

Exercices : 08 - Interférences.

— Solutions —

A. Caractéristiques de la figure d'interférences

1. Battements ou interférences

Réponses : si on avait des interférences, l'amplitude ne varierait pas car le déphasage entre les deux ondes de même fréquence serait constant uniquement lié à la position des deux haut-parleurs et du microphone. On a nécessairement un phénomène de battements. Les deux fréquences sont donc voisines mais différentes. La seconde courbe nous montre sur une échelle de temps la période des deux ondes. On trouve qu'il y a à peu près (même si le signal n'est rigoureusement période sur la durée montrée) 10 périodes pour 10 ms. La période est à chercher autour de la milliseconde. On a donc $f_1 \simeq f_2 = 1000$ Hz. La bonne réponse est la réponse d). On peut aussi voir que l'écart des deux fréquences est déterminable sur le premier graphique. La période des battements est clairement de 100 ms, donc l'écart de fréquence est l'inverse à savoir 10 Hz. Pour les deux ondes sonores, on peut proposer $f_1 = 1000$ Hz et $f_2 = 1010$ Hz. D'autres propositions sont acceptables avec toujours une fréquence située près de 1000 Hz et un écart de 10 Hz.

2. Éclairement et contraste d'une image

Réponses : Dans ce cas, $I_{max} = I_{min}$ partout donc le contraste est $C_a = 0$. Dans ce cas, en raisonnant sur une zone comportant au moins un trait blanc et un trait noir, $I_{min} = 0$ et $I_{min} \neq I_{max}$ donc le contraste est $C_b = 1$. Dans ce cas, en raisonnant sur une zone comportant les valeurs extrêmes de modulation d'intensité, $I_{min}/I_{max} = 9/10$ donc $C_c = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = \frac{1}{19} \simeq 5,3\%$. On est à la limite de distinction des variations d'intensité sur l'image à l'œil humain nu ! On dispose du rapport des intensités minimale et maximale $\frac{I_{min}}{I_{max}} = \frac{1}{3000}$ d'où le contraste $C = \frac{3000-1}{3000+1} = 99,93\%$ ce qui est proche de l'unité. La luminance des zones sombres est 3000 fois plus faible que celle des zones les plus lumineuses, d'où $L_{sombre} = \frac{L_{max}}{3000} = 0,100$ Cd · m⁻².

3. Évolutions de la figure d'interférences

Réponses : $E(x) = 2E_0(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f})$, interfrange $i = \frac{\lambda f}{a} = 1$ cm, rien, rotation des franges rectilignes, i diminue, aucune influence, translation des franges de $x = -x_0$ car $E(x) = 2E_0(1 + \cos \frac{2\pi a(x+x_0)}{\lambda f})$, superposition des 3 systèmes de franges.

4. Miroirs de Fresnel

Réponses : Dédoublage de la source S_1 image (symétrique) de S par M_1 et S_2 image de S par M_2 , elles se situent sur un cercle de centre O et de rayon OS , $a = 2\alpha\sqrt{d^2 + h^2}$, écran parallèle à S_1S_2 , franges rectilignes, éclairement $E = \frac{E_{max}}{2}(1 + \cos \frac{2\pi ax}{\lambda D})$, interfrange $i = \frac{\lambda D}{2\alpha\sqrt{h^2 + d^2}}$.

5. Interférences avec deux miroirs parallèles

Réponses : les deux sources, S et S' , sont a priori incohérentes entre elles puisqu'on ne nous dit rien de particulier à leur sujet. Par conséquent, on va raisonner séparément avec chaque source seule pour calculer les intensités correspondantes sur l'écran. Ensuite, on pourra sommer ces intensités. Commençons par la source S seule. La réalisation d'une belle figure colorée est laissée à votre sagacité. Cette source a pour images respectives S_1 et S_2 par les miroirs plans (M_1) et (M_2) (faire des symétries planes). S_1 et S_2 sont des sources secondaires cohérentes en phase situées à une distance D de l'écran, distantes de $4l$, et symétriques par rapport au plan $x = -a$. Ainsi, ce qui est connu pour les trous d'YOUNG s'applique ici : pour S seule, on obtient des franges rectilignes sur l'écran (placé loin) avec un interfrange $i = \frac{\lambda D}{4l}$ et la frange centrale est en $x = -a$ sur l'écran. L'intensité associée est $I_S(M) = I_0 \left[1 + \cos \frac{8\pi l(x+a)}{\lambda D} \right]$. De même, pour S' seule, on arrive à un résultat symétrique : $I_{S'}(M) = I_0 \left[1 + \cos \frac{8\pi l(x-a)}{\lambda D} \right]$. Finalement, on somme les intensités produites sur l'écran par les sources incohérentes, d'où (grâce à la trigonométrie bien connue...) $I(M) = 2I_0 \left[1 + \gamma \cos \frac{8\pi lx}{\lambda D} \right]$ avec $\gamma = \cos \frac{8\pi la}{\lambda D}$. Le terme γ est appelé degré de cohérence spatiale et le contraste des franges, uniforme, est $C = \frac{I_{max}-I_{min}}{I_{max}+I_{min}} = |\gamma|$. On remarque que si a augmente depuis la valeur nulle, le contraste des franges s'annule une première fois pour $a_0 = \frac{\lambda D}{4l}$. Ensuite, au-delà de a_0 , le contraste ré-augmente mais les franges sont inversées ($\gamma < 0$), et ainsi de suite... Une telle évolution du contraste de la figure d'interférences, en raison de problèmes de cohérence spatiale, est utilisée dans la technique de synthèse d'ouverture (qui permet notamment de mesurer le diamètre angulaire d'étoiles doubles).

