

Exercices : 06 - Ondes lumineuses.

A. Amplitude de l'onde

1. Dilution de l'énergie

On s'intéresse à l'amplitude de l'onde lumineuse émise par une étoile (supposée ponctuelle) et on envisage sa propagation dans le vide. Ainsi, il n'y a aucune perte d'énergie lumineuse. Nous allons montrer que l'énergie lumineuse se dilue dans l'espace mais ne disparaît pas au profit d'une autre forme d'énergie (par exemple interne par absorption de l'onde). Nous allons supposer que l'onde lumineuse est à symétrie sphérique (étoile ponctuelle) et qu'elle est bien représentée par l'amplitude scalaire $s(r, t)$. L'équation de propagation à laquelle elle obéit est : $\Delta s = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$. L'onde est supposée monochromatique de pulsation ω .

1. Montrer que $\Delta s = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 (rs)}{\partial r^2}$.
2. En déduire que la forme de la solution de l'équation de D'Alembert est : $s(r, t) = \frac{a}{r} \cos \omega \left(t - \frac{r}{c} \right)$.
3. La puissance surfacique (en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$) à l'onde étant proportionnelle à l'amplitude au carré, montrer que l'énergie émise par l'étoile se dilue progressivement lorsque r augmente mais ne disparaît pas.

2. Puissance lumineuse - Puissance électrique

Le rendement d'une source lumineuse comme une ampoule traditionnelle est relativement mauvais puisqu'il vaut environ 4%. Nous allons comparer la puissance lumineuse fournie par une lampe à incandescence et un laser classique. La source laser est de type hélium-néon de longueur d'onde 632,8 nm, son faisceau possède une section de $0,25 \text{ cm}^2$ et sa puissance est de 2 mW.

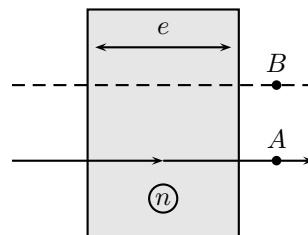
1. Sachant que la puissance surfacique du laser est de l'ordre de $\varepsilon_0 E^2 c$, calculer l'ordre de grandeur de l'amplitude E du champ électrique présent dans la lumière laser.
2. On considère que l'onde lumineuse émise par l'ampoule est une onde sphérique. Quelle devrait être la puissance électrique d'alimentation de cette ampoule pour que l'intensité lumineuse reçue à 2 m de celle-ci soit équivalente à celle du laser ?

On retiendra qu'il faut toujours être prudent avec les lasers même si les indications de puissance (lumineuse...) inscrites sur les appareils ou bien dans les brochures paraissent anodines.

B. Phase de l'onde

3. Traversée d'une lame à faces parallèles

On considère une onde lumineuse de longueur d'onde λ arrivant sous incidence normale avec la face d'entrée d'une lame à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice optique n . Les pointillés représentent le parcours d'une onde de même longueur d'onde que la précédente ne traversant pas la lame à faces parallèles. Les deux ondes sont en phase avant que l'une d'elle ne rentre dans la lame. Exprimer la phase de chacune des deux ondes lorsqu'elles atteignent respectivement les points A et B . Évaluer la différence de phase φ et la différence de marche telle que $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$. Exprimer les conditions nécessaires pour que les ondes soient : en phase, en opposition de phase, en quadrature de phase.



4. Surfaces d'onde

On considère un ensemble de deux rayons parallèles arrivant sur un miroir plan avec une incidence non nulle, voir la figure 1 à gauche. La surface S est une surface d'onde.

1. Dans le cas de la figure 1 à gauche, la surface S' est-elle ou non une surface d'onde ?
Un rayon lumineux arrive sur une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e et d'indice n . Il se forme un rayon réfléchi et un rayon est transmis dans le verre. Il effectue sur la face de sortie lui aussi une réfraction et une réflexion. On s'intéresse au rayon réfléchi qui va à tour, en revenant sur la face d'entrée effectuer une réflexion et une réfraction. Voir la figure 1 à droite.
2. Les deux rayons lumineux obtenus par réflexion sont-ils ou non en phase (S' est-elle ou non une surface d'onde) ? Si non, calculer leur différence de marche.

