin^2(\omega t - k_2 x)$, $< p(x<0,t) >= \frac{T_0 y_0^2 k_2\omega}{2}\tau^2 = \frac{T_0 y_0^2 k_1\omega}{2}\sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\tau^2$, $R = \rho^2$, $T = \sqrt{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}\tau^2$ et $R+T = 1$, conservation de l'énergie.

12. Propagation en présence d'une force extérieure magnétique

Réponses : Considérons un brin de corde compris entre les abscisses x et $x+\mathrm{d}x$ (faites un beau dessin). Sa masse vaut $\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}s \simeq \mu\,\mathrm{d}x$. Il est soumis aux forces $\vec{T}_g(x,t)$, $\vec{T}_d(x+\mathrm{d}x,t)$ et à la force de LAPLACE $\mathrm{d}\vec{F}_L = I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}$ qui vaut (compte tenu de l'inclinaison $\alpha(x,t)$ faible sur l'horizontale) $\mathrm{d}\vec{F}_L \simeq I_0\,B_0\,\sin\frac{\pi\,x}{L}\,\cos(\omega t)\,[\mathrm{d}x\,\vec{e}_x\wedge\vec{e}_y]$ soit $\mathrm{d}\vec{F}_L = I_0\,B_0\,\sin\frac{\pi\,x}{L}\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x\,\vec{e}_z$. L'abscisse x du brin de corde restant constante (mouvement transverse), son accélération vaut $\partial^2 z/\partial t^2\,\vec{e}_z$ et la relation fondamentale de la dynamique sur le brin donne, compte tenu du principe d'action et de réaction ($\vec{T}_g = -\vec{T}_d$) : $\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,\vec{e}_z = -\vec{T}_g(x,t) + \vec{T}_d(x+\mathrm{d}x,t)$ d'où $+I_0\,B_0\,\sin\frac{\pi\,x}{L}\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x\,\vec{e}_z$. On note $T(x,t) = ||\vec{T}_d(x,t)||$ et on projette sur $\vec{e}_x$, d'où $0 = T(x+\mathrm{d}x,t)\,\cos\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - T(x,t)\,\cos\alpha(x,t)$. Or, $|\alpha| \ll 1$, donc on en déduit que $T(x+\mathrm{d}x,t) = T(x,t) = F(t) = F$ où F est une constante qui ne dépend pas non plus du temps puisque la tension est imposée et fixée par l'opérateur à l'extrémité de la corde. Il reste à projeter sur $\vec{e}_z$, d'où $\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F\,[\sin\alpha(x+\mathrm{d}x,t) - \sin\alpha(x,t)]\,+I_0\,B_0\,\sin\frac{\pi\,x}{L}\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x$. Puisque $|\alpha| \ll 1$, $\mu\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = F\,\frac{\partial\alpha}{\partial x}\,\mathrm{d}x + I_0\,B_0\,\sin\frac{\pi\,x}{L}\,\cos(\omega t)\,\mathrm{d}x$. En notant que $\alpha \simeq \tan\alpha = \frac{\partial z}{\partial x}$, on trouve une équation de D'ALEMBERT avec second membre : $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - c^2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = A\,\sin\frac{\pi\,x}{L}\,\cos(\omega t)$ où $c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ et $A = \frac{I_0\,B_0}{\mu}$. On injecte la solution proposée, et on trouve la condition de validité $C = \frac{A}{\frac{\pi^2\,c^2}{L^2} - \omega^2}$. Lorsque $\omega \to \omega_1 = \frac{\pi\,c}{L}$, $C \to \infty$! Il y a résonance (prévisible car ω_1 est la pulsation du mode propre fondamental !). En réalité, la résonance n'est pas infinie en raison des frottements avec l'air. De plus, l'hypothèse de calcul $|\alpha| \ll 1$ n'est alors plus valable. $\vec{B}$ est défini sur $[0, L]$ et nul en $x = 0$ et $x = L$. Il peut être mathématiquement étendu à tout l'espace sous la forme d'une fonction de période $2L$ et impaire. Son développement en série de FOURIER s'écrit alors $\vec{B} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n\,\sin\frac{n\,\pi\,x}{L}\,\vec{e}_y$. La vibration $z(x,t)$ de la corde est donc solution d'une équation de D'ALEMBERT dont le second membre est une somme des contributions de LAPLACE dues aux harmoniques $\vec{B}_n$ de $\vec{B}$. La vibration $z(x,t)$ est alors la superposition des solutions particulières correspondant à chaque terme issu de $\vec{B}_n$, puisque l'équation de propagation est linéaire ! Ces solutions s'obtiennent en remplaçant L par L/n dans les calculs de la deuxième question. Chacune de ces solutions particulières donne lieu à un phénomène de résonance lorsque ω tend vers $\omega_n = n\,\pi\,c/L$. Dans cette situation, il y a résonance à chaque fois que la pulsation d'excitation tend vers l'une des pulsations propres de la corde, ce qui est général.

