

Exercices : 09 - Interféromètre de Michelson

— Solutions —

A. Formes de la figure d'interférences

1. Anneaux de Haidinger

Réponses : $r = f\sqrt{\frac{n\lambda}{e}}$, $r_1 = 7,39$ mm, $r_2 = 10,45$ mm, $r_3 = 12,80$ mm, $r_4 = 14,78$ mm, $p_0 = \frac{2e}{\lambda}$, teinte verte uniforme, $\delta = 2\frac{R\theta^2}{2}$, $r = f\sqrt{\frac{n\lambda}{R}}$, $r_1 = 0,23$ mm, $r_2 = 0,33$ mm, $r_3 = 0,40$ mm, $r_4 = 0,46$ mm, on peut percevoir de très petits défauts de la surface.

2. Étude d'un coin d'air

Réponses : $E(x) = \frac{E_{max}}{2} (1 + \cos[\frac{2\pi\alpha x(\lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}]) \cos[\frac{2\pi\alpha x(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}]$; 8,1 mm.

3. Doublet du sodium - Influence sur le contraste

Réponses : $\delta = 2x = 2Vt$, $E(t) = \frac{E_{max}}{2} [1 + \cos\frac{2\pi\Delta\lambda Vt}{\lambda^2} \cos\frac{2\pi 2Vt}{\lambda}]$; contraste de période $T_c = \frac{\lambda^2}{V\Delta\lambda}$, interférences de période $T_i = \frac{\lambda}{2V}$, $\frac{T_c}{T_i} = 2\frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, sur une demi-période $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 982$ annulations; $f_i = \frac{2V}{\lambda} = 9,4$ Hz; détecteur de crêtes.

4. Critère qualitatif de brouillage

Réponses : $\delta = 2z$, l'ordre d'interférences est $p = \frac{2z}{\lambda_0}$. L'éclairement est donné par la formule de FRESNEL $E = \frac{E_{max}}{2} (1 + \cos\frac{4\pi z}{\lambda_0})$. L'amplitude est $A_{tot} = A_0(1 + (1 + \varepsilon) \exp i\frac{4\pi z}{\lambda_0})$ d'où un éclairement $E = E_0(1 + V(\varepsilon) \cos\frac{4\pi z}{\lambda_0})$ avec le contraste ou la visibilité $V(\varepsilon) = \frac{1 + \varepsilon}{1 + \varepsilon + \varepsilon^2/2}$. On retrouve $C = 1$ pour $\varepsilon = 0$ ce qui logique puisque la source redevient monochromatique. Le critère de brouillage qualitatif et $\Delta p \geq \frac{1}{2}$. On a $p_1 = \frac{2z_b}{\lambda} (\nu_0 - \frac{\Delta\nu}{2})$ et $p_2 = \frac{2z_b}{\lambda} (\nu_0 + \frac{\Delta\nu}{2})$, on en déduit que $z_b = \frac{c}{4\Delta\nu}$. On trouve $z_b = 75$ μm , très vite de chaque côté du contact optique, les franges sont brouillées. La plage est donc de 150 μm , c'est faible mais aisément accessible avec la vis micrométrique de l'interféromètre de MICHELSON classique puisqu'elle permet de maîtriser un déplacement de 5 μm . Pour le laser, on a $z_b = 75$ m ! Il n'y a aucun problème, on verra toujours des franges puisque le battement total en déplacement du miroir chariotable de l'interféromètre est inférieur à 10 cm en général.

5. Repérage du contact optique par spectre cannelé

Réponses : Si on utilise le réglage en coin d'air, on observe des franges rectilignes parallèles qui sont toutes identiques avec une lumière monochromatique : ce réglage n'est donc pas approprié. Par contre, on peut travailler avec le réglage en lame d'air à faces parallèles. Dans ce cas, on observe des anneaux à l'infini et la différence de marche est $\delta = 2e \cos \theta$ (où θ est le rayon angulaire des anneaux et e l'épaisseur de la lame d'air). Le rayon des anneaux tend vers l'infini au passage par le contact optique $e = 0$. On peut donc ainsi théoriquement repérer cette position. Estimons la précision du repérage du contact optique. On passe d'une frange claire à une frange sombre en faisant varier la différence de marche de $\lambda/2$; on peut donc raisonnablement considérer que, à l'œil, le champ d'observation semble uniformément éclairé si $\delta_{max} - \delta_{min} < 0,2\lambda$ (choix). La demi-ouverture angulaire $\Delta i/2$ du faisceau est au plus de l'ordre de 15°. Celui-ci semble à l'œil uniformément éclairé tant que $2e - 2e \cos\frac{\Delta i}{2} < 0,2\lambda$ soit, par développement du cosinus à l'ordre 2 compris $\frac{e\Delta i^2}{4} < 0,2\lambda$ soit $e < \frac{0,8\lambda}{\Delta i^2} \simeq 1,5$ nm pour $\lambda \simeq 0,5$ nm. Avec un champ de 10° de rayon angulaire, on obtiendrait $e < 3$ nm. On peut retenir une précision de l'ordre de quelques micromètres. En pratique, on gagne en précision en travaillant (ensuite) en lumière blanche. Pour une telle source, la longueur de cohérence est très faible et on obtient une frange centrale, entre des teintes de NEWTON, au niveau du contact optique : on peut alors repérer celui-ci à mieux que 0,1 nm (un retour en coin d'air affine ce dernier réglage). Dans cet exercice, on voit une autre méthode permettant de repérer le contact optique. Pour une valeur donnée de e , donc de la différence de marche $\delta = 2e$, les radiations éteintes (donnant les cannelures) sont telles que $2e = (p + \frac{1}{2})\lambda$ soit $p = \frac{2e}{\lambda} - \frac{1}{2}$ entier. Le spectre visible a des valeurs de λ comprises entre 0,4 nm (bleu) et 0,8 nm (rouge). Les valeurs de p des radiations éteintes sont les entiers p tels que $\frac{2e}{0,8} - \frac{1}{2} < p < \frac{2e}{0,4} - \frac{1}{2}$ avec e en μm . Leur nombre est $n = E \left[\frac{2e}{0,4} - \frac{2e}{0,8} \right]$. On peut donc distinguer des couleurs d'interférences si $n < 3$ (critère choisi par l'énoncé), soit si $e < 1,5$ nm. En conclusion, si $e < 1,5$ nm environ, on observe des couleurs d'interférence (les teintes de Newton) et si $e > 1,5$ nm environ, on observe une lumière d'aspect blanc (blanc d'ordre supérieur). La précision du réglage en lumière monochromatique est donc juste suffisante pour déceler les interférences en lumière blanche qui permettent de repérer plus finement le contact optique. Une étape intermédiaire peut être fort utile pour éviter de trop tâtonner lors du passage de la lumière monochromatique à une source de lumière blanche. Le prisme étale le spectre : à chaque longueur d'onde correspond une image de la fente d'entrée qui occupe une position déterminée de l'écran ; l'emplacement correspondant aux longueurs d'onde éteintes n'est pas éclairé. On observe un spectre cannelé : le spectre usuel

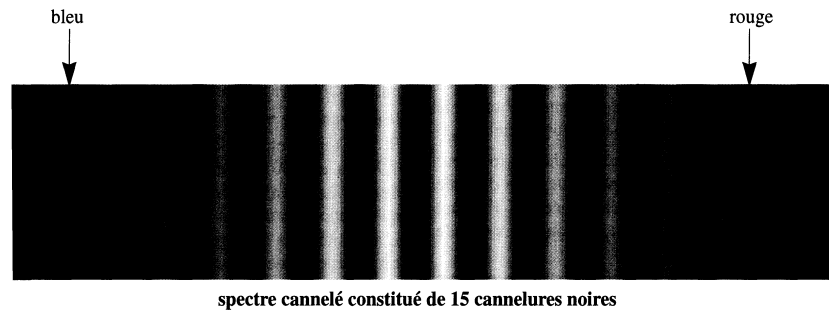


FIGURE 1 – Spectre cannelé inversé (traces blanches pour les cannelures sombres)

de la lumière blanche (arc-en-ciel) est strié de cannelures noires. La figure 1 montre l’allure de ce spectre (avec 15 cannelures) :

D’après la question précédente, le nombre de cannelures est généralement $n = E \left[\frac{2e}{0,4} - \frac{2e}{0,8} \right]$ avec e en μm). En choisissant convenablement les indices et les pouvoirs dispersifs des trois prismes, on peut faire en sorte que la déviation moyenne (pour le jaune) soit nulle. Le spectre reste dans l’axe du faisceau incident. Pour un prisme simple, il aurait fallu rechercher le spectre en regardant vers la base du prisme (la projection sur un écran est moins pratique). Si $n = 15$, alors on estime $e \simeq 6 \text{ nm}$. Si le nombre de cannelures diminue, c’est que e diminue. L’ordre d’interférence p d’une cannelure noire est connu via la formule $2e = (p + \frac{1}{2}) \lambda$. Si $\delta = 2e$ diminue, à p constant, la longueur d’onde λ de la cannelure noire est plus faible : on a donc un déplacement des cannelures éteintes vers le bleu (figure 2).

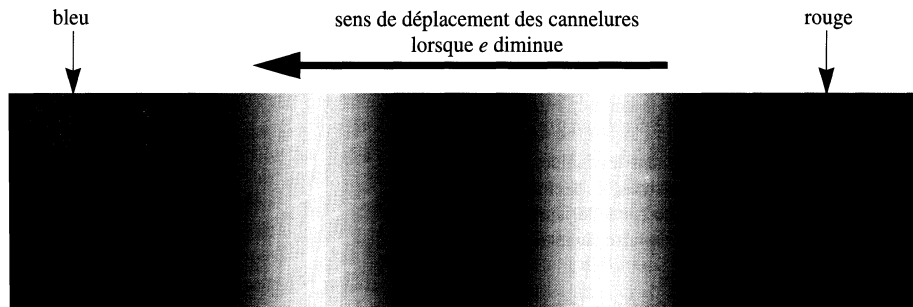


FIGURE 2 – Spectre cannelé inversé (traces blanches pour les cannelures sombres) près du contact optique

De plus, en diminuant e , on diminue n : les cannelures sont de plus en plus espacées sur le spectre (aussi, lorsque le nombre de cannelures diminue, la largeur de celles-ci augmente. Quand il ne reste plus que 2 cannelures, alors e est de l’ordre du micromètre. Les couleurs d’interférences (teintes de NEWTON) sont tout à fait visibles en lumière blanche. On peut enlever le prisme et translater très doucement le miroir \mathcal{M}_1 jusqu’à obtenir la couleur de la teinte plate (au contact optique). Celle-ci est blanche si les déphasages sur les deux voies sont symétriques, et noire si l’une des voies subit un déphasage supplémentaire de $\pi/2$; la couleur de la teinte plate dépend du traitement de la séparatrice, imposé par le constructeur de l’interféromètre.

B. Applications

6. Mesure de l’épaisseur d’une mince lame de verre

Réponses : $\varphi_0 = 8000\pi$, $p_{2s} = 3998,5$; $\Delta p = 15$; un point « alternant » lumineux.

7. Mesure de la largeur d’une raie

Réponses : $I = I_0(1 + \cos 2\pi\nu_0\tau)$; $I = I_0(1 + \text{sinc } \pi\Delta\nu_{1/2}\tau \cos 2\pi\nu_0\tau)$; $V(\tau) = |\text{sinc } \pi\Delta\nu_{1/2}\tau|$; $\Delta\nu_{1/2} = \frac{c}{2x} = 10^9 \text{ Hz}$, $\Delta\lambda_{1/2} = \frac{c\Delta\nu_{1/2}}{\nu_0^2} = 1,4 \text{ pm}$.

8. Spectrométrie par transformée de Fourier

Réponses : σ_0 nombre d'onde central, $\Delta\sigma = 2a\sqrt{\ln 2}$, a largeur spectrale en nombre d'onde, $E(e) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\sigma)d\sigma + \frac{1}{2}[\hat{f}(2e) + \hat{f}(-2e)]$, $E(e) = \frac{E_{max}}{2}(1 + \exp -4\pi^2 a^2 e^2 \cos 2\pi 2e\sigma_0)$, tracé voir la figure 3, la visibilité diminue vite avec e , $\Delta\sigma$ mesurable sur l'enveloppe de $E(e)$ pour par exemple $E(e) = \frac{3E_{max}}{4}$, e de l'ordre de $\frac{1}{a}$.

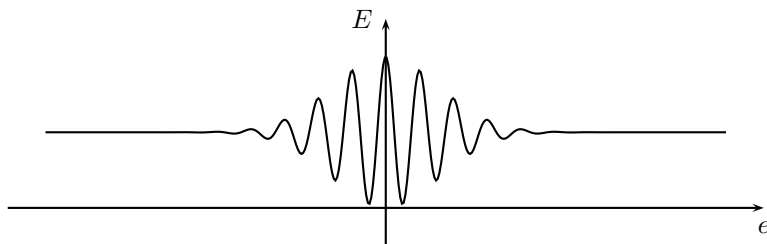


FIGURE 3 – Figure d'interférences à profil spectral en cloche de POISSON

9. Spectrométrie interférentielle

Réponses : $\Delta = 2\ell$ puisque le détecteur est au centre ($i = 0$) du système d'anneaux ; $F(\omega) = 2I_0\Delta_{max}[\text{sinc} \frac{\omega\Delta_{max}}{c} + \frac{1}{2} \text{sinc} \frac{(\omega+\omega_0)\Delta_{max}}{c} + \frac{1}{2} \text{sinc} \frac{(\omega-\omega_0)\Delta_{max}}{c}]$, l'allure de la courbe est représentée sur la figure 4 ; il y a superposition des intensités lumineuses pour ω_1 et ω_2 donc $F_1(\omega) + F_2(\omega) = F(\omega)$, l'allure de la courbe est représentée sur la figure 5 ; on utilise le critère de RAYLEIGH la demi-largeur de chaque pic associé à ω_1 et ω_2 est $\Delta\omega_R = \frac{\pi c}{\Delta_{max}}$, il faut que $\omega_2 - \omega_1 \geq \Delta\omega_R$, on a $\mathcal{R} = \frac{\omega_0\Delta_{max}}{\pi c}$; on a $\Delta_{max} = N_{max}\lambda_0 = N_{max}\frac{2\pi c}{\omega_0}$ d'où $N_{max} = \frac{\mathcal{R}}{2}$; pour pouvoir détecter le profil de la raie avec précision, il faut que $\Delta\omega_R \ll \Delta\omega$.