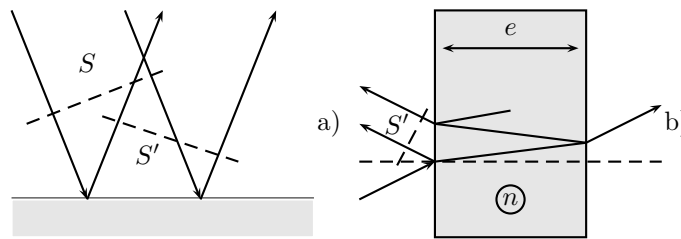


FIGURE 1 – Surface d’onde ou non ?

On indique que la réflexion d’un rayon lumineux sur un dioptre limitant deux milieux de $1 \rightarrow n$ entraîne un déphasage de π alors que la réflexion $n \rightarrow 1$ n’entraîne pas de déphasage.

5. Lames à faces parallèles

Une lame à faces parallèles, d’épaisseur e et d’indice n , est interposée entre une source S située à l’infini dans l’air, d’indice n_{air} , et un point A situé aussi dans l’air.

1. Traduire l’introduction du sujet en une figure (sans se placer sur un cas particulier). Ensuite, compléter la figure en traçant soigneusement le rayon lumineux issu de S qui arriverait en A en l’absence de lame, ainsi que le rayon qui arrive en A en présence de celle-ci.
2. On s’intéresse à la grandeur $\delta = (SA)_{\text{avec lame}} - (SA)_{\text{sans lame}}$, différence des chemins optiques entre S et A en présence et en l’absence de la lame (ces chemins optiques sont infinis). Montrer que :

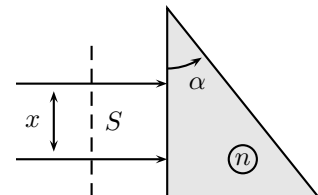
$$\delta = e(n \cos r - n_{\text{air}} \cos i)$$

où i est l’angle d’incidence des rayons lumineux sur la lame et r l’angle de réfraction. Vérifier le résultat dans le cas où $i = 0$.

3. Quelle est l’expression de δ approchée au deuxième ordre lorsque l’angle d’incidence est petit ?

6. Traversée d’un prisme

On considère le prisme d’indice n et d’angle au sommet α présenté sur la figure ci-contre. Deux rayons lumineux séparés par la distance x arrivent normalement sur la face d’entrée. On suppose que les ondes correspondantes à ces rayons sont en phase. La surface S est par conséquent une surface d’onde. Tracer les rayons qui émergent parallèlement du prisme. Un plan perpendiculaire à ces rayons émergents est-il un plan d’onde ?



Réponse : oui, $\delta = 0$.

7. Fibre optique à saut d’indice

Une fibre optique est schématisée par une lame de verre d’épaisseur d et d’indice n_1 placée entre deux couches de verre d’indice $n_2 < n_1$. Les rayons lumineux suivent des trajets compris dans un plan perpendiculaire à la lame, du type de celui qui est représenté sur la figure 2. Pour qu’il y ait propagation modale, l’onde doit être en phase (à un décalage entier de périodes éventuel près) aux points A et H de la figure 2. Chaque valeur de θ correspond à un mode de propagation.

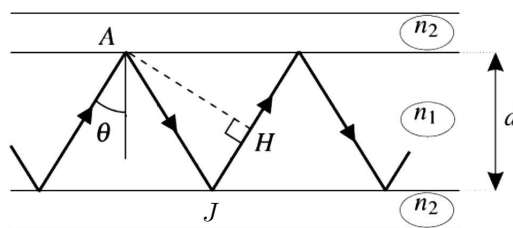


FIGURE 2 – Fibre optique à saut d’indice

1. Calculer le nombre de modes possibles si $d = 50,00 \mu\text{m}$, $\lambda_0 = 500,0 \text{ nm}$, $n_1 = 1,500$ et $n_2 = 1,400$.

8. Effet Doppler et élargissement spectral

- Un observateur est placé en un point O fixe. Un atome S émet un top toutes les T_0 secondes et on pose $f_0 = 1/T_0$. Cet atome se déplace sur un axe (Ox) à la vitesse constante v . À chaque top, correspond une vibration lumineuse émise par l'atome et qui se propage de manière isotrope à la vitesse c dans le référentiel du laboratoire de repère lié $(Oxyz)$. Montrer que la fréquence d'arrivée en O des tops quand S s'éloigne de O est :

$$f = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}$$

Que devient ce résultat quand S se rapproche de O ?