6. Bientilles de Billet

Réponses : L'onde incidente sur (L') est constituée de plans équiphasés en incidence normale. Chaque morceau de lentille fait converger cette onde aux foyers images F'_1 et F'_2 (séparés) qui se comportent alors comme deux sources cohérentes en phase ! On pose $F'_1F'_2 = 2a$. Voir le schéma de la figure 1.

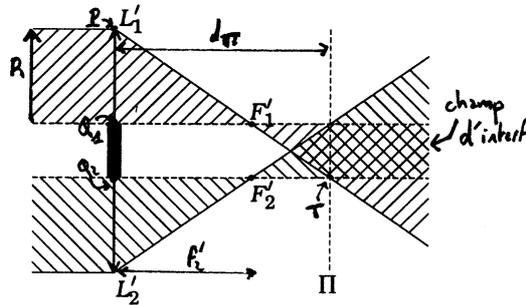


FIGURE 1 – Tracé des rayons et du champ d'interférences

Le dispositif est donc analogue aux trous de Young (placés fictivement en F'_1 et F'_2) et la largeur du champ d'interférences est $2a$ au-delà du plan Π . L'écran est-il bien au-delà du plan Π ? Pour y répondre, on utilise les triangles homothétiques (PQ_2T) et ($PQ_1F'_1$) : $\frac{d_\Pi}{PQ_2} = \frac{Q_1F'_1}{Q_1P}$ soit $\frac{d_\Pi}{2a+R} = \frac{f'_2}{R}$ donc $d_\Pi = f'_2 \left(1 + \frac{2a}{R}\right)$. La condition $d > d_\Pi$ revient par conséquent à avoir $R > \frac{2a}{d/f'_2 - 1} = 2$ mm. En conclusion, l'écran est fort probablement au-delà du plan Π ! On observe sur l'écran des franges d'interférences quasi rectilignes, parallèles à la direction de coupure de (L'), avec $i = \frac{\lambda(d-f'_2)}{2a} \simeq 60$ mm. Si l'on remplace S par un fil source, chaque point de ce fil se comporte comme une source incohérente vis-à-vis des autres. On doit donc sommer les intensités des figures obtenues pour chacun de ces points. Or, le fil est dans une direction parallèle aux franges : on somme les mêmes figures donc on obtient la même figure que pour S seule, plus lumineuse. L'intensité s'écrit par analogie avec les trous d'YOUNG : $I(x) = I_0 \left[1 + \cos 4\pi \frac{ax}{\lambda(d-f'_2)}\right]$ et on voit un nombre N de franges brillantes (en pensant à la frange centrale) $N = 2E \left[\frac{a}{i}\right] + 1 = 33$ franges. L'interfrange est très faible alors il faut utiliser un viseur micrométrique pour pouvoir les observer et réaliser des mesures.

7. Panneaux solaires anti-reflet

Réponses :

Une réflexion directe sur le panneau de verre provoque une réflexion de 4% de l'énergie lumineuse et donc une transmission dans le verre de 96%. En effet, on a : $R = \left(\frac{1-N}{1+N}\right)^2 = \frac{1}{25}$. Un tel dispositif peut réduire la puissance réfléchi en formant des interférences destructives entre les rayons réfléchis. Pour le rayon (1), on a uniquement une réflexion de $1 \rightarrow n$ d'où $E_1 = \left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 E_0$. Le rayon (2) fait deux transmissions $1 \rightarrow n$ et $n \rightarrow 1$ qui sont équivalentes en terme d'énergie et une réflexion $n \rightarrow N$. On obtient alors $E_2 = \left(\frac{4n}{(1+n)^2}\right)^2 \left(\frac{n-N}{n+N}\right)^2 E_0$. Comme on raisonne pour un rayon sous incidence normale, la différence de chemin géométrique est simplement $2e$, comme l'indice optique du milieu est n , on a $\delta = 2ne$. Il n'y a pas de différence de marche supplémentaire liée à une réflexion car la réflexion de $1 \rightarrow n$ provoque un changement de signe donc un changement de phase de π ce qui correspond à une différence de marche de $\lambda/2$ mais dans le même temps (2) subit une réflexion $n \rightarrow N$ qui, elle aussi, provoque un changement de signe, il y a compensation. Pour rappel, il y a un changement de signe de l'amplitude lorsque la réflexion s'effectue sur un milieu d'indice de réfraction plus élevé et pas de changement de signe dans le cas contraire. Pour obtenir des interférences destructives, il faut que $\delta = 2ne = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$. On a donc $e = \frac{2p+1}{4n}\lambda$. L'épaisseur de la couche la plus petite correspond à $p = 0$ d'où $e_{min} = \frac{\lambda}{4n}$. On peut montrer correctement, comme cela est fait dans le document de cours sur la couche anti-reflet, qu'il faut que $n = \sqrt{n_1 n_2} = \sqrt{N}$ avec $n_1 = 1$ et $n_2 = N$. Ici, dans le cadre de cette approche simplifiée, on peut retrouver ce résultat en disant que $\frac{4n}{(1+n)^2} \simeq 1$. Pour que $E_1 = E_2$, il faut répondre à la condition $\left(\frac{1-n}{1+n}\right)^2 = \left(\frac{n-N}{n+N}\right)^2$. On retrouve la condition $n = \sqrt{N} = 1,22$. On vérifie que l'approximation $\frac{4n}{(1+n)^2} \simeq 1$ est valable. Finalement, on trouve une couche d'indice $n = 1,22$ et d'épaisseur $e = 0,123 \mu\text{m}$. Il faut intégrer l'expression obtenue : $E_r = 2E_0^\omega \int_{\omega_0 - \frac{\Delta\omega}{2}}^{\omega_0 + \frac{\Delta\omega}{2}} \left(1 + \cos \frac{\omega\delta}{c}\right) d\omega$. Après un calcul classique et après avoir utilisé les règles de calcul trigonométrique, on arrive à : $E_r = 2E_0^\omega \Delta\omega \left(1 + \text{sinc} \frac{\Delta\omega\delta}{2c} \cos \frac{\omega_0\delta}{c}\right)$. Cette expression n'est pas tout à fait satisfaisante du fait des amplitudes des ondes qui interfèrent et qui ne sont pas identiques