D. Ondes acoustiques

13. Tuyau sonore

Réponses : Lorsque le tuyau sonore est ouvert à ses deux extrémités, on a la même condition aux limites. La pression imposée est la pression atmosphérique, la surpression est donc nulle. On a donc à chaque extrémité un nœud de pression. La longueur du tuyau est donc $L = n\frac{\lambda}{2}$ et donc pour le fondamental qui fat la fréquence du son ($n = 1$), on a $L = \frac{\lambda}{2}$. La longueur d'onde est $\lambda)\frac{c}{f}$ où c est la vitesse du son et f la fréquence. On a donc $L = \frac{c}{2f}$ avec une célérité donnée par $c = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$ où $\gamma = c_P/c_V$ et M est la masse molaire du gaz où se propage le son. On peut donc analyser les réponses proposées en se basant sur $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\gamma RT}{M}}$. Si on remplace l'air par de l'hélium, on a $f_{\mathsf{He}} > f_{air}$ car $M_{\mathsf{He}} < M_{air}$. Si on augmente la température T, la fréquence augmente. Si l'on perce le tuyau à la moitié alors on impose un nouveau nœud de pression au milieu. Comme entre deux nœuds de pression, on a une longueur $\lambda/2$, la longueur L du tuyau correspond donc à une longueur d'onde. On a $L = \lambda$, la condition devient $f = \frac{c}{L}$, la fréquence augmente par rapport à la première situation. Si on bouche une extrémité, on impose une condition aux limites différentes à une extrémité. On a un ventre de pression puisque l'air ne peut plus se déplacer (nœud de déplacement), la condition sur la longueur devient $L = (2n+1)\frac{\lambda}{4}$. Pour le fondamental, on a $L = \frac{\lambda}{4}$, ce qui donne une fréquence $\boxed{f = \frac{c}{4L}}$. On voit donc que la fréquence est plus basse. Réponse c).

14. Ondes sonores dans un pavillon acoustique

Réponses : ρ en $\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\chi = -\frac{1}{V}(\frac{\partial V}{\partial p})_{\text{entropie}}$ en $\mathrm{Pa^{-1}}$, $\mathrm{Pa = kg\cdot m^{-1}\cdot s^{-2}}$ donc $\rho\chi$ en $\mathrm{m^{-2}\cdot s^2}$, v est une célérité ; $k^2 + i\alpha k - \frac{\omega^2}{c^2} = 0$, $k = a + ib$, $b = -\frac{\alpha}{2}$, $a^2 = \frac{\omega^2}{v^2} - \frac{\alpha^2}{4}$, $\omega_c = \frac{\alpha v}{2}$, on a donc $\nu_p = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{v\alpha}{4\pi}$ d'où $\alpha = \frac{4\pi\nu_p}{v}$, comme $\frac{\pi}{4}d_{min}^2 \exp\alpha L = \frac{\pi}{4}d_{max}^2$, on en déduit que $L = \frac{v}{2\pi\nu_p}\ln\frac{d_{max}}{d_{min}}$, on trouve $L \simeq 1,5\,\mathrm{m}$ pour $v \simeq 340\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, cette longueur est grande mais il ne faut pas oublier que le cor présente un tuyau très enroulé sur lui-même ce qui peut remettre en cause le modèle de propagation unidimensionnelle utilisé...