- En pratique, la source est une lampe spectrale à hydrogène fonctionnant grâce à un gaz d'atomes d'hydrogène excités, à une température $T = 2000$ K. Évaluer la longueur de cohérence¹ d'une radiation visible quelconque de cette source dont l'élargissement spectral est supposé lié à l'effet DOPPLER.
- La lampe spectrale à hydrogène utilisée présente des radiations dans le visible aux longueurs d'onde 410 nm, 434 nm, 486 nm et 656 nm dans le vide. Donner les valeurs des longueurs d'onde par rapport à l'eau et préciser les couleurs associées.

C. Propagation d'ondes

9. La lentille, transformateur de phase

Une lentille est un système optique d'axe de symétrie de révolution (Oz) , placé dans le vide, formé d'un milieu d'indice n et dont l'épaisseur e dépend de la distance r à l'axe (Oz) sous la forme $e(r) = e_0 \left(1 - \frac{r^2}{2f'(n-1)e_0} \right)$ avec $f' > 0$, $e_0 > 0$. L'abscisse de la lentille est $z = 0$ et on considère des rayons lumineux se propageant dans le sens des z croissants. Toutes les ondes étudiées sont monochromatiques de longueur d'onde λ_0 .

- On considère une onde sphérique $\underline{w}_d(r, z) \exp(i\omega t)$, divergente depuis un point de l'axe (Oz) d'abscisse $p < 0$. Exprimer $w_d(r, z)$ dans le cadre de l'approximation de GAUSS.
- Même question pour une onde sphérique $\underline{w}_c(r, z) \exp(i\omega t)$, convergente vers un point de l'axe (Oz) d'abscisse $p' > 0$.
- Quelle est la signification physique de la grandeur $\underline{t}(r) = \exp\left(-i\frac{2\pi}{\lambda_0}(n-1)[e(r) - e_0]\right)$?
- En déduire la relation de conjugaison pour une lentille mince ; commenter.

10. Laser multimodes

Une cavité laser de longueur L est formée entre deux miroirs plans, disposés face à face ; elle a une longueur L . On ne considère que les ondes se propageant le long de l'axe (Oz) , normale commune aux deux miroirs. Le milieu compris dans la cavité est caractérisé par un indice optique n_0 , supposé indépendant de la pulsation ω .

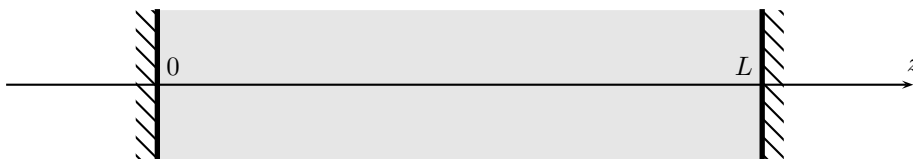


FIGURE 3 – Laser multimodes

- Les deux miroirs sont supposés parfaitement réfléchissants.
 - À quelle condition sur la pulsation ω un système d'ondes stationnaires peut-il s'établir dans la cavité ? On fera intervenir un nombre entier p .
Chaque valeur possible de p porte le nom de *mode* du laser.
 - L'effet laser n'est possible que pour un certain intervalle de fréquence, correspondant à l'intervalle de pulsations $\left[\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}, \omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2} \right]$; on admettra que le nombre N de modes possibles est assez grand et que tous les modes sont en phase en $z = 0$. Expliciter l'amplitude complexe totale des ondes dont le sens de propagation est celui de $+\vec{e}_z$, en $z = L$.

1. La longueur de cohérence correspond à la longueur spatiale du train d'onde. On a $\ell_c = c\tau$ où τ est la durée du train d'ondes.

- (c) Le miroir situé en $z = L$ est en fait très légèrement transparent ; on admet ici que cette propriété ne modifie pas la structure de l'onde dans la cavité. On notera τ le coefficient de transmission en amplitude du miroir situé en $z = L$. Déterminer l'onde transmise par ce miroir (c'est le faisceau laser).
- (d) La fonction $\mathcal{R}_N(\varphi) = \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2$ est représentée sur la figure 4 en fonction de φ , pour une valeur assez élevée de φ . Montrer que le faisceau laser est pulsé, formé d'impulsions de courte durée Δt émises périodiquement avec la période T . On déterminera Δt et T .