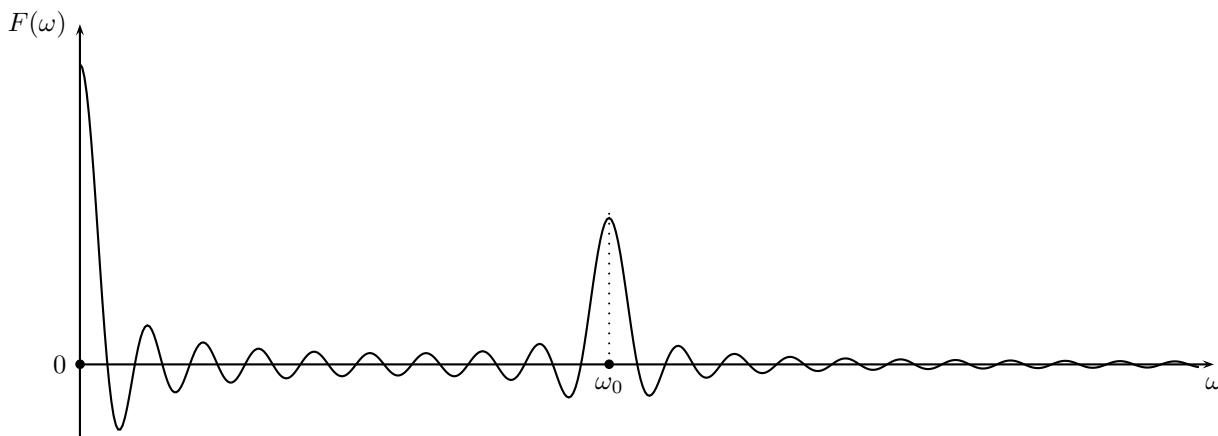


FIGURE 4 – Spectrométrie interférentielle - Principe

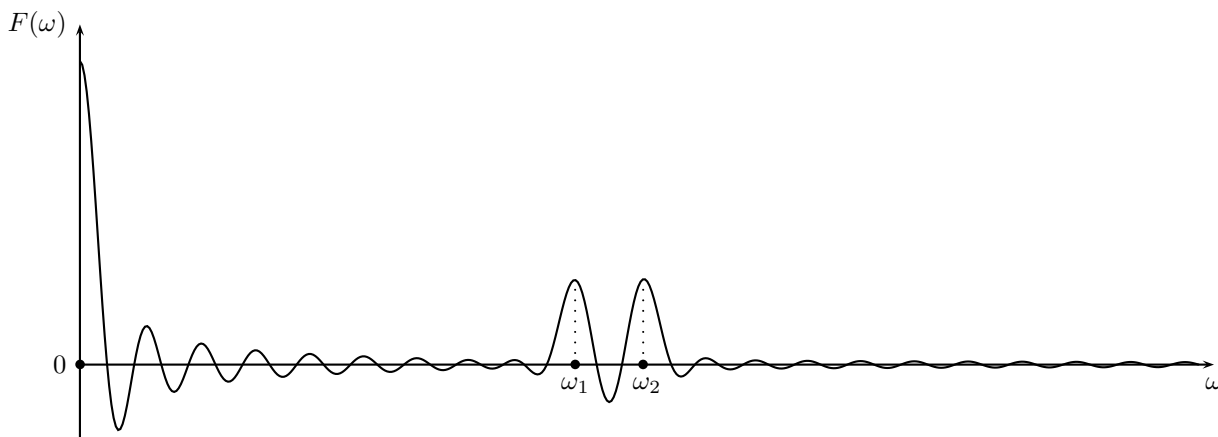


FIGURE 5 – Spectrométrie interférentielle - Séparation de deux raies

10. Mesure de déformation

Réponses : $\delta = 2e \cos i = 0$ et cela $\forall i$ lorsque $e = 0$, écran entièrement lumineux ; $d_{im} = \frac{2(d+y)^2}{R}$; $\delta = \frac{4(d+y)^2}{R} (1 - \frac{i^2}{2})$, $i = \frac{l}{f}$, $\frac{2(d+y)^2 l^2}{R f^2} = 2,5\lambda$, $R = 19360$ m, des défauts infimes peuvent être détectés.

11. Analyse d'un interférogramme

Réponses : on observe trois structures convoluées. L'évolution la plus rapide correspond, en faisant abstraction des autres évolutions, à une sinusoïde de période donnant la longueur d'onde moyenne $\lambda_0 = \frac{1}{\sigma_0} = 0,58 \mu\text{m}$. L'évolution intermédiaire correspond, en faisant abstraction de l'évolution la plus lente, à un phénomène de battements caractéristique d'un doublet ($\sigma_1 = \sigma_0 - \Delta\sigma/2$ avec I_1 et $\sigma_2 = \sigma_0 + \Delta\sigma/2$ avec I_2). Comme le contraste ne s'annule jamais, les deux intensités I_1 et I_2 de chaque raie du doublet ne sont pas égales. Si les deux radiations sont monochromatiques (donc sans la structure d'évolution la plus lente), les interférences obtenues par chacune d'entre elles sont incohérentes entre elles et on peut sommer les interférogrammes propres : $I(\delta) = K I_1 [1 + \cos(2\pi\sigma_1\delta)] + K I_2 [1 + \cos(2\pi\sigma_2\delta)]$. Avec les formules de l'énoncé, il vient $I(\delta) = K (I_1 + I_2 + a(\delta) \cos[2\pi\sigma_0\delta + \varphi(\delta)])$ avec $a^2(\delta) = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(2\pi\Delta\sigma\delta)$. L'enveloppe supérieure des battements a pour équation (toujours sans tenir compte de la lente décroissance expérimentale) $I_{\text{env.batt.+}} = K(I_1 + I_2 + \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(2\pi\Delta\sigma\delta)})$ et l'inférieure a pour équation $I_{\text{env.batt.-}} = K(I_1 + I_2 - \sqrt{I_1^2 + I_2^2 + 2I_1 I_2 \cos(2\pi\Delta\sigma\delta)})$. La valeur minimale de l'écart entre ces enveloppes est $2K |I_1 - I_2|$ et la maximale est $2K (I_1 + I_2)$. On peut mesurer grosso modo sur l'énoncé le rapport de ces valeurs (en essayant d'imaginer l'absence de la décroissance lente de l'amplitude des battements analysée ensuite) : $\frac{I_1 + I_2}{|I_1 - I_2|} \simeq 3$. Alors, $I_2 \simeq 2I_1$ ou $I_1 \simeq 2I_2$. On ne peut pas trancher entre ces deux résultats sans analyse informatique précise du tracé expérimental (l'expression de $\tan \varphi$ ne nous avance à rien avec le graphique donné par le sujet dont les oscillations rapides ne sont pas les réelles). La période des battements est l'inverse de $|\sigma_1 - \sigma_2| \simeq \frac{1}{160} \mu\text{m}$. On en déduit l'écart spectral entre les raies du doublet : $|\lambda_1 - \lambda_2| = \frac{|\sigma_1 - \sigma_2|}{\sigma_0^2} \simeq 2,1 \text{ nm}$ (on obtient cette formule en différentiant $\lambda = 1/\sigma$). L'évolution la plus lente correspond à une décroissance de la visibilité (en pratique proche d'une gaussienne ou d'une lorentzienne suivant les sources) due à la largeur spectrale non nulle de chaque raie du doublet. La longueur caractéristique de cohérence évaluée est $l_c \simeq 500 \mu\text{m}$. On en déduit un ordre de grandeur de la largeur spectrale de chaque pic : $\Delta\sigma = \frac{1}{l_c} \simeq 2.10^{-3} \mu\text{m}^{-1}$ donc $\Delta\lambda \simeq \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0^2} \simeq 0,7 \text{ nm}$. En pratique, l'analyse des interférogrammes est faite par ordinateur.