15. Ondes acoustiques dans un cristal

Réponses : $\ddot{u}_k = \omega_0^2[u_{k+1} + u_{k-1} - 2u_k] + \omega_1^2 u_k$; $\omega^2 = 2\omega_0^2(1 - cos\varphi)$, $f \in [0; \frac{\sqrt{2}\omega_0}{\pi}]$; K vecteur d'onde, V vitesse de phase ; $[0;\pi]$, $K_{max} = \frac{\pi}{a}$; $\varphi \sim \pi$, $x_{k+1} = -x_k$ opposition de phase (du type onde stationnaire, pas de propagation) ; $\varphi \ll \pi$, $x_{k+1} = x_k$, tous les atomes sont en phase ou presque (NB : s'ils sont exactement en phase, ce n'est plus un phénomène ondulatoire mais un déplacement d'ensemble), $\omega = \omega_0 aK$, $v_{phase} = v_{groupe} = \omega_0 a$.

16. Approche lagrangienne des ondes sonores

Réponses : Une onde sonore correspond à la propagation d'une surpression $p(x,t) = P(x,t) - P_0$ dans un fluide. Les tranches de fluide se compriment et de dilatent longitudinalement au passage de l'onde sonore. Soit une tranche de fluide au repos entre x et $x + \mathrm{d}x$. Lors du mouvement, ce système fermé de fluide se retrouve entre $x + \xi(x,t)$ et $x + \mathrm{d}x + \xi(x+\mathrm{d}x,t)$. La masse de la tranche considérée est constante (système fermé) et vaut au repos $\mathrm{d}m = \mu_0\,S\,\mathrm{d}x$. Lors du mouvement, $\mathrm{d}m = \mu(x,t)\,\mathrm{d}\tau(x,t)$ où $\mathrm{d}\tau(x,t)$ est le volume de cette tranche. Or,$\mathrm{d}\tau(x,t) = S\,[x + \mathrm{d}x + \xi(x+\mathrm{d}x,t) - x - \xi(x,t)]$ soit $\mathrm{d}\tau(x,t) \simeq S\,\mathrm{d}x\,(1 + \frac{\partial\xi}{\partial x}$ dans l'approximation acoustique. On en tire la masse volumique $\mu(x,t) = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\mu_0}{1+\frac{\partial\xi}{\partial t}} \simeq \mu_0\left[1 - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right]$. La variation de masse volumique est par conséquent $\mu_1(x,t) = \mu(x,t) - \mu_0 = -\mu_0\,\frac{\partial\xi}{\partial x}$. Puisque $\delta V = \delta m/\mu$ pour un élément de volume δV fermé de masse δm constante, $\chi_S = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\big|_S = +\frac{1}{\mu}\,\frac{\partial\mu}{\partial P}\Big|_S$ donc $\chi_S\,\frac{\partial p}{\partial t} \simeq \frac{1}{\mu_0}\,\frac{\partial\mu_1}{\partial t}$ toujours dans l'approximation acoustique. En composant les deux expressions encadrées précédentes, et avec $v = \partial\xi/\partial t$, on obtient la première équation de couplage : $\chi_S\,\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x}$. Dans l'approche lagrangienne de l'énoncé, on applique la relation fondamentale de la dynamique en projection sur $\vec{e}_x$ à la tranche de fluide dans le référentiel galiléen d'étude. On ne garde que les termes d'ordre 1 en $\mathrm{d}x$: $\mathrm{d}m\,\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \underbrace{S\,[p(x,t) - p(x+\mathrm{d}x,t)]}_{\text{forces de pression}}$ soit $\mathrm{d}m\,\frac{\partial v}{\partial t} \simeq -S\,\mathrm{d}x\,\frac{\partial p}{\partial x}$. On en déduit la seconde équation de couplage : $\mu_0\,\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}$. On découple les équations de couplage et on trouve les équations de propagation de D'ALEMBERT : $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\,\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$ avec $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}}$. On suppose que l'air est un gaz parfait et que l'évolution locale d'une tranche d'air est isentropique. En supposant γ constante, on a la loi de Laplace $P\,V^\gamma = \mathrm{Cte}$ donc $V = \mathrm{Cte}^{1/\gamma}\,P^{-1/\gamma}$ soit $\chi_S = -\frac{1}{V}\,\frac{\partial V}{\partial P}\big|_S = -\frac{1}{V}\,(-\frac{1}{\gamma}\,\mathrm{Cte}^{1/\gamma}\,P^{-1/\gamma-1}) = \frac{1}{\gamma\,P}$. On peut faire ce calcul de χ_S plus vite en s'appuyant sur la différentielle logarithmique de la loi de LAPLACE : $\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\,\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$. Alors $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\,\chi_S}} = \sqrt{\frac{\gamma\,P}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma\,R\,T}{M}}$ en utilisant l'équation d'état du gaz parfait. Pour l'air, on sait que $\gamma = 1,40$ (molécules essentiellement diatomiques), $M = 29,0\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$. À $T = 25\,°\mathrm{C}$, $c = 346\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Dans l'hypothèse antérieure de NEWTON, l'évolution des tranches d'air est supposée isotherme donc on remplace $P\,V^\gamma = \mathrm{Cte}$ par $P\,V = \mathrm{Cte}$, ce qui revient à prendre $\gamma = 1$. Ainsi, $c_{\text{NEWTON}} = \sqrt{\frac{R\,T}{M}} = 290\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. En pratique, on mesure une célérité correspondant au cas de LAPLACE : l'évolution locale est bien isentropique et non isotherme ! Il a fallu très longtemps avant de trouver la solution au problème de l'hypothèse de Newton. On peut montrer que l'hypothèse d'isentropicité est valable si les particules de fluide parcourent une distance moyenne ℓ entre deux chocs successifs (appelée libre-parcours moyen) très petite devant la longueur d'onde du son : $\ell \ll \lambda$. Pour un gaz, $\ell \simeq 10\,\mu\text{m}$ et $\lambda \simeq c/\nu \simeq 1\,\text{cm}$ et c'est bien vérifié.

E. Phénomènes de diffusion

17. Modélisation électrique d'un processus diffusif

Réponses : Pour la cellule n, la loi au nœud de sortie donne $\underline{i}_n = \underline{i}_{n+1} + \frac{\underline{v}_{n+1}}{\underline{Z}_2}(1)$. Pour cette même cellule, on peut écrire une loi de maille : $\underline{v}_{n+1} - \underline{v}_n = -\underline{Z}_1\,\underline{i}_n(2)$. Il reste à éliminer les courants $\underline{i}_n$ et $\underline{i}_{n+1}$ de l'équation (1) en utilisant l'équation (2) écrite aux rangs n et $n+1$: $\frac{\underline{v}_n - \underline{v}_{n+1}}{\underline{Z}_1} = \frac{\underline{v}_{n+1} - \underline{v}_{n+2}}{\underline{Z}_1} + \frac{\underline{v}_{n+1}}{\underline{Z}_2}$. En réarrangeant l'expression obtenue, il vient (pour $n \in \mathbb{N}_{N-1}$) $\underline{v}_{n+2} + \underline{v}_n - 2\,\underline{v}_{n+1} = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\,\underline{v}_{n+1}$. Dans le cadre de l'approximation des milieux continus, on pose (en notation complexe pour chaque harmonique) pour $x = n\,a$, $\underline{u}(x,t) = \underline{v}_{n+1}(t)$, $\underline{u}(x-a,t) = \underline{v}_n(t)$ et $\underline{u}(x+a,t) = \underline{v}_{n+2}(t)$ et l'évolution spatiale de $\underline{u}(x,t)$ est suffisamment longue par rapport au pas a de sorte que $\underline{u}(x \pm a,t) \simeq \underline{u}(x,t) \pm a\,\frac{\partial \underline{u}}{\partial x}(x,t) + \frac{a^2}{2}\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial x^2}(x,t)$. Le résultat de la question précédente se transforme donc, après simplifications, en $a^2\,\frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial^2}(x,t) = \frac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_2}\,\underline{u}(x,t)$ (3). Il reste à revenir en réels, ce qui suppose que l'on choisisse d'abord les bons composants. Or, on veut obtenir une équation de diffusion avec des composants peu encombrants et simples. Si on privilégie les condensateurs aux bobines (plus encombrantes !), on peut prendre une résistance R et une capacité C de sorte que (en notation complexe en $\exp j\omega t$) $\underline{Z}_1 = R$ et $\underline{Z}_2 = \frac{1}{j\,C\,\omega}$. L'équation (3) devient en notation réelle l'équation de diffusion $D\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$ $(\mathcal{E})$ avec le coefficient de diffusion simulé $D = \frac{a^2}{R\,C}$. On vérifie que D s'exprime comme tout coefficient de diffusion en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ (le produit $R\,C$ étant homogène à un temps). Il ne faut pas prendre une bobine pour $\underline{Z}_2$ non seulement pour la question de l'encombrement mais aussi parce que sinon, cela pose problème dans la suite dans la limite stationnaire où $\omega \to 0$. En fin de chaîne électrique, la source de tension impose $v_{N+1}(t) = E$, soit $u(\ell,t) = E$. En début de chaîne électrique, la source de courant impose $i_1(t) = I$. Alors, l'équation (2) au rang $n = 1$ avec $\underline{Z}_1 = R$ s'écrit en notation réelle $v_2(t) - v_1(t) = -R\,I$. L'approximation des milieux continus permet de la transformer en $a\,\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -R\,I$ soit $\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -\frac{R\,I}{a}$. On peut prendre un barreau cylindrique rectiligne de longueur ℓ. On le calorifuge sur sa surface latérale cylindrique de sorte que la dépendance spatiale du champ de température se réduise à la coordonnée x le long de l'axe du barreau. De plus, le barreau est pris solide, opaque et sans source interne pour ne tenir compte en son sein que de la diffusion thermique. Ainsi, l'équation $(\mathcal{E})$ est vérifiée par le champ de température $T(x,t)$ et avec pour coefficient de diffusion thermique $D = \frac{\lambda}{\rho\,c}$ (avec λ conductivité thermique intervenant dans la loi de FOURIER, ρ masse volumique et c capacité calorifique massique). Considérons les conditions aux limites. Prenons $x = 0$ et $x = \ell$ pour abscisses limites du barreau. En $x = \ell$, on colle un thermostat pour imposer $T(\ell,t) = T_{\text{thermostat}}$ ce qui permet d'avoir la première condition limite. Pour la seconde condition, on doit imposer $\frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = \text{Cte}$ ce qui veut dire que c'est la puissance thermique traversant la face en $x = 0$ qui est constante (en utilisant la loi de FOURIER). Pour ce faire, il suffit de coller au barreau en $x = 0$ un module à effet PELTIER calorifugé sur ses autres faces (un tel module permet d'avoir le signe de puissance thermique transférée que l'on veut ; on aurait pu aussi penser à une résistance électrique mais celle-ci ne peut que fournir de la puissance au barreau par effet JOULE). On cherche une solution indépendante du temps $u_\infty(x)$. L'équation $(\mathcal{E})$ devient $\text{d}^2 u_\infty/\text{d}x^2 = 0$ et l'unique solution respectant les conditions aux limites $(\mathcal{L})$ est $u_\infty(x) = \frac{R\,I}{a}\,(\ell - x) + E$. Cette solution stationnaire (au sens d'indépendance du temps !) était prévisible à partir de la chaîne électrique : au bout d'un temps infini, les condensateurs sont tous chargés et équivalents à des interrupteurs ouverts. Chaque cellule ne comporte qu'une résistance en série avec les autres et la suite v_n admet une évolution arithmétique cohérente avec le modèle continu $u_\infty(x)$. La solution générale obtenue dans la suite permet de retrouver le fait que $u(x, t \to \infty) \to u_\infty(x)$, ce qui est rassurant ! L'énoncé attend la construction modale et non une simple vérification de la forme $u(x,t)$ qu'il propose. Commençons par poser $u(x,t) = u_\infty(x) + \theta(x,t)$ avec $\theta(x,t)$ que l'on va chercher sous forme d'une superposition de modes $\theta_p(x,t)$. Puisque $u(x,t)$ vérifie $(\mathcal{E})$, ainsi que $u_\infty(x)$, alors $\theta(x,t)$ la vérifie aussi. Imposons à chaque mode $\theta_p(x,t)$ de la respecter (cohérent avec le théorème de superposition pour cette équation linéaire). De plus, $u(x,t)$ et $u_\infty(x)$ vérifient les conditions aux limites $(\mathcal{L})$ donc $\theta(x,t)$ doit forcément respecter les conditions limites $(\mathcal{L}')$: $\theta(\ell,t) = 0$ et $\frac{\partial \theta}{\partial x}(0,t) = 0$ $(\mathcal{L}')$. A priori, chaque mode $\theta_p(x,t)$ n'est pas obligé de respecter ces conditions ; tout ce qui compte, c'est que leur superposition $\theta(x,t)$ les respecte. Toutefois, on peut toujours essayer de trouver les modes $\theta_p(x,t)$ qui respectent $(\mathcal{L}')$ (condition suffisante pour trouver une forme de solution du problème. Le mode $\theta_p(x,t)$ est cherché sous la forme d'une onde stationnaire $\theta_p(x,t) = f(x)\,g(t)$ où f et g sont des fonctions à déterminer (en réalité indicées par p mais j'allège les notations comme fait usuellement). On injecte cette forme dans l'équation $(\mathcal{E})$, d'où $D\,f''(x)\,g(t) = f(x)\,\dot{g}(t)$ soit $\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{\dot{g}(t)}{D\,g(t)} = \gamma$ où γ est une constante car les deux termes précédents dépendent uniquement de variables indépendantes (méthode de séparation des variables).

