Exercices : 10 - Réseaux

A. Maximums Principaux

1. Réalisation d'un réseau

Soient deux ondes planes monochromatiques (k est la norme du vecteur d'onde), de même amplitude, ayant des directions de propagation faisant un angle α entre elles. Ces deux ondes interfèrent.

1. Exprimer l'intensité résultant de l'interférence sur un axe Oy d'orientation $\vec{k}_2 - \vec{k}_1$.
2. En déduire l'expression de l'interfrange.

   On veut réaliser un réseau holographique par photographie de la figure d'interférences des deux ondes planes inclinées provenant d'un laser Hélium-Néon ($\lambda = 632,8\,\text{nm}$). Le pas du réseau doit être de 1000 traits par mm.
3. Quel angle α doivent faire entre elles les directions de propagation des deux ondes ?

2. Ordres présents pour un réseau par transmission

On considère une réseau par transmission comportant $n = 800$ traits (ou fentes) par mm. Il est éclairé sous une incidence normale par une source lumineuse située dans le plan focal objet d'une lentille convergente. Cette source émet deux radiations de longueurs d'onde $\lambda_1 = 500\,\text{nm}$ et $\lambda_2 = 600\,\text{nm}$.

1. Déterminer le nombre d'ordres visibles pour chacune des deux longueurs d'onde. Calculer numériquement les angles correspondants, on notera θ_p l'angle correspondant à l'ordre p. Rassembler les valeurs dans un tableau.
2. Pour un ordre donné, calculer l'écart entre les angles correspondant aux deux longueurs d'onde $\Delta\theta_p = |\theta_{p1} - \theta_{p2}|$.

   On éclaire maintenant le réseau sous une incidence $i_0 = 30°$.
3. Comment sont modifiés les résultats précédents ? On construira un nouveau tableau.

   La seconde radiation possède maintenant une longueur d'onde $\lambda_2 = 505\,\text{nm}$. Dans quelle situation les maxima principaux correspondants (pour un ordre p donné) seront-ils séparés par l'angle $\Delta\theta_p$ le plus grand ? Conclure quant aux conditions d'utilisation d'un réseau dont la fonction première est la séparation des longueurs d'onde de la source qui l'éclaire.

3. Ordre manquant

Un réseau de diffraction plan par transmission est éclairé sous incidence normale par un faisceau situé dans le plan xOz de lumière monochromatique à la longueur d'onde λ. Le réseau est constitué de N fentes très longues selon Oy, de largeur ℓ parallèlement à Ox, régulièrement disposées le long de cet axe avec une périodicité a. On observe la lumière diffractée à l'infini dans une direction i du même plan xOz. La diffraction est responsable dde la présence d'une fonction de diffraction $\mathcal{D}(i)$ dans l'éclairement obtenu avec le réseau. La fonction $\mathcal{I}(i)$ est la fonction d'interférence à N ondes. On a :

$$\mathcal{E}(i) = \mathcal{E}_0\,\mathcal{D}(i) \times \mathcal{I}(i) \qquad \text{avec} \qquad \mathcal{D}(i) = \mathrm{sinc}^2 \frac{\pi\ell\sin i}{\lambda}$$

1. Quelle est l'influence de $\mathcal{D}(i)$ sur l'énergie lumineuse diffractée par le réseau ?
2. On suppose, dans cette question, que les fentes sont infiniment fines ($\ell \to 0$). Déterminer l'expression $\mathcal{I}(i)$ de l'intensité résultant des interférences entre les N fentes. Cette expression est appelée fonction d'interférences.
3. L'observation du spectre montre que le $5^{\text{ème}}$ ordre est absent. Que peut-on en déduire sur ℓ ?

4. Réseau sous incidence normale

On éclaire la fente du collimateur d'un spectroscope à réseau avec une lampe à vapeur de Cadmium. Le faisceau de rayons parallèles émergeant du collimateur tombe sous incidence normale sur un réseau par transmission. Une lunette réglée à l'infini permet d'observer les spectres à droite et à gauche de l'axe du collimateur. L'écart angulaire entre la raie verte ($\lambda = 508,6\,\text{nm}$) d'ordre un et l'axe du collimateur est de $16\,^\circ 15'$.

1. On mesure, dans l'ordre deux, un écart angulaire entre la raie rouge et l'axe du collimateur de $57\,^\circ 5'$ et entre la raie bleue et l'axe du collimateur un écart de $31\,^\circ 52'$. Déterminer les longueