

## Exercices : 09 - Interféromètre de Michelson

### A. Formes de la figure d'interférences

#### 1. Anneaux de Haidinger

On considère un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air (on appellera  $M_1$  le miroir mobile et  $M_2$ ). Il est éclairé par la raie verte de la lampe à vapeur de mercure de longueur d'onde  $\lambda = 546,1 \text{ nm}$ . L'épaisseur de la lame d'air constituée est  $e$ , elle est très voisine de  $1 \text{ cm}$ .

1. Décrire un tel interféromètre.
2. En admettant qu'il y ait au centre un maximum d'intensité lumineuse, calculer les rayons des 4 premiers anneaux brillants dans le plan focal d'un objectif de focal  $1 \text{ m}$ .  
On éclaire maintenant avec uniquement la raie verte du mercure l'interféromètre réglé au contact optique.
3. Décrire la figure d'interférences.  
En fait, à la suite d'une mauvaise manipulation, le miroir  $M_2$  présente une légère déformation au niveau de son centre. Cette déformation est modélisée par une calotte sphérique de rayon  $R = 10 \text{ m}$ .
4. Expliquer pourquoi la figure d'interférences est à nouveau constituée d'anneaux. Calculer les rayons des 4 premiers anneaux brillants.

#### 2. Étude d'un coin d'air

Un interféromètre de Michelson est monté en coin d'air. L'angle entre les deux miroirs est  $\alpha = 5 \times 10^{-4} \text{ rad}$ . Il est éclairé sous une incidence quasi-normale par une source étendue spatialement. Celle-ci émet deux radiations de longueurs d'onde  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  d'égale intensité.

1. Donner l'expression de l'éclairement obtenu sur le coin d'air équivalent en fonction de  $x$ , coordonnée définie le long d'un des deux miroirs.
2. Les valeurs des longueurs d'onde sont  $\lambda_1 = 486 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 434 \text{ nm}$ . Compte tenu de ces valeurs, donner une idée de l'allure de la courbe  $E(x)$ . Calculer la période de la visibilité (contraste).

#### 3. Doublet du sodium - Influence sur le contraste

Un interféromètre de Michelson est réglé de telle sorte que ses miroirs soient exactement perpendiculaires et qu'on se trouve au contact optique. Il est éclairé en lumière parallèle au moyen d'une lampe à vapeur de Sodium ne fournissant que les seules raies du doublet de la raie  $D$  :  $\lambda_1 = 589,0 \text{ nm}$  et  $\lambda_2 = 589,6 \text{ nm}$ . Un moteur déplace lentement un des miroirs perpendiculairement à son plan à vitesse constante  $V$ . On note  $x$  l'épaisseur de la lame d'air ainsi constituée. On mesure en permanence l'éclairement au centre de la figure d'interférence en disposant un capteur CCD au foyer principal image d'une lentille mince convergente disposée en sortie de l'interféromètre.

1. Établir l'expression de l'éclairement  $E$  en fonction du temps  $t$ .
2. Donner l'allure de la courbe correspondante et le nombre de franges claires enregistrées entre deux annulations du contraste.
3. Quelle est la valeur de la fréquence du signal électrique produit par le capteur si la vitesse est de déplacement du miroir est  $V = 1 \text{ cm} \cdot \text{h}^{-1}$  ? Que faudrait-il faire pour obtenir sur un oscilloscope directement la fonction de contraste ? Quelle application pourrait-on faire de cette expérience ?

#### 4. Critère qualitatif de brouillage

On considère un interféromètre de MICHELSON réglé en anneaux d'égale inclinaison. On étudie l'intensité lumineuse sur le capteur placé au centre  $O$  de la figure d'interférence.

1. Donner l'expression de la différence de marche  $\delta$  et l'ordre  $p$  en  $O$  en fonction de  $z = y - x$  où  $x$  et  $y$  sont respectivement les distances de chacun des miroirs à la séparatrice dans le cas d'une source monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ .
2. En déduire et tracer l'éclairement ou l'intensité lumineuse  $E(z)$  lorsque les amplitudes des deux ondes sont égales.
3. L'amplitude des deux ondes n'est pas la même :  $A_0$  est l'amplitude de l'une des deux ondes alors que  $A_0(1 + \varepsilon)$  est celle de la seconde avec  $\varepsilon \ll 1$ . Calculer l'éclairement  $E(z, \varepsilon)$  et exprimer le contraste de la figure d'interférences.
4. On revient à  $\varepsilon = 0$ . La source émet dans le domaine fréquentiel  $[\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2}]$  une densité spectrale uniforme. Estimer la valeur  $z_b > 0$  de  $z$  telle qu'il y ait brouillage.

5. Applications numériques :  $\Delta\nu = 10^{12}$  Hz et  $\lambda_0 = 634$  nm. Peut-on observer le brouillage ? Même question si on utilise un laser de même longueur d'onde mais possédant une raie très fine de largeur fréquentielle  $\Delta\nu = 10^6$  Hz.

### 5. Repérage du contact optique par spectre cannelé

On règle un interféromètre de MICHELSON. Voir le schéma de la figure 1.

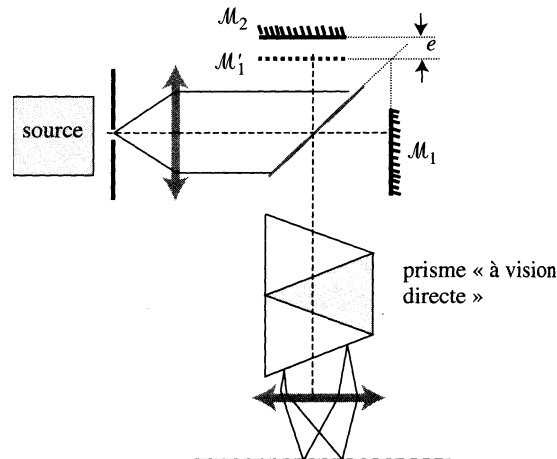


FIGURE 1 – Interférogramme enregistré sur un interféromètre de MICHELSON

1. Comment peut-on repérer la position du contact optique en lumière monochromatique ? Estimer la précision de ce repérage dans des conditions usuelles d'expérience. Donner une méthode très précise pour repérer le contact optique.
2. Le contact optique étant presque réalisé, on effectue le montage présenté sur le schéma. La fente mince est placée dans le plan focal objet de la lentille. La source est polychromatique. On admet que l'on peut distinguer des couleurs d'interférences lorsqu'il y a au plus deux cannelures dans le spectre visible de la lumière. Quel est l'aspect visuel de la lumière qui sort de l'interféromètre (avant le prisme) ?
3. On projette l'image de la source sur un écran. On interpose un prisme qui dévie sélectivement les différentes longueurs d'onde. Qu'observe-t-on sur l'écran ?
4. Quel est l'intérêt du prisme à vision directe par rapport au prisme simple ?
5. On compte 15 cannelures noires sur l'ensemble du spectre visible. Quel est l'ordre de grandeur de l'épaisseur  $e$  de la lame d'air ?
6. On chariote (on translate) le miroir  $\mathcal{M}_1$  ; le nombre de cannelures noires diminue globalement sur l'écran. Comment ces cannelures se sont-elles déplacées, et quel est le sens de variation de  $e$  ?
7. Quand il ne reste plus que 2 cannelures, quel est l'aspect (sans prisme) de la lumière issue de l'interféromètre ?
8. Expliquer la fin du réglage qui permet d'obtenir le contact optique.

## B. Applications

### 6. Mesure de l'épaisseur d'une mince lame de verre

Un interféromètre de Michelson est réglé avec ses miroirs exactement perpendiculaires. Le faisceau incident issu d'une source primaire étendue  $S$  est monochromatique ( $\lambda = 500$  nm). A partir de la situation où on est au contact optique, on déplace le miroir  $\mathcal{M}_2$  de 1 mm normalement à son plan.