Envisageons divers cas pour γ pour voir si les conditions aux limites $(\mathcal{L}')$ sont vérifiables pour chaque mode (autrement dit, on veut $f(\ell) = 0$ et $f'(0) = 0$ sans avoir pour autant un mode identiquement nul) :

- Cas $\gamma = 0$: alors $f''(x) = 0$ donc $f(x)$ serait affine, ce qui ne convient pas car les conditions aux limites la rendraient identiquement nulle !
- Cas $\gamma > 0$: alors $f''(x) = \gamma\, f(x)$ impose
$$f(x) = A \ \mathrm{ch}\,[\sqrt{\gamma}\, x + \varphi]$$
La condition $f'(0) = 0$ oblige à prendre $\varphi = 0$ pour éviter la fonction f identiquement nulle. Toutefois, le choix de $f(\ell) = 0$ n'est alors plus possible ! Ce cas est aussi à rejeter.
- Cas $\gamma = -k^2 < 0$: alors $f''(x) + k^2\, f(x) = 0$ impose
$$f(x) = A\, \cos[k\, x + \varphi]$$
La condition $f'(0) = 0$ est respectée avec $\varphi = 0$ (le facteur A restant libre) et on évite la fonction f identiquement nulle malgré la condition $f(\ell) = 0$ en prenant $\cos(k\,\ell) = 0$. Cela revient à avoir une quantification de la pulsation spatiale k suivant la loi :
$$k_p = \frac{(2p+1)\,\pi}{2\,\ell} \quad p \in \mathbb{N}$$
Notons que mathématiquement $p \in \mathbb{Z}$ est a priori plus général mais les valeurs négatives de p n'apportent pas de mode supplémentaire (différent) car la fonction cosinus est paire ! Ainsi, $f(x) = f_p(x) = A_p\, \cos(k_p\, x)$

