Exercices : 07 - Polarisation

— Solutions —

A. Polarisation rectiligne

1. Loi de Malus

Réponses : $I = I_0 \cos^2\theta$, $\frac{\Delta I}{I} \simeq 6\%$, $\frac{\Delta I}{I} \simeq 89\%$, très sensible au voisinage de l'extinction ($\frac{\pi}{2}$).

2. Polarimètre de Laurent

Réponses : faire un schéma dans le plan perpendiculaire à la direction de propagation et représenter les différents directions et les champs électriques concernés par le problème, $I_1 = I_0\cos^2\varphi$, $I_2 = I_0\cos^2(\varphi+2\epsilon)$; $\varphi = \pi/2-\epsilon$; $\epsilon = 13°$; $\Delta\varphi \approx 0,1°$ très sensible.

3. Filtre de Lyot

Réponses : L'onde incidente se met sous la forme $\vec{E} = E_0 \exp j(\omega t - kz)\,\vec{u}$ soit $\vec{E} = \underline{E}\,\vec{u} = \frac{E}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ par définition de $\vec{u}$. Après la lame (L), on a un champ $\vec{E}' = \frac{E}{\sqrt{2}}\,(\vec{e}_x + \vec{e}_y \exp -j\varphi)$. Après le polariseur (P), on obtient le champ projeté sur $\vec{u}$: $\vec{E}'' = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(E'_x + E'_y)\,\vec{u} = \frac{1}{2}\,\underline{E}\,(1+\exp -j\varphi)\,\vec{u}$. On calcule alors les éclairements avant $(\mathcal{E})$ et après $(\mathcal{E}'')$ le système complet en utilisant les notations réelles : $\mathcal{E} = \langle E^2\rangle = \langle {E_0}^2\,\cos^2(\omega t - kz)\rangle = \frac{{E_0}^2}{2}$ et $\mathcal{E}'' = \langle {E''}^2\rangle = \frac{1}{4}{E_0}^2\,\langle\cos^2(\omega t-kz)+\cos^2(\omega t-kz-\varphi)+2\,\cos(\omega t-kz)\,\cos(\omega t-kz-\varphi)\rangle$. On développe le dernier cosinus et on calcule les moyennes, d'où $\mathcal{E}'' = \langle {E''}^2\rangle = \frac{1}{4}\,{E_0}^2\,(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+0+\cos\varphi)$ soit $\mathcal{E}'' = \frac{1}{4}\,{E_0}^2\,[1+\cos\varphi]$ donc $T = \frac{\mathcal{E}''}{\mathcal{E}} = \frac{1+\cos\varphi}{2} = \cos^2\frac{\varphi}{2}$. Remarque : en restant en complexes, on peut calculer la moyenne temporelle avec la formule $\langle X^2\rangle = \frac{1}{2}\,\Re(\underline{X}\,\underline{X}^*)$ et on trouve le même résultat final. Puisque chaque cellule a une épaisseur différente, la périodicité de T change pour chaque cellule et l'ensemble de celles-ci présente une transmittance $T_{\text{total}} = T_e\,T_{2e}\,T_{2^2e}\,\ldots\,T_{2^{N-1}e}$, c'est-à-dire $T_{\text{total}} = \cos^2\frac{\varphi}{2}\,\cos^2\varphi\,\cos^2 2\varphi\,\ldots\,\cos^2 2^{N-2}\varphi$. On peut interpréter le filtrage en représentant les transmittances de chaque cellule (ici les 3 premières) de façon superposée à la figure 1.

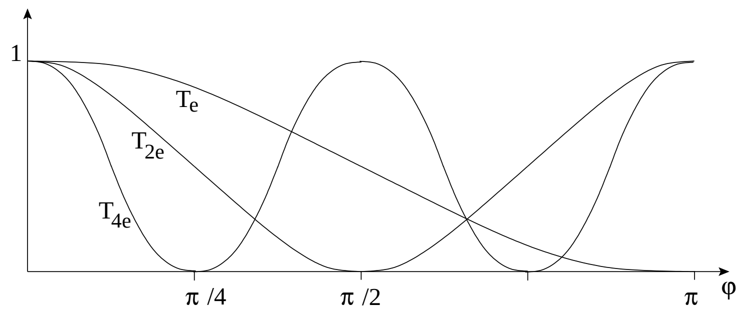

FIGURE 1 – Transmittance dans le cadre du filtre de LYOT

On voit que le produit de ces fonctions vaut 1 en $\varphi = 0\ [2\pi]$ et est négligeable sinon. Ainsi, un tel dispositif sélectionne uniquement ces valeurs de φ, soit dans le visible uniquement la longueur d'onde $\lambda_0 = \lambda_c$, d'où le nom de filtre. Un spectroscope à réseau ne fonctionne que pour une source de type fente-rectiligne (fine pour avoir une meilleure résolution). Pour une photo monochromatique du Soleil, il faudrait en balayer des bandes fines, ce qui est long à faire et ne permet pas d'étudier les tâches d'évolution rapide à sa surface.