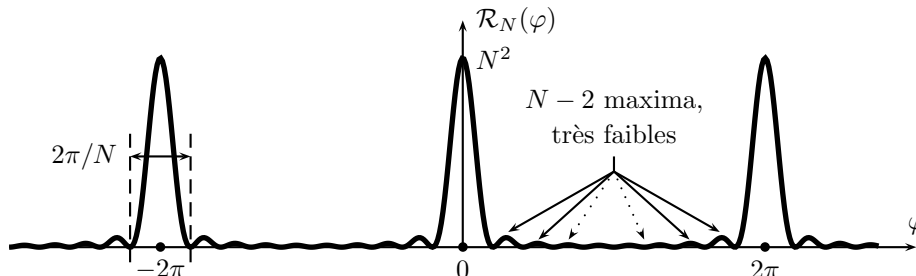


FIGURE 4 - Tracé de $\mathcal{R}_N(\varphi) = \left(\frac{\sin N\varphi/2}{\sin \varphi/2}\right)^2$ pour $N = 10$

2. L'effet laser n'est en fait possible que grâce au caractère amplificateur du milieu compris entre les deux miroirs ; on rend compte de cet effet en écrivant le vecteur d'onde de l'onde qui se propage entre les deux miroirs sous la forme $k = k_0(1 + i\gamma)$ avec $k_0^2 = \frac{n_0^2 \omega^2}{c_0^2}$ et $\gamma \in \mathbb{R}$.
- (a) Quel doit être le signe de γ pour obtenir un effet d'amplification ?
- (b) Quelle doit être au minimum la valeur de γ pour compenser les pertes d'énergie au niveau de miroir de sortie ?

11. Étude d'une onde gaussienne

On étudie une onde de la forme $W(\vec{r}, t) = u(\vec{r}) \exp[i(\omega t - kz)]$, avec $\omega = c_0 k_0$, se propageant dans le vide au voisinage de l'axe (Oz) ; on suppose donc que les variations de $u(\vec{r}) = u(x, y, z)$ selon z sont très faibles devant les variations de la même onde selon x et y ; on suppose aussi que u varie peu sur une longueur d'onde.

- Montrer que u vérifie l'équation d'onde paraxiale $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2ik \frac{\partial u}{\partial z}$.
- Montrer qu'une onde sphérique ayant son origine au point $z = 0$ peut, au voisinage de l'axe optique, s'écrire sous la forme $\underline{w} = \underline{A} \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x^2 + y^2}{2z}\right)$. S'agit-il d'une solution de l'équation d'onde paraxiale ?
- On cherche une solution plus générale de l'équation d'onde paraxiale : $\underline{w} = \underline{A}(z) \exp\left(-i \frac{2\pi}{\lambda_0} \frac{x^2 + y^2}{2\underline{q}(z)}\right)$.
Montrer que $\underline{q}(z) = q_0 + z - z_0$ et $\underline{A}(z) = A_0 \frac{q_0}{\underline{q}(z)}$. En déduire que l'amplitude paraxiale se met sous la forme $\underline{w}(x, y, z) = \underline{a}_0 \left(\frac{1}{R(z)} - \frac{2i}{k_0 w^2(z)}\right) \exp\left[-ik_0 \frac{x^2 + y^2}{2R(z)}\right] \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)}\right]$, où $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$; on posera $q_0 = iZ_R$ où Z_R s'appelle la distance de RAYLEIGH. Calculer $R(z)$ et $w(z)$ en fonction de z et de Z_R en particulier. On parle de *faisceau gaussien*.
- Quelle est la forme de la surface d'onde qui coupe l'axe en z ? Que représente $w(z)$?
- Montrer que la géométrie d'un faisceau gaussien de longueur d'onde donnée est entièrement déterminée par l'abscisse z_0 de son « foyer » et son « rayon focal », w_0 , définis comme le point z_0 de l'axe (Oz) où la surface d'onde est plane, et la valeur de $w_0 = w(z_0)$ en ce point.

D. Diffraction

12. Résolution d'un télescope

Un satellite espion est positionné à une distance de 200 km de la surface terrestre, supposée sans relief. Il possède un télescope embarqué de 25 cm de diamètre. Au-delà de quelle distance entre deux points, situés à la surface de la Terre, le satellite peut-il les séparer ? On prendra une longueur d'onde moyenne des rayons lumineux de 550 nm.

Proposition de réponses :

- a) 6,0 cm b) 10 cm c) 20 cm d) 60 cm

13. Photons reçus par l'œil

Au niveau du sol terrestre, la puissance surfacique du rayonnement solaire est de $500 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Un individu regarde le Soleil pendant 1 s, à travers un filtre sélectionnant la longueur d'onde $\lambda = 504 \text{ nm}$. Le filtre ne laisse passer que 0,001% de l'énergie solaire et le diamètre de la pupille d'un œil humain est de 2,0 mm. Combien de photons N l'individu reçoit-il dans l'œil ?

Proposition de réponses :

- a) $N = 4 \times 10^{12}$ b) $N = 4 \times 10^{10}$ c) $N = 8 \times 10^{15}$ d) $N = 8 \times 10^{10}$

14. Diffraction dans l'eau

Un faisceau laser est diffracté par une fente. Le dispositif peut être placé dans l'air ($n = 1,00$) ou dans l'eau ($n = 1,33$). Quelle affirmation suivante est correcte ?

Proposition de réponses :

- a) La figure de diffraction est identique dans l'air et dans l'eau.
 b) La figure de diffraction est plus large dans l'air que dans l'eau.
 c) La figure de diffraction est plus large dans l'eau que dans l'air.
 d) On n'observe pas de phénomène de diffraction dans l'eau.

Réponse : on sait que pour la diffraction d'une longueur d'onde λ par une fente de taille a , la divergence angulaire du faisceau lumineux sera $\Delta\theta \simeq \frac{\lambda}{a}$. Par conséquent, la taille du maximum principal de diffraction (tache d'Airy) sera proportionnelle à cet angle et donc proportionnel à la longueur d'onde. La longueur d'onde n'est pas une propriété intrinsèque d'une onde - c'est sa fréquence f -, elle dépend du milieu de propagation. Dans l'air assimilé au vide on a $\lambda_0 = \frac{c}{f}$ car l'onde se propage à la vitesse c . Dans l'eau, la vitesse de propagation est $v_{eau} = \frac{c}{n_{eau}} < c$. La longueur d'onde est donc $\lambda = \frac{\lambda_0}{n_{eau}}$. La lumière possède donc une longueur d'onde plus courte dans l'eau que dans le vide. La taille de la figure de diffraction est donc plus large dans l'air que dans l'eau. La bonne réponse est b).

15. Diffraction et mesure de la distance Terre - Lune

Pour mesurer avec précision la distance Terre - Lune $d \simeq 3,8 \times 10^8 \text{ m}$, on émet une impulsion laser d'énergie $E = 0,3 \text{ J}$ et de longueur d'onde $\lambda = 530 \text{ nm}$ au foyer F d'un télescope de rayon $R = 1 \text{ m}$, situé à la surface de la Terre et pointé en direction d'un réflecteur placé à la surface de la Lune. Ce réflecteur, constitué de $N = 100$ coins de cube de même côté $a \simeq 1 \text{ cm}$, renvoie l'impulsion vers F et la mesure du retard τ donne accès à la distance Terre-Lune d . Les rayons lumineux issus du télescope ont une divergence angulaire $\alpha = 2 \times 10^{-5} \text{ rad}$ et le faisceau de retour présente une divergence angulaire due à la diffraction qui se produit lors de la réflexion sur chaque coin de cube. Le réflecteur a été installé sur la Lune le 20 juillet 1969 par l'astronaute EDWIN ALDRIN. Sur la photographie de la figure 5, le réflecteur est l'objet tenu dans la main droite.

1. Estimer l'ordre de grandeur de la fraction ρ de la puissance lumineuse émise depuis la Terre qui est recueillie au retour par le télescope.
2. En déduire le nombre minimum n d'impulsions laser qu'il faut envoyer pour détecter un photon en retour, sachant que $h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck.
3. Démontrer qu'un rayon lumineux se réfléchissant successivement sur les trois faces intérieures d'un coin de cube repart en suivant une direction identique à celle avec laquelle il est arrivé.