On peut terminer la détermination des modes en calculant $g(t)$, connaissant à présent $\gamma = -{k_p}^2$. Puisque $\dot{g}(t) = -D\, {k_p}^2\, g(t)$ il vient $g(t) = g_p(t) = \exp -D\, {k_p}^2\, t$. On a choisi $g_p(0) = 1$ car ce n'est pas restrictif dans le sens où A_p dans la fonction $f_p(x)$ reste libre et que c'est le produit $f_p(x)\, g_p(t)$ qui a un intérêt pour nous. Finalement, un mode respectant les équations $(\mathcal{E})$ et $(\mathcal{L}')$ est $\theta_p(x,t) = f_p(x)\, g_p(t) = A_p\, \cos(k_p\, x)\, \exp -D\, {k_p}^2\, t$ où $\quad p \in \mathbb{N}$. Il ne reste qu'à superposer tous les modes et la limite stationnaire $u_\infty(x)$ pour achever la construction de $u(x,t)$ proposée par l'énoncé. Le mode p a une période spatiale d'évolution (longueur d'onde) qui vaut $\delta_p = \frac{2\pi}{k_p} = \frac{4\,\ell}{2p+1}$. L'approximation des milieux continus est correcte pour ce mode si $\delta_p \gg a$, d'où la condition $\frac{4\,\ell}{2p+1} \gg a$. En ordre de grandeur, il vient $p \ll \frac{2\,\ell}{a} = 2\,N = 200$ donc on peut proposer de tronquer la série infinie de fonctions construite pour $u(x,t)$ en $p_{\max} \simeq 20$. Sur le dispositif électrique (discret), la condition initiale correspond au choix des valeurs des fonctions $v_n(t)$ à l'instant $t = 0$: $v_n(0) = h[x = (n-1)a]$. Il s'agit des différences de potentiels initiales aux bornes de chaque capacité C (impédances $\underline{Z}_2$). On peut simuler la condition initiale en chargeant préalablement chaque condensateur de façon adéquate, avant de le connecter au circuit (en fermant un interrupteur par exemple) ; la charge adéquate du n^{e} condensateur est $q_n(0) = C\, v_n(0) = C\, h(x = (n-1)a]$ et rappelons que celle-ci reste continue. La solution $u(x,t)$ doit respecter la condition initiale $u(x,0) = h(x) = u_\infty(x) + \sum_{p=0}^{\infty} A_p\, \cos(k_p\, x)$ c'est-à-dire, pour $x \in [0;\ell]$, $\xi(x) = h(x) - u_\infty(x) = \sum_{p=0}^{\infty} A_p\, \cos(k_p\, x) \quad$ où $\quad k_p = \frac{(2p+1)\,\pi}{2\,\ell}$. On reconnaît un développement en série de Fourier d'une fonction $\tilde{\xi}$ définie pour $x \in]-\infty;+\infty[$ telle que

- $\tilde{\xi}$ a pour période 4ℓ (période du fondamental tel que $p = 0$).
- $\tilde{\xi}$ est paire (harmoniques tous pairs).
- $\tilde{\xi}(x + 2\ell) = -\tilde{\xi}(x)$ (vu l'absence des harmoniques de rangs pairs).
- $\tilde{\xi}(x) = \xi(x) = h(x) - u_\infty(x)$ pour $x \in [0;\ell]$.