4. Pourvoir rotatoire

Réponses : I_2 max, soit la substance fait tourner dans un sens de $80\,^\circ$, soit de $100\,^\circ$ dans l'autre sens, dans le premier cas $[\alpha^0] = 4\times10^{-3}\,^\circ\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{m}^2$, dans le second $[\alpha^0] = -5\times10^{-3}\,^\circ\cdot\mathrm{g}^{-1}\cdot\mathrm{m}^2$.

5. Mesure de pouvoir rotatoire

Réponses : $\varphi = 58\,^\circ$, $a = 0$, $b = 193192\,^\circ\cdot\mathrm{nm}$; $\frac{b}{\lambda_k} = (2k+1)90\,^\circ$ avec $k\in\mathbb{N}$, 2 cannelures sombres, $\lambda_1 = 716\,\mathrm{nm}$, $\lambda_2 = 429\,\mathrm{nm}$; $\lambda'_k = \frac{b}{\varphi+(2k+1)90\,^\circ} < \lambda_k$, vers le rouge.

B. Polarisation circulaire

6. Polarisation circulaire et modèle de pouvoir rotatoire

Réponses : $W_x(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2) = -i\gamma\omega W_y$ et $W_y(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2) = i\gamma\omega W_x$, $(\frac{\omega^2}{c_0^2} - k^2) = \pm\gamma\omega$, $k_+ = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{1 + \frac{\gamma c_0^2}{\omega}}$ et $k_- = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{1 - \frac{\gamma c_0^2}{\omega}}$, pour k_+ on a $W_y = -iW_x$ elliptique gauche, pour k_- on a $W_y = iW_x$ elliptique droite, $\vec{W} = \vec{W}_+ + \vec{W}_-$, $\vec{W} = (W_{+x}\vec{e}_x - iW_{+x}\vec{e}_y)\exp i(\omega t - k_+ z) + (W_{-x}\vec{e}_x + iW_{-x}\vec{e}_y)\exp i(\omega t - k_- z)$ avec $\vec{W}(z = 0) = W_0\vec{e}_x \exp i\omega t$ d'où $W_+ = W_- = \frac{W_0}{2}$, $\vec{W}(e,t) = \frac{W_0}{2}\exp i(\omega t - k_+ e)[\vec{e}_x(1 + \exp i\theta) - i\vec{e}_y(1 - \exp i\theta)]$, superposition de deux ondes une polarisation circulaire gauche $\vec{e}_x - i\vec{e}_y$ et une polarisation circulaire droite $\exp i\theta(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ déphasée de θ par rapport à la première, en factorisant par $\exp i\frac{\theta}{2}$, on montre que l'on a une polarisation rectiligne puisque $\vec{W}(e,t) = \frac{W_0}{2}\exp i(\omega t - k_+ e + \frac{\theta}{2})[\vec{e}_x(\exp -i\frac{\theta}{2} + \exp i\frac{\theta}{2}) - i\vec{e}_y(\exp -i\frac{\theta}{2} - \exp i\frac{\theta}{2})]$ d'où $\vec{W}(e,t) = W_0 \exp i(\omega t - k_+ e + \frac{\theta}{2})[\cos\frac{\theta}{2}\vec{e}_x - \sin\frac{\theta}{2}\vec{e}_y]$, la polarisation est rectiligne tournée d'un angle $-\frac{\theta}{2}$ par rapport à la polarisation rectiligne d'entrée.

7. Polarisations rectiligne et circulaire

Réponses : $\vec{E} = E_0\,[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y]$,
$\vec{E} = \frac{E_0}{2}\,[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x + \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y] + \frac{E_0}{2}\,[\cos(\omega t - kz)\vec{e}_x - \sin(\omega t - kz)\vec{e}_y]$, $\vec{E}_i = E_0 \exp i(\omega t - kz)(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ CD et $\vec{E}_r = -E_0\exp i(\omega t + kz)(\vec{e}_x + i\vec{e}_y)$ CG d'où $\vec{E}_{tot} = 2E_0 \exp i\omega t \sin kz\,[-i\vec{e}_x + \vec{e}_y]$ ondes stationnaires.