puisqu'elles sont liées aux coefficients de réflexion et de transmission qu'elles subissent. En restant dans le cadre fixé par l'énoncé, on peut dire que $|\text{sinc} \frac{\Delta\omega\delta}{2c}|$ est une fonction lente qui va servir d'enveloppe à la fonction rapide des interférences $\cos \frac{\omega_0\delta}{c}$. La fonction lente est la fonction de contraste. À l'aide de *Python*, on étudie $f(e) = 1 + \text{sinc} \frac{\Delta\omega ne}{c} \cos \frac{\omega_0 2ne}{c}$. Si l'on envoie une onde sous l'incidence i , elle se réfracte et possède l'angle r dans le milieu d'indice n avec $\sin i = n \sin r$. Si l'on effectue le tracé des rayons, on voit que la différence de marche est $\delta = 2n \frac{e}{\cos r} - 2e \tan r \sin i$. En utilisant la loi de DESCARTES, on arrive à $\delta = 2ne \cos r$ que l'on peut écrire en fonction de l'angle d'incidence $\delta = 2ne \sqrt{1 - \sin^2 r} = 2ne \sqrt{1 - \frac{\sin^2 i}{n^2}}$ d'où l'expression finale $\delta = 2e \sqrt{n^2 - \sin^2 i}$. On remplace la différence de marche δ par sa nouvelle expression dans le sinuscardinal calculé avant et on observe avec le fichier *Python*. Cette démarche est discutable car lorsque l'incidence évolue, les coefficients de réflexion et de transmission sur chaque dioptre changent nettement.

8. Diffraction par deux trous

Réponses :

C'est la configuration d) qui est la bonne. Tout d'abord, les franges d'interférences se développent perpendiculairement à l'axe des deux trous. En effet, le plan médian des deux sources est un plan où les ondes provenant de chaque trou sont en phase. Dans ces conditions, il faut rejeter les propositions a) et c). Ensuite, imaginons que l'observation à l'infini soit effectuée dans le plan focal image d'une lentille convergente. L'interfrange est $i = \frac{\lambda f}{a}$ si a est la distance entre les deux sources. La largeur de la tache centrale de diffraction évolue, elle, en $\ell = \frac{\lambda f}{e}$. Le rapport de la tache centrale de diffraction sur l'interfrange est $\frac{\ell}{i} = \frac{a}{e}$. On constate que sur une figure ce rapport est de l'ordre de 6. On a donc $a = 6e$. Il faut éliminer la proposition b) puisque sur celle-ci, on a $a = 3e$. On garde donc la proposition d).

9. Diffraction par un objet inconnu

Réponses : On note f' la distance focale de la lentille de projection. La figure donnée montre une modulation de rectangles lumineux (de côtés $f' \Delta\alpha$ et $f' \Delta\beta$) par une figure constituée d'une tache circulaire centrale (de rayon $f' \Delta\theta$ jusqu'à annulation d'intensité), entourée d'un anneau concentrique (peu visible). Ces tailles sur écran de projection correspondent à des angles d'ouverture juste avant la lentille de projection précisés sur la figure 2, avec des directions x et y :

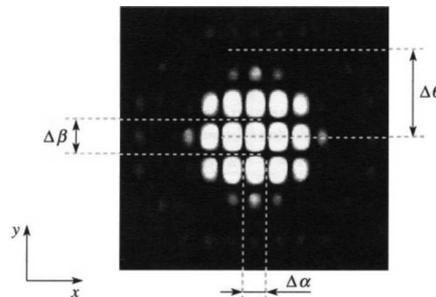


FIGURE 2 – Figure de diffraction avec le repérage

Faisons l'hypothèse que chaque trou circulaire est de rayon $R = D/2$ suffisamment inférieur à leur espacement caractéristique d . On peut alors mieux comprendre l'effet de modulation constaté précédemment. Pour ce faire :

- on calcule le rayon angulaire $\Delta\theta$ associé au terme I_{motif} : comme la première annulation de la fonction J_1 est pour $x \simeq 3,83$, il vient $\frac{\pi D \sin \Delta\theta}{\lambda_0} \simeq 3,83$ donc $\sin \Delta\theta \simeq 3,83 \frac{\lambda_0}{\pi D} = 1,22 \frac{\lambda_0}{D}$. On peut aussi supposer que $\lambda_0 \ll D$ (pour la luminosité ou encore pour le respect des conditions de GAUSS sur la lentille de projection) donc $\Delta\theta \simeq 1,22 \frac{\lambda_0}{D} = 0,61 \frac{\lambda_0}{R}$
- on calcule la périodicité angulaire caractéristique associée au terme I_{int} : on peut se contenter du cas connu de deux trous d'YOUNG distants de d à la place du plan percé de l'énoncé pour y accéder. Les franges d'interférences sont distantes de l'interfrange $i = \lambda_0 f'/d$ (voir démonstration faite en cours), ce qui correspond à une ouverture angulaire avant la lentille de projection $\Delta\alpha_i = \frac{\lambda_0}{d}$

À présent, on note que si $R \ll d$, alors $\Delta\theta \gg \Delta\alpha_i$: il y a bien dans ce cas modulation par le terme I_{motif} du terme I_{int} ! Cet effet de modulation est bien visible. La figure précédente résulte bien du produit des deux figures 3 et 4.