C. Le problème de la localisation des franges

12. Utilisation d'une source à distance finie

Réponses : On utilise un filtre interférentiel, un dépoli et un diaphragme de taille très petite devant la source ; $S_2 (0, 2a - x_S)$ et $S_1 (0, 2\ell + 2a - x_S)$, on a $S_1 S_2 = 2\ell$ et $D = 2a - x_S - y_M$; $S_2 M = \frac{D}{\cos \theta}$, $S_1 M = \sqrt{(2\ell + D)^2 + D^2 \tan^2 \theta} = \sqrt{4\ell^2 + 4\ell D + \frac{D^2}{\cos^2 \theta}}$ d'où $\delta = \frac{D}{\cos \theta} (1 + \frac{2\ell}{D} \cos^2 \theta + \frac{2\ell^2}{D^2} \cos^2 \theta - 1)$, on trouve $\delta = 2\ell(1 + \frac{\ell}{D})(1 - \frac{\theta^2}{2})$; les franges brillantes sont données par $\delta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$, une frange correspond à p fixé donc à θ fixé, par invariance par rotation autour de l'axe optique de la lentille, on obtient des anneaux, le point M et l'écran doivent vérifier la relation de conjugaison de la lentille ; $R_n = |\gamma| D \sqrt{\frac{n\lambda_0 D}{\ell(\ell + D)}}$; la figure n'est pas localisée car on a deux sources ponctuelles cohérentes S_1 et S_2 , les interférences sont visibles dans tout l'espace, si on déplace la source S selon l'axe Oy de Δy_S , on obtient une translation de la figure observée sur l'écran de $|\gamma| \Delta y$ sur un axe parallèle à Ox ; on superpose toutes les translations évoquées précédemment pour Δy allant de 0 à R , la figure d'interférences va se brouiller selon toute vraisemblance et d'autant plus rapidement sur la périphérie de la zone projetée sur l'écran ; il y a brouillage au niveau de l'anneau $n = N_v$ si le bord de la source décalée de R vient placer une frange brillante au milieu de la frange de rang N_v et de celle de rang $N_v + 1$, cela veut dire alors que $|\gamma|R = \frac{R_{N_v+1} - R_{N_v}}{2}$, on en déduit $\sqrt{N_v + 1} - \sqrt{N_v} = \frac{2R}{D} \sqrt{\frac{\ell(\ell + D)}{\lambda_0 D}}$ avec $\sqrt{N_v + 1} - \sqrt{N_v} = \sqrt{N_v} (\sqrt{1 + \frac{1}{N_v}} - 1) \simeq \frac{1}{2\sqrt{N_v}}$, on trouve $N_v \simeq \frac{D^2}{16R^2} \frac{\lambda_0 D}{\ell(\ell + D)} \simeq \frac{D^2 \lambda_0}{16R^2 \ell}$; il faut D grand et donc observer à l'infini où seront localisées les franges d'interférences en plaçant l'écran dans le plan focal image de la lentille convergente.