FIGURE 5 – Réflecteur installé sur la Lune

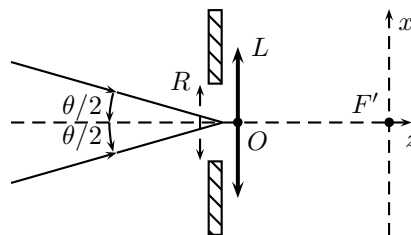


FIGURE 6 – Modélisation du télescope

16. Pouvoir de résolution d'un télescope

On modélise un télescope pointé sur deux étoiles proches par un diaphragme (F) suivi d'une lentille mince convergente (L) de focale f (voir la figure 6). Les étoiles sont assimilées à deux sources ponctuelles S_1 et S_2 , monochromatiques de même longueur d'onde λ , situées à l'infini dans le plan de la figure dans les directions faisant avec l'axe Oz les petits angles $\theta/2$ et $-\theta/2$. La diaphragme (F) est une fente de grande longueur L selon \vec{u}_y et de largeur R selon \vec{u}_x qui rend compte de manière simplifiée de la diffraction par les bords du télescope. On observe l'éclairement en un point M de l'axe $F'x$ du plan focal image de la lentille.

1. Établir l'expression de l'éclairement $E(M)$ en fonction de θ , R , λ , f , x et des valeurs maximales E_{01} et E_{02} des éclairements sur l'écran en présence d'une seule des deux étoiles.
2. La figure 7 donne l'allure du graphe $E(x)$ pour différentes valeurs de θ lorsque les deux étoiles ont même luminosité. Évaluer grâce au calcul et aux courbes un ordre de grandeur du pouvoir séparateur du télescope, défini comme la plus petite valeur de θ permettant au détecteur de distinguer les deux étoiles. Comment faut-il choisir R ? En réalité le pouvoir séparateur est aussi limité par la turbulence atmosphérique, équivalente à la diffraction sur un diaphragme de largeur R^* . Comment expliquer qu'on utilise malgré tout des télescopes de rayons $R = 10$ m?

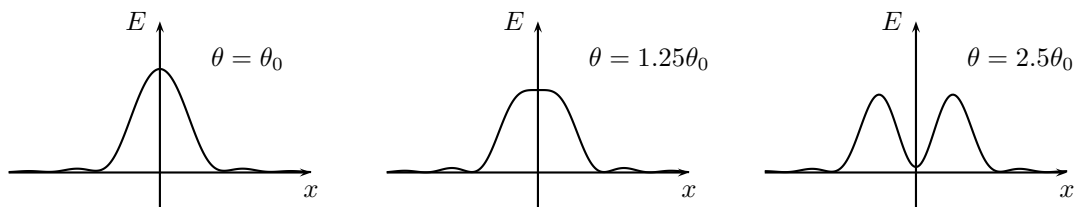


FIGURE 7 – Étoiles de même luminosité

Lorsque les deux étoiles ont des luminosités assez différentes, la situation rencontrée par les astronomes est encore plus délicate, voir les courbes de la figure 8.

Pour arriver à mieux distinguer les deux étoiles, on a recours à une technique appelée *apodisation*. Elle consiste à remplacer la fente par un diaphragme d'amplitude pour lequel la fonction de transparence évolue avec la coordonnée X de l'ouverture. Dans les calculs, précédente la fonction de transparence était égale à 1 quelle que soit la valeur de $X \in [-R/2, R/2]$. En utilisant comme fonction de transparence :

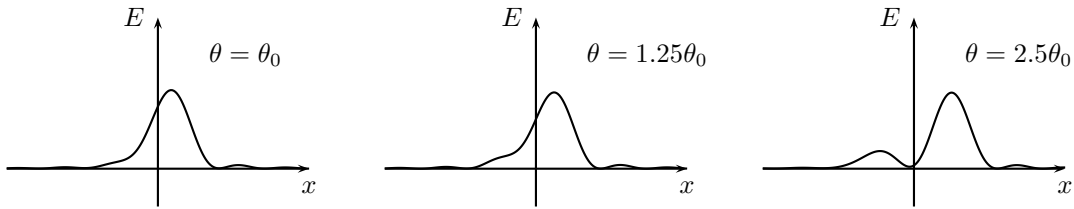


FIGURE 8 – Étoiles de luminosités différentes

$$t(X) = 1 - \frac{2|X|}{R} \quad \text{si} \quad |X| < \frac{R}{2} \quad \text{et nulle sinon}$$

on trouve les courbes d'éclairement de la figure 9.