Compte tenu des symétries du terme d'interférences, on peut proposer que les centres des quatre ouvertures soient disposés aux sommets O_1, O_2, O_3 et O_4 d'un rectangle de côtés a (selon x) et b (selon y). On choisit l'origine

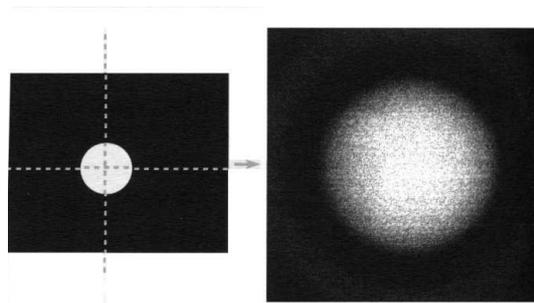


FIGURE 3 – Figure de diffraction I_{motif} (à droite) par un trou circulaire seul (à gauche) ; c'est une figure d'Airy respectant la symétrie circulaire du trou

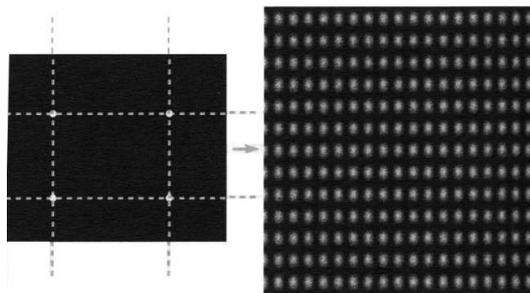


FIGURE 4 – Figure d'interférences I_{int} (à droite) par 4 points (à gauche) à placer en accord avec les symétries des rectangles lumineux (le positionnement des points aux sommets d'un rectangle est testé dans la question suivante)

O du repérage au centre du rectangle, de sorte que ces points correspondent à $O_1(a/2; b/2)$, $O_2(-a/2; b/2)$, $O_3(-a/2; -b/2)$ et $O_4(a/2; -b/2)$. Il faut s'assurer que cela peut convenir... Considérons un point M quelconque sur l'écran de projection. Les rayons issus de O_1, O_2, O_3 et O_4 qui arrivent en M sont parallèles avant la lentille (car l'écran de projection est dans son plan focal image!) : on note \vec{u} le vecteur unitaire selon cette direction. On peut alors expliciter le retard de phase φ_i en M du rayon passé par $O_i(x_i, y_i)$ en notant φ_O le retard de phase en M pour un rayon fictif parallèle aux précédents et qui serait passé par O : $\varphi_i = \varphi_O - \frac{2\pi}{\lambda_0} \vec{u} \cdot \vec{OO}_i$ en profitant du théorème de MALUS et du principe de retour inverse de la lumière (le plan \mathcal{P} est équiphasé pour le retour inverse donc la différence de marche δ_i se lit comme indiqué sur la figure 5 et $\delta_i = \vec{OO}_i \cdot \vec{u}$).

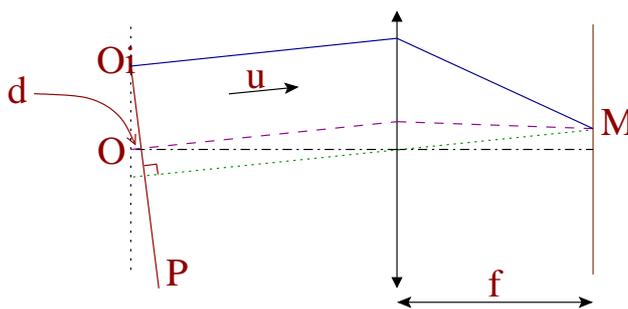


FIGURE 5 – Différence de marche

En raison des conditions de GAUSS, on peut dire que $\vec{u} \cdot \vec{e}_x \simeq \alpha$ et $\vec{u} \cdot \vec{e}_y \simeq \beta$ où α et β sont respectivement les angles orientés d'inclinaison des rayons dans les plans (xOz) et (yOz) par rapport à la direction (Oz) . Ainsi, en posant $k = 2\pi/\lambda_0$, $\varphi_i = \varphi_O - k[\alpha x_i + \beta y_i]$. L'amplitude totale de l'onde arrivant au point M sur l'écran de projection est la somme de chaque onde étant passé par chaque point O_i (ondes cohérentes) : $\underline{a}(M, t) = \underline{a}_1(M, t) + \underline{a}_2(M, t) + \underline{a}_3(M, t) + \underline{a}_4(M, t)$ où $\underline{a}_i(M, t) = \underline{a}_0 \exp[j(\omega t - \varphi_i)]$. Par conséquent, $\underline{a}(M, t) = \underline{a}_0 \exp[j(\omega t - \varphi_O)] [\exp jk(\alpha a + \beta b)/2 + \exp jk(-\alpha a + \beta b)/2 + \exp jk(-\alpha a - \beta b)/2 + \exp jk(\alpha a - \beta b)/2]$ ce qui se factorise en $\underline{a}(M, t) = \underline{a}_0 \exp[j(\omega t - \varphi_O)] [\exp jk\alpha a/2 + \exp -jk\alpha a/2] [\exp jk\beta b/2 + \exp -jk\beta b/2]$ soit $\underline{a} = 4\underline{a}_0 \exp[j(\omega t - \varphi_O)] \cos \frac{k\alpha a}{2} \cos \frac{k\beta b}{2}$. On passe à l'intensité en prenant le module au carré et, sachant que $\cos^2 x = (1 + \cos 2x)/2$, il vient $I_{\text{interf.}}(\alpha, \beta) = \left[1 + \cos \frac{2\pi a \alpha}{\lambda_0}\right] \left[1 + \cos \frac{2\pi b \beta}{\lambda_0}\right]$. On obtient le produit de deux figures