Par conséquent, le coefficient A_p est le coefficient de Fourier a_{2p+1} du développement de $\tilde{\xi}$ que l'on sait calculer grâce à la formule $A_p = a_{2p+1} = \frac{2}{4\,\ell} \int_{-2\ell}^{2\ell} \tilde{\xi}(x)\, \cos\left[\frac{(2p+1)\,2\pi}{4\,\ell}\, x\right]\, \mathrm{d}x$ soit $A_p = \frac{1}{2\,\ell} \int_{-2\ell}^{2\ell} \tilde{\xi}(x)\, \cos(k_p\, x)\, \mathrm{d}x$. Par argument de parité du contenu de l'intégrale, il vient soit $A_p = \frac{1}{\ell} \int_0^{2\ell} \tilde{\xi}(x)\, \cos(k_p\, x)\, \mathrm{d}x$ puis $A_p = \frac{1}{\ell}\left[\int_0^{\ell} \tilde{\xi}(x)\, \cos(k_p\, x)\, \mathrm{d}x + \int_{\ell}^{2\ell} \tilde{\xi}(x)\, \cos(k_p\, x)\, \mathrm{d}x\right]$. La seconde intégrale est identique à la première si on pense à faire le changement de variable $y = 2\ell - x$ et à utiliser la troisième propriété de construction de $\tilde{\xi}$. De la sorte, $A_p = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} \tilde{\xi}(x)\, \cos(k_p\, x)\, \mathrm{d}x$. Soit $A_p = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} [h(x) - u_\infty(x)]\, \cos(k_p\, x)\, \mathrm{d}x$. La solution $u(x,t)$ du problème posé est parfaitement déterminée (on peut la représenter à l'ordinateur en exploitant les relations de l'exercice). On peut trouver l'expression de A_p de façon moins élégante par une méthode de type vérificative (on calcule l'intégrale proposée en y injectant l'expression en série de $h(x) = u(x,0)$ et on trouve bien A_p à la fin grâce à la relation d'orthogonalité de la famille des cosinus qui intervient).

18. Diffusion radioactive dans un barreau de grande longueur

Réponses : D en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, $\frac{1}{D}\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} = k^2$, $n(x,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} n_0(x')\exp[ik(x-x') - k^2 Dt]\mathrm{d}k\mathrm{d}x'$, $n(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi D t}}\int_{-\infty}^{\infty} n_0(x')\exp -\frac{(x-x')^2}{4Dt}\mathrm{d}x'$, non.

19. Électrisation d'un jet liquide

Réponses : $\mathcal{D} = \frac{1}{\rho\gamma}$ en $\mathrm{m^2 \cdot s^{-1}}$, $\theta(x=0,t) = 0$ et $\theta(x \neq 0, t=0) = -E_0$, $\mathcal{D}k^2\tau = 1$, $A = 0$ et $k = (2n+1)\frac{\pi}{2L}$, $\theta(x,t) = B\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2L}\exp -\frac{t}{\tau}$, on voit que $\theta(x \neq 0, t=0) = B\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2L} \neq -E_0$, $\tau_n = \frac{4L^2}{\mathcal{D}(2n+1)^2\pi^2}$, $\theta(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \sin(2n+1)\frac{\pi x}{2L}$ de période $4L$, la fonction est impaire et prolongée sur $[-L, 0]$ par $+E_0$, de plus on remarque qu'elle ne comporte que les rangs impairs ce qui traduit $\theta(x, t=0) = -\theta(x+2L, t=0)$, par conséquent la fonction doit être prolongée par $-E_0$ sur $[L, 2L]$ et par $+E_0$ sur $[-2L, -L]$, l'intégrale sur $[-2L, 2L]$ est donc 4 fois l'intégrale sur $[0, L]$ $B_n = -\frac{2E_0}{L}\int_0^L \sin(2n+1)\frac{\pi x}{2L}\mathrm{d}x$, $B_n = -\frac{4E_0}{(2n+1)\pi}$, $u(x,t) = E_0\left[1 - \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{(2n+1)\pi}\sin(2n+1)\frac{\pi x}{2L}\exp -\frac{t(2n+1)^2\pi^2\mathcal{D}}{4L^2}\right)\right]$, temps de l'ordre de $\frac{4L^2}{\mathcal{D}\pi^2}$, augmente vite avec L.