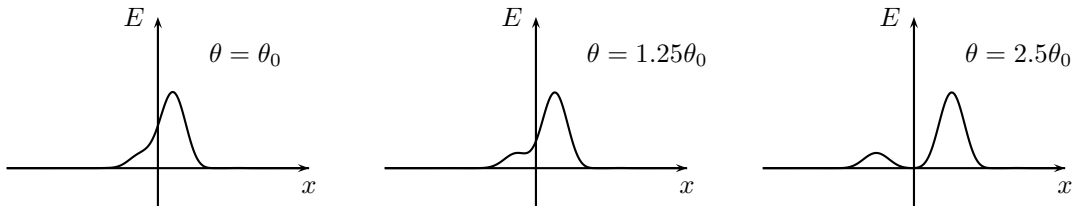


FIGURE 9 – Étoiles de luminosités différentes et apodisation

- Établir l'expression de l'éclairement dû aux deux étoiles et justifier le phénomène d'apodisation observé sur les courbes de la figure 9. Pour cela on donne l'intégrale suivante :

$$\int_{-R/2}^{R/2} t(X) \exp(j2\beta X) dX = 2R \text{sinc}^2(\beta R)$$

Le terme *apodisation* signifie littéralement « suppression des pieds ».

17. Théorème de Babinet

On désire comparer les figures de diffraction de Fraunhofer données par deux écrans complémentaires que l'on éclaire de la même façon avec une onde monochromatique plane tombant normalement. Les deux écrans sont définis par leur transmittance $t(x)$ sur le graphique de la figure 10.

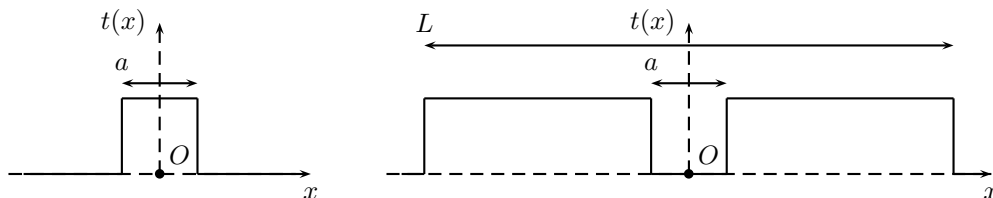


FIGURE 10 – Écrans complémentaires

On envisage le cas où $L \rightarrow \infty$, c'est-à-dire en pratique $L \gg a$. Les écrans sont alors qualifiés de complémentaires. Montrer sans entrer dans des calculs approfondis que les figures de diffraction de Fraunhofer sont identiques en dehors du centre. On utilisera le théorème de superposition.

18. Diffraction et stigmatisme d'un miroir

On considère un miroir sphérique de rayon R éclairé par un faisceau cylindrique parallèle à son axe optique, limité par un diaphragme circulaire de rayon a . On note F le foyer du miroir dans l'approximation de Gauss. Le rayon réfléchi sur le miroir correspondant à un rayon incident situé à la distance r de l'axe optique recoupe cet axe en un point A_r , puis le plan focal en un point H_r . On notera que le point A_r n'est pas confondu avec F si l'on ne se place pas dans le cadre de l'approximation de Gauss. Voir la figure 11.

- Déterminer CA_r en fonction de R , r et retrouver la position de F . En déduire l'expression de FH_r en fonction de R et r en limitant les calculs à l'ordre 3 en r/R .
- La lumière est monochromatique de longueur d'onde λ . Déterminer simplement l'ordre de grandeur du rayon ρ de la tache de diffraction qui apparaît au voisinage de F dans le plan focal image.
- En déduire qu'il existe un rayon optimale a_m du diaphragme et le calculer pour $R = 1 \text{ m}$ et $\lambda = 500 \text{ nm}$. Commenter.
- Quelle est la nature du miroir principal des télescopes qu'on utilise en astronomie ? Pourquoi ?

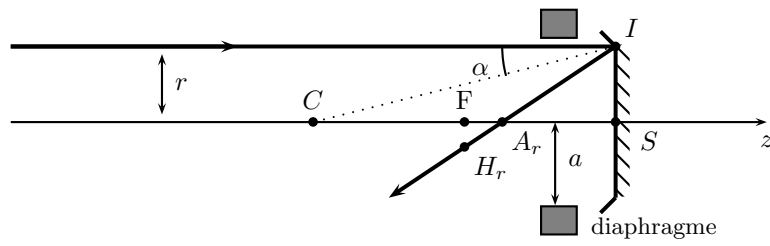


FIGURE 11 - Stigmatisme et diffraction