d'interférences en franges rectilignes orthogonales entre elles et qui forment bien des rectangles lumineux comme voulu. L'interfrange selon (Ox) est proportionnelle à $\frac{\lambda a}{a} = \Delta\alpha$ et celle selon (Oy) est proportionnelle à $\frac{\lambda b}{b} = \Delta\beta$. Il ne reste qu'à mesurer sur l'énoncé $\Delta\beta \simeq 1,6 \Delta\alpha$ et $\Delta\theta \simeq 4,3 \Delta\alpha$. Avec les relations antérieures donnant $\Delta\alpha$, $\Delta\beta$ et $\Delta\theta$, on tire $a \simeq 7R$ et $b \simeq 4,4R$. On a bien identifié l'écran percé : il y a quatre trous circulaires aux sommets d'un rectangle à orienter correctement. Les approximations effectuées sont pour une première approche relativement correctes (même si l'on n'a pas une très forte domination de a et b par rapport à R , cela suffit amplement ici).

10. Interférences en lumière parallèle - lame prismatique

Réponses : 2 faisceaux de lumière parallèle issue de la même source observées dans la zone de superposition, $I(x) = 2I_0(1 + \cos \frac{2\pi(n-1)\theta x}{\lambda})$, franges rectilignes d'interfrange $i = \frac{\lambda}{(n-1)\theta}$, $D_1 = \frac{h}{(n-1)\theta}$, $i_{eau} = \frac{\lambda}{n_{eau}(n-n_{eau})\theta}$.

11. Trous de Young et frange achromatique

Réponses : c'est la fonction de diffraction qui influence l'éclairement des franges claires $\text{sinc}^2 \frac{\pi dy}{\lambda_0 D} = 0,99$ impose $\frac{dy}{\lambda_0 D} = 0,055$, $y = 0,055 \frac{\lambda_0 D}{d} = 15i = 15 \frac{\lambda_0 D}{a}$, $d \leq 0,0037a$, $i = 0,56 \text{ mm}$, $\Delta y = + \frac{(n_0-1)eD}{a} = 2,6 \text{ cm}$, nettement supérieur à i , $E \simeq \frac{E_{max}}{2}(1 + \cos \frac{2\pi}{\lambda}(\frac{ay}{D} - (n-1)e))$, $p = \frac{ay}{\lambda D} - (n-1)\frac{e}{\lambda}$, $y_c = \frac{(n_0-1)eD}{a} - \frac{dn}{d\lambda} \frac{e\lambda_0 D}{a}$, $3,36 \text{ cm}$ plus haut, $\frac{33,6}{0,56} = 60$, frange achromatique brillante.

12. Interférences à trois ondes

Réponses : $\vec{u}_0 = \frac{2\pi}{\lambda}\vec{e}_x$, $\vec{u}_1 \simeq \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{e}_x - \theta\vec{e}_y)$, $\vec{u}_{-1} \simeq \frac{2\pi}{\lambda}(\vec{e}_x + \theta\vec{e}_y)$, franges colinéaires à Oz , 2 zones d'interférences entre 0 et 1 et 2 zones d'interférences entre 0 et -1 d'interfrange $i = \frac{\lambda}{\theta}$, une zone en losange d'interférences entre 0, 1 et -1 d'éclairement $E = \frac{E_{max}}{9} \frac{\sin^2 \frac{3\pi\theta y}{\lambda}}{\sin^2 \frac{\pi\theta y}{\lambda}}$, voir la figure 6, franges très brillantes à $y_p = \frac{p\lambda}{\theta}$, franges peu brillantes à $y'_p = \frac{(2p+1)\lambda}{2\theta}$.

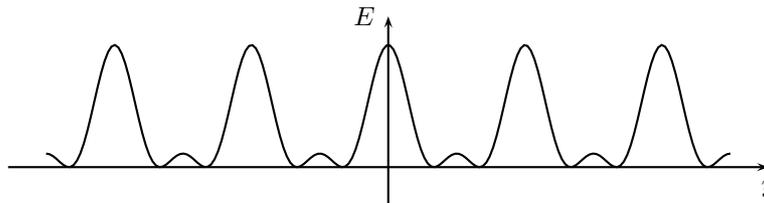


FIGURE 6 – Interférences à 3 ondes

13. Interférences en ondes sonores

Réponses : $\lambda = \frac{c}{f} = 0,8 \text{ m}$, $\delta = \frac{3}{2}\lambda$, le déphasage est donc $\varphi = 3\pi$; les ondes sont sphériques donc $A_1(P) = A_2 \frac{d_2}{d_1}$ car les amplitudes évoluent à l'inverse de la distance; $A_{tot} = A_2(\frac{3}{2} + \exp j\varphi) = \frac{A_2}{2}$; $I = \beta A_{tot}^2 = \frac{\beta A_2^2}{4}$ et en éteignant S_2 on a $I' = \frac{\beta A_2^2}{4} = 1,8 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$.