1. Étudier les phénomènes d'interférences qui apparaissent au voisinage de l'incidence normale, dans le plan focal d'une lentille convergente. Déterminer la phase au centre et l'ordre d'interférence du 2<sup>ème</sup> anneau sombre.
2. On place sur l'un des bras une lame mince d'épaisseur  $t = 7,5 \mu\text{m}$  et d'indice  $n = 1,50$ . Trouver la variation de l'ordre d'interférence au centre.
3. On remplace la source primaire par une source ponctuelle, placée au foyer d'une lentille mince convergente. Initialement les deux miroirs sont perpendiculaires et au contact optique. Qu'observe-t-on au foyer image de la seconde lentille lorsqu'on éloigne  $\mathcal{M}_2$  de la lame séparatrice ?

4. A quelle condition et comment peut-on mesurer l'épaisseur de la lame de verre ?

### 7. Mesure de la largeur d'une raie

Une source ponctuelle monochromatique éclaire un interféromètre de Michelson réglé en lame d'air de telle sorte que l'un des miroirs  $M_1$  soit fixe et que l'autre puisse se déplacer parallèlement à lui-même à partir de sa position initiale correspondant à une différence de marche nulle. Un détecteur  $P$  situé sur l'axe du faisceau donne un signal électrique proportionnel à l'intensité  $I$  du faisceau qu'il reçoit.

1. Exprimer  $I$  en fonction de la fréquence  $\nu_0$  de la radiation émise et de  $\tau = 2x/c$ ,  $x$  étant le déplacement de  $M_2$  et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide.
2. La source n'émet pas une onde monochromatique, comme cela est supposé précédemment, mais une onde quasi-monochromatique centrée sur la fréquence  $\nu_0$ . On note  $\Delta\nu_{1/2}$  la largeur totale à mi-hauteur de l'intensité spectrale de la source. Trouver l'intensité  $I(\tau)$  lorsque l'intensité spectrale de la raie  $I_\nu$  est rectangulaire.
3. Un calculateur associé au détecteur fournit la fonction :  $V(\tau) = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$ . Trouver  $V(\tau)$ . Tracer son graphe.
4. La raie rouge du cadmium ( $\lambda_0 = 643,8 \text{ nm}$ ) présente une intensité spectrale  $I_\nu$  approximativement rectangulaire. On observe, pour la première fois  $V(\tau) = 0$  pour  $x = 15 \text{ cm}$ . En déduire  $\Delta\nu_{1/2}$  et  $\Delta\lambda_{1/2}$ .

### 8. Spectrométrie par transformée de Fourier

On éclaire un interféromètre de Michelson monté en lame d'air d'épaisseur  $e$  avec une raie quasi-monochromatique, caractérisée par son profil spectral :

$$\frac{dE_0}{d\sigma} = f(\sigma) = C \exp - \left( \frac{(\sigma - \sigma_0)^2}{a^2} \right)$$

où  $\sigma = 1/\lambda$  et où  $\sigma_0$ ,  $C$  et  $a \ll \sigma_0$  sont des constantes positives. Pour simplifier, on étendra la fonction  $f$  aux valeurs négatives de  $\sigma$ , domaine où elle prend des valeurs négligeables.

1. Quelle est la signification de  $\sigma_0$  ? Calculer la largeur  $\Delta\sigma$  du profil à mi-hauteur et interpréter la constante  $a$ . Faire un graphique rapide du profil spectral.
2. On réalise un enregistrement de l'éclairement au centre de la figure d'interférences en fonction de l'épaisseur de la lame d'air qu'on fait varier en déplaçant un des miroirs avec l'aide d'un moteur. Établir l'expression de l'éclairement  $E(e)$  en fonction de constantes et de la transformée de Fourier du profil spectral définie par :

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma) \exp(2j\pi\sigma x) d\sigma$$

3. Sachant que  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp - \frac{u^2}{a^2} \exp(2j\pi ux) du = a\sqrt{\pi} \exp - \pi^2 a^2 x^2$ , établir l'expression de  $E(e)$  et tracer l'allure de son graphe pour  $\Delta\sigma \ll \sigma_0$ . Comment évolue la visibilité des franges ? Comment peut-on mesurer  $\Delta\sigma$  ? Quelle valeur de  $e$  doit-on pouvoir atteindre ?

### 9. Spectrométrie interférentielle

On considère un interféromètre de MICHELSON réglé en lame d'air. On utilise un détecteur, ponctuel, placé au centre du système d'anneaux dans le plan focal image d'une lentille convergente. Le miroir  $M_1$  est mobile entre  $\ell = 0$  et  $\ell = L$ , ce qui entraîne une variation du chemin optique  $\Delta$  de  $\Delta = 0$  à  $\Delta = \Delta_{max}$ . Le détecteur mesure l'intensité lumineuse  $I(\Delta)$ . Le mouvement du miroir est commandé par un système informatique qui enregistre la fonction  $I(\Delta)$ , appelée *interférogramme*. Ce système calcule ensuite numériquement la transformée  $F(\omega)$  de la fonction  $I(\Delta)$ , définie par l'intégrale :

$$F(\omega) = \int_0^{\Delta_{max}} I(\Delta) \cos \frac{\omega\Delta}{c} d\Delta$$

1. Donner l'expression de la différence de marche  $\Delta$ .
2. Calculer  $F(\omega)$  dans le cas d'une raie monochromatique de pulsation  $\omega_0$  et représenter l'allure de  $F(\omega)$ .
3. En déduire l'allure de la courbe  $F(\omega)$  dans le cas de deux ondes de pulsations  $\omega_1$  et  $\omega_2 > \omega_1$ , voisines de la pulsation centrale  $\omega_0$ .

4. Montrer que ce dispositif peut être utilisé comme un spectromètre. En définissant par vous-même un critère permettant de définir le plus petit écart spectral qui puisse être observé par ce dispositif, évaluer la résolution  $\Delta\omega_R$  du spectromètre. En déduire son pouvoir de résolution  $\mathcal{R}$  défini par :

$$\mathcal{R} = \frac{\omega_0}{\Delta\omega_R}$$

5. Montrer que  $\mathcal{R}$  est fixé par le nombre  $N_{max}$  de maxima d'intensité enregistrés par le détecteur, lors de la course finie de l'interféromètre.
6. On étudie une source lumineuse d'émission centrée sur la pulsation  $\omega_0$  et dont le spectre forme une courbe en cloche de largeur à mi-hauteur  $\Delta\omega$ . À quelle condition sur  $\Delta\omega_R$  pourra-t-on dire que le spectromètre permet d'étudier finement le profil de cette raie ?

### 10. Mesure de déformation

Un interféromètre de Michelson est réglé au contact optique : les deux miroirs sont orthogonaux, symétriques relativement à la lame séparatrice (cf. figure 2). L'un des miroirs est en fait légèrement déformé et forme une sphère, convexe, de grand rayon  $R$ . Les miroirs sont éclairés par un faisceau de lumière monochromatique de longueur d'onde  $\lambda$  issu d'un point lumineux situé sur l'axe de l'interféromètre à la distance  $d$  de la lame séparatrice. L'observation est réalisée au foyer d'une lentille convergente de focale  $f'$ .

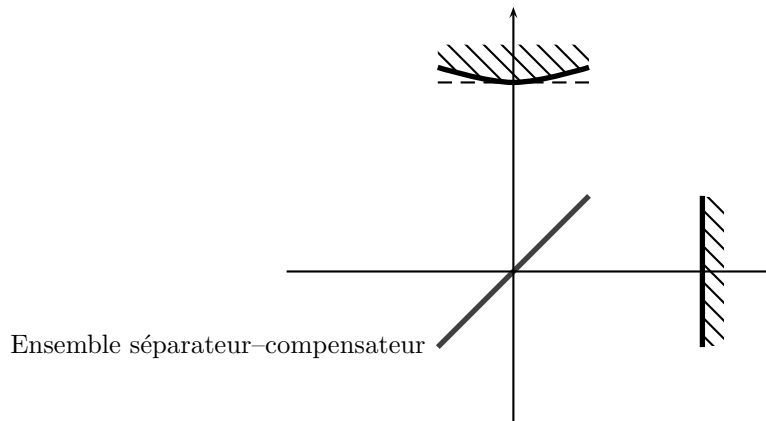


FIGURE 2 – Déformation du miroir d'un interféromètre

- On néglige d'abord toute déformation du miroir.
 

Quel est, au contact optique, l'aspect de l'écran d'observation ? Le contact optique est réalisé lorsqu'une même distance  $y$  sépare les deux miroirs du système séparateur-compensateur.
- On prend maintenant en compte la déformation sphérique du miroir de l'interféromètre.
  - Déterminer la position des deux images de la source données par les deux miroirs. Quelle est la distance  $d_{im}$  entre ces images ?
  - Montrer que ces deux images sont déphasées et calculer leur déphasage. On précisera la convention de signe choisie.
  - Quel est l'aspect du champ d'interférence ?
  - La distance entre le centre de la figure et la troisième frange brillante est  $l = 5$  cm ; on donne  $d = 1$  m,  $\lambda = 500$  nm,  $f' = 50$  cm et  $y = 10$  cm. On fera l'hypothèse que le centre de la figure est un point sombre. Cette hypothèse sera vérifiée ensuite. Calculer  $R$  ; commenter.

Information : un miroir sphérique de sommet  $S$  et de centre  $C$  obéit, dans les conditions de GAUSS, à la relation de conjugaison :

$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

où  $A$  et  $A'$  sont les points conjugués objet et image,  $\overline{SC}$  est le rayon de courbure algébrique du miroir sphérique. Cette relation permet de trouver la position de la source secondaire due au miroir déformé.

**11. Analyse d'un interférogramme**

À l'aide d'un interféromètre de MICHELSON et un capteur d'intensité lumineuse, on a enregistré l'interférogramme de la figure 3. Pour y parvenir, on a déplacé à vitesse régulière le miroir chariotable de l'interféromètre. Le graphique montre l'intensité lumineuse recueillie sur le capteur en fonction de la différence de marche. La source lumineuse est supposée présenter deux raies assez fines d'intensités lumineuses différentes.

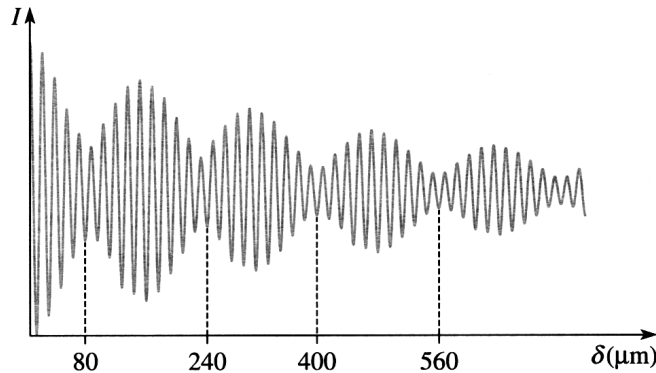


FIGURE 3 – Interférogramme enregistré sur un interféromètre de MICHELSON

- Déterminer les deux longueurs d'onde, le rapport des intensités, ainsi qu'une estimation de la largeur des raies et de la longueur de cohérence.

Données :

$$A \cos [(\alpha + \Delta\alpha)x] + B \cos [(\alpha - \Delta\alpha)x] = a(x) \cos [\alpha x + \varphi(x)]$$

avec

$$a^2(x) = A^2 + B^2 + 2AB \cos(2\Delta\alpha x) \quad \text{et} \quad \tan \varphi = \tan(\Delta\alpha x) \frac{A - B}{A + B}$$

**C. Le problème de la localisation des franges**

**12. Utilisation d'une source à distance finie**

On utilise un interféromètre monté en lame d'air d'épaisseur  $\ell$ . Cet interféromètre est éclairé par une source monochromatique émettant à la longueur d'onde  $\lambda_0$ . Cette source est ponctuelle, elle est placée en un point de l'axe  $Ox$  ( $x_S < 0$ ). On considère un point  $M$  du champ d'interférences situé à des coordonnées  $(x_M, y_M)$  par rapport à l'origine  $O$  prise au centre du dispositif sur la lame semi-réfléchissante. Voir le schéma de la figure 4.

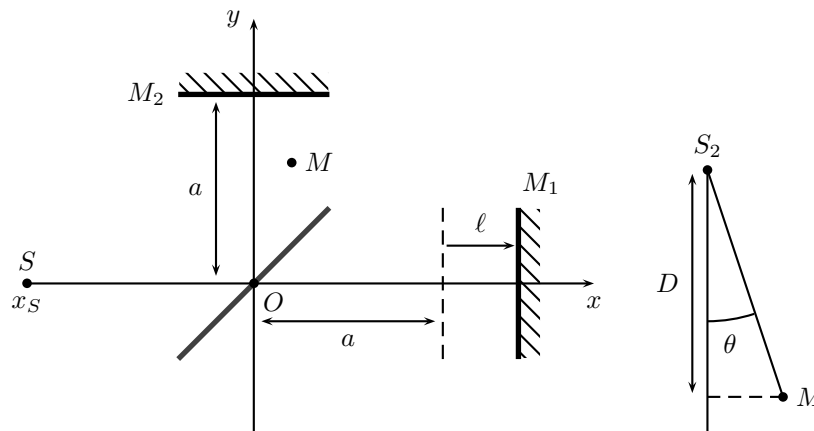


FIGURE 4 – Source à distance finie

- Comment réalise-t-on en pratique une source monochromatique et ponctuelle, située à une distance finie de l'interféromètre ?

2. Déterminer les coordonnées des deux sources secondaires  $S_1$  et  $S_2$  créées par l'interféromètre.  $S_2$  est l'image de  $S$  par la lame semi-réfléchissante et le miroir  $M_2$ . En déduire la distance qui sépare  $S_1$  et  $S_2$ . Exprimer alors la distance  $D$  en fonction de  $x_S$ .

Dans toute la suite, on travaillera avec comme repérage du point  $M$  où l'on étudie les interférences, la distance  $D$  et l'angle  $\theta$  qu'on supposera suffisamment grande pour autoriser les développements limités classiques  $\sin \theta \simeq \tan \theta \simeq \theta$  et  $\cos \theta \simeq 1 - \theta^2/2$ .

3. Montrer que la différence de marche des ondes qui interfèrent en  $M$  est donnée par :

$$\delta = 2\ell \left(1 + \frac{\ell}{D}\right) \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)$$

4. En déduire que la figure d'interférences en  $M$  observées avec une lentille convergente et un écran est formée d'anneaux concentriques. Comment doit-on disposer la lentille et l'écran ? On note  $\gamma$  le grandissement transversal apporté par la lentille convergente.
5. On suppose que le centre des anneaux correspond à un maximum d'intensité lumineuse. Déterminer, en fonction de  $\gamma$ ,  $\lambda_0$ ,  $\ell$ ,  $D$  et  $n$  le rayon  $R_n$  du  $n^{\text{ème}}$  anneau lumineux compté à partir du centre.
6. La figure d'interférences est-elle localisée ? Décrire son évolution si on déplace la source  $S$  perpendiculairement à l'axe  $Ox$ .

Le faisceau incident est maintenant issu d'une source étendue incohérente, monochromatique de longueur d'onde  $\lambda_0$ , et située dans un plan perpendiculaire à l'axe  $Ox$  placé à une distance finie. Cette source est circulaire de rayon  $R$  et de centre  $S$ .

7. Décrire comment se trouve modifiée la figure d'interférences.
8. On suppose que le nombre  $N_v$  d'anneaux visibles est grand. Évaluer l'ordre de grandeur de  $N_v$  en fonction des paramètres  $\lambda_0$ ,  $D$ ,  $\ell$  et  $R$ .
9. Comment rendre maximal le nombre d'anneaux théoriquement visibles ? Montrer que dans ces conditions la figure d'interférences est localisée, et indiquer comment on dispose alors la lentille convergente et l'écran. Dans ce dernier cas, calculer le rayon  $R'_n$  du  $n^{\text{ème}}$  anneau lumineux compté à partir du centre supposé correspondre comme précédemment à une interférence constructive.