14. Avion à l'approche - Ondes radio

Réponses : Il s'agit d'un problème d'interférences, pour $\theta = 0$ la différence de marche $\delta = L \sin \theta$ est nulle donc $I = 2I_0$, pour $\theta = \pi/2$, on a $\delta = L$, la longueur d'onde est $\lambda = \frac{c}{f_0} = 25 \text{ m}$, on a donc $\delta = 4\lambda$, on a l'équivalent d'une frange brillante, $I = 2I_0$, pas d'intensité si $\delta = \frac{\lambda}{2} = L \sin \theta_m$ d'où $\theta_m = 7,2^\circ$, à la distance x d'une antenne la différence de marche est telle que $\sqrt{x^2 + L^2} - x = \frac{\lambda}{2}$ d'où $x = \frac{4L^2 - \lambda^2}{4\lambda} = 393,75 \text{ m}$, effet DOPPLER la fréquence reçue par l'avion est donnée par $f_r = \frac{f_0}{1 - \frac{v \cos \theta}{c}} \simeq f_0(1 + \frac{v \cos \theta}{c})$ au premier ordre, les battements sont donnés par $\Delta f = \frac{f_r - f_0}{2}$ d'où $v = \frac{\Delta f}{f_0} \frac{2c}{\cos \theta}$, $v = 58 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \simeq 210 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

15. Un film de savon

Réponses : il y a une réflexion sur l'interface air-savon que l'on suppose normale malgré le petit angle de la lame de savon. Cela constitue la première onde issue de l'onde source. Un second rayon lumineux correspond à la traversée de la lame de savon puis à la réflexion sur l'interface savon-air avec une seconde traversée en sens inverse de la lame de savon. Les deux réflexions ne sont pas de même nature sur le plan du signe, l'une s'effectue avec changement de signe et l'autre pas. Cela correspond à une différence de marche supplémentaire de $\lambda/2$ par rapport à l'aller et retour dans la lame de savon. On suppose l'indice de réfraction indépendant de la longueur d'onde. La différence de marche totale est donc $\delta = 2ne(x) + \frac{\lambda}{2} = 2nax + \frac{\lambda}{2}$. Les interférences sont constructives lorsque $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$. La première frange pour le violet se produit pour $p = 1$, on a donc

$2na x_1 = \frac{\lambda_1}{2}$. La première pour le vert correspond donc aussi à $p = 1$ et donc à $2na x_2 = \frac{\lambda_2}{2}$. On en déduit que $x_2 = x_1 \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = 5,0 \text{ cm}$. C'est donc la réponse a).

16. Interprétation interférentielle de la cavité résonante

Réponses : L'onde qui a subi deux réflexions a parcouru une distance supplémentaire $d = 2L$. La différence de phase est donc $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} 2L + \pi + \pi$ Les deux derniers termes correspondent à la réflexion en opposition de phase sur un miroir parfait. On recherche les longueurs d'onde des modes propres de la cavité. Ces modes correspondent aux cas où la superposition de toutes les ondes réfléchies ne donne pas une amplitude vibratoire nulle. Pour cela, il faut que les interférences entre toutes les ondes soient constructives (c'est-à-dire que les ondes se superposent bien), ce qui est le cas si les ondes en un même point sont déphasées d'un multiple entier de 2π , soit $\frac{2\pi}{\lambda_0} 2L = 2p\pi$ où $p \in \mathbb{N}^*$ donc $\lambda_{0p} = \frac{2L}{p}$. On peut citer le laser qui comporte une cavité optique résonante. Cette cavité impose une quantification des longueurs d'onde (modes du laser) et on peut ensuite sélectionner l'une d'elles et avoir une source quasi-monochromatique (il y a quand même une largeur spectrale pour chaque mode, au moins en raison de l'élargissement naturel (ou fondamental)). On peut retrouver ce résultat par une méthode électromagnétique. Le champ électrique dans la cavité est de la forme $\vec{E}(z, t) = (\underline{A} \exp^{i(\omega t - kz)} + \underline{B} \exp^{i(\omega t + kz)}) \vec{e}_x$ avec $k = \omega/c$ (somme de deux opps dans le vide). On utilise les conditions aux limites sachant que les plans conducteurs sont parfaits et imposent $\vec{E}_T(z = 0, t) = \vec{0}$ et $\vec{E}_T(z = L, t) = \vec{0}$. Alors $\underline{A} + \underline{B} = 0$ et il vient ensuite $\sin kL = 0$. On en déduit la condition de quantification de la longueur d'onde. Le champ réel solution de chaque mode p est $\vec{E} = E_{0,p} \sin(\frac{p\pi c}{L} t + \varphi_p) \sin(\frac{p\pi z}{L}) \vec{e}_x$.

17. Lentilles en aval de deux fentes d'Young

Réponses : Dans le premier cas ($D = f'$), le plan d'observation est confondu avec le plan focal image de la lentille (\mathcal{L}) donc on observe les interférences à l'infini ramenées dans le plan focal image de la lentille (les rayons qui provoquent les interférences sur l'écran sont parallèles avant la lentille). Le second cas ($D = 2f'$) est différent et concerne des interférences à distance finie. Le déphasage $\varphi(M)$ entre les rayons qui interfèrent au point M s'obtient en utilisant le principe de retour inverse de la lumière.

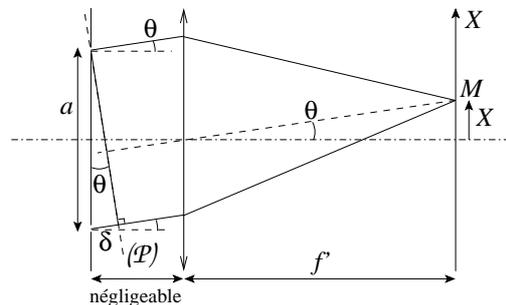


FIGURE 7 – Interférences à distance finie

En effet, si on imagine une source en M , celle-ci émet des ondes sphériques converties en plans équiphases à gauche de la lentille et la différence de marche introduite entre les rayons se lit simplement sur la figure (δ). Par conséquent, $\varphi(M) = \frac{2\pi \delta(M)}{\lambda}$ avec $\delta(M) = a \sin \theta(M) \simeq a \theta(M) = a \frac{X}{f'}$ car on est dans les conditions de GAUSS ($\theta \ll 1$) et on a pensé à exploiter le rayon passant par le centre de la lentille. L'interfrange i est la période spatiale ΔX du phénomène d'interférences observé sur l'écran et correspond à une rotation de phase de 2π , c'est-à-dire une variation de δ de λ_0 . Ainsi, on tire $i = \frac{\lambda f'}{a}$. Ce résultat est classique : lorsqu'on veut observer les interférences à l'infini (distance D fentes-écran sans lentille infinie), on utilise une lentille de focale f' et on place l'écran dans son plan focal image et les résultats connus pour les fentes de YOUNG à distance finie sont conservés en remplaçant le paramètre D par la focale f' de la lentille. Ce qui est embêtant a priori dans ce nouveau cas, c'est la lentille. Elle rend difficile le calcul de la différence de marche si on veut le faire directement. Il faut alors, comme toujours avec une lentille, penser à exploiter la condition de stigmatisme et/ou le principe de retour inverse de la lumière et/ou le théorème de MALUS (comme dans le cas précédent d'ailleurs). Cela permet de ne pas avoir à tenir compte de la forme de la lentille. On ne doit pas faire des calculs géométriques direct avec des rayons tombant sur une lentille ! Voir le schéma de la figure 8.

Pour s'en sortir ici, on remarque donc que l'écran est le conjugué par la lentille du plan (\mathcal{P}') en amont à une distance $2f'$. En effet, avec la relation de conjugaison de DESCARTES, $\frac{1}{CE_1} - \frac{1}{CE} = \frac{1}{f'}$ donne $CE_1 = -2f'$. Les rayons venant interférer en P sont ceux diffractés par les fentes selon les directions dont les prolongements passent par le point K (conjugué de P par la lentille). La condition de stigmatisme impose $(KJ_2P) = (KJ_1P)$.

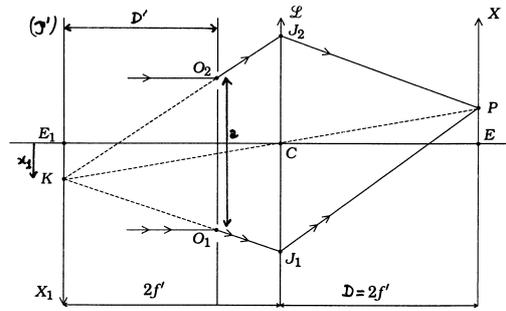


FIGURE 8 – Interférences à distance finie

Ainsi, la différence de marche au point P est $\delta(P) = KO_2 - KO_1$. On peut alors utiliser une analogie avec les fentes d'YOUNG, mais en regardant vers K , pour dire directement que $\delta(P) \simeq \frac{ax_1}{D'} = \frac{ax_1}{2f'}$, la lentille étant collée au plan des fentes. Or, le grandissement de la lentille est ici $\gamma = -1$ donc $X = +x_1$ (voir les axes inversés), d'où $\delta(P) = \frac{aX}{2f'}$. Il ne reste qu'à calculer la période spatiale des franges d'interférences (correspondant à une variation de λ_0 de δ). Finalement, l'interfrange obtenue est doublée par rapport au cas précédent : $i = \frac{2f'\lambda}{a}$.

B. Applications des interférences à la mesure

18. Mesure de l'indice d'un gaz

Réponse : $n = 1,000294$, on peut se tromper d'une frange d'où $\Delta n \simeq 3 \times 10^{-6}$.

19. Mesure de petits angles

Réponses : Éclairement uniforme max, idem $\Delta p = \frac{(N-1)e}{\lambda} = 100$, on modifie un peu la différence de marche, voir le schéma de la figure 9. $\delta' = n(AB) - (AC)$ avec $(AB) = \frac{e}{\cos \varepsilon}$ et $(AC) = AB \cos(\theta - \varepsilon)$. On en déduit que $\delta' = (AB)(n - \cos(\theta - \varepsilon)) = \frac{e}{\cos \varepsilon}(n - \cos(\theta - \varepsilon))$. Il ne faut pas oublier que θ et ε sont liés par la loi de la réfraction de DESCARTES $\sin \theta = n \sin \varepsilon$. Comme nous supposons l'angle θ petit, il en sera forcément de même de ε . On peut donc écrire que $\theta \simeq n\varepsilon$. On obtient alors $\delta' = (n - \cos(\frac{n-1}{n}\theta))\frac{e}{\cos \frac{\theta}{n}}$. On effectue les développements limités à l'ordre 2 de chacun des cosinus. $\delta' = (n - 1 + \frac{(n-1)^2\theta^2}{2n^2})e(1 + \frac{\theta^2}{2n^2})$ ce qui donne $\delta' = (n - 1)e + \frac{n-1}{2n}\theta^2e$. On a donc $\theta = \sqrt{\frac{2n-1}{n-1} \frac{\lambda}{e} \Delta p} = 3,9 \times 10^{-2}$ rad.

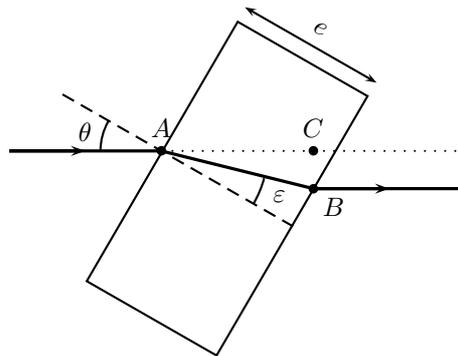


FIGURE 9 – Rotation d'un petit angle de la lame de verre

20. Expérience de Fizeau

Réponses : $\delta = \frac{ax}{D} + (n_{\leftarrow} - n_{\rightarrow})L$, $n_{\leftarrow} - n_{\rightarrow} = \frac{2n^2 v_{eau}}{c_0}$, $\Delta x = \frac{2n^2 v_{eau} LD}{ac_0} = 0,83$ mm, le double de ce qui est constaté, loi de composition relativiste des vitesses nécessaire.

21. Mesure de la vitesse d'écoulement d'un fluide

Réponses : $E = 2E_0(1 + \cos \frac{2\pi 2n \sin \theta x}{\lambda_0})$, $x = v_x t$, $f = \frac{2n \sin \theta v_x}{\lambda_0}$, rotation de $\pi/2$ des deux lasers, éclairement uniforme pas de signal, dispersées dans un espace petit devant l'interfrange $i = \frac{\lambda_0}{2n \sin \theta}$.

22. Mesure du diamètre apparent d'une étoile double

Réponses : $\delta' = -\delta'' = \alpha D/2$; $a_1 = A[\cos(\omega t - \varphi') + \cos(\omega t - \varphi'')]$ et $a_2 = A[\cos(\omega t - \varphi' - \frac{\pi\alpha D}{\lambda}) + \cos(\omega t - \varphi'' + \frac{\pi\alpha D}{\lambda})]$; les pulsations 2ω sont filtrées mais on conserve les fluctuations de φ et φ' , $i_1 = kA^2[1 + \cos(\varphi' - \varphi'')]$ et $i_2 = kA^2[1 + \cos(\varphi' - \varphi'' + 2\pi D\alpha/\lambda)]$, la moyenne du produit est $\langle P \rangle = \langle i_1 i_2 \rangle = k^2 A^4 (1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi\alpha D}{\lambda})$, il ne reste qu'un terme constant et un terme en $\cos 2\pi D\alpha/\lambda$, si l'on fait varier D alors on accède à α , encombrement si D trop petit et aussi si D trop grand, il faut aussi penser que la diffraction va limiter la précision des observations.

23. Mesure d'une vitesse de rotation avec un gyromètre laser

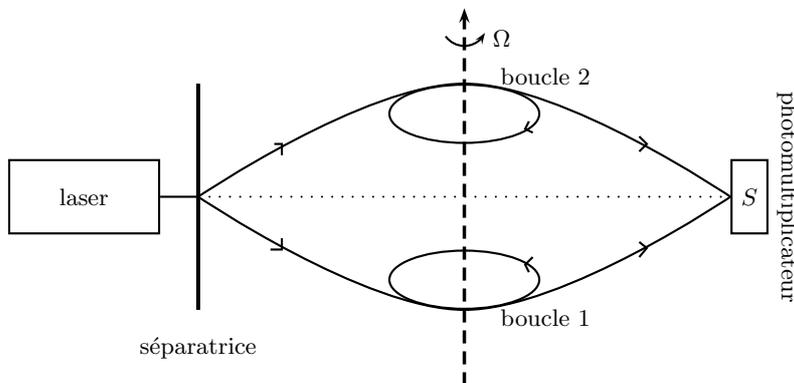


FIGURE 10 – Gyromètre laser

Réponses : la distance $N2\pi R$ est parcourue à la vitesse $c + \Omega R$ dans la boucle 2 et $c - \Omega R$ dans la boucle 1. La différence des temps de parcours est donc $\Delta t = N2\pi R \left(\frac{1}{c - \Omega R} - \frac{1}{c + \Omega R} \right)$. En réduisant au même dénominateur et en ne conservant que l'ordre le plus bas, on arrive à $\Delta t = \frac{N4\pi R^2 \Omega}{c^2}$. La différence de marche est $\delta = c\Delta t = \frac{4N\pi R^2 \Omega}{c}$. On trouve bien que $\delta = \frac{4A\Omega}{c}$ avec $A = N\pi R^2$. la différence de phase est $\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$. Il y a interférences $I = \frac{I_0}{2} \left(1 + \cos \frac{8\pi^2 R^2 N\Omega}{\lambda c} \right)$. Cette intensité est nulle la première fois lorsque $\varphi = \frac{\pi}{2}$. La valeur minimale de la vitesse mesurable est $\Omega_1 = \frac{\lambda c}{16\pi N R^2}$, on trouve $\Omega_1 = 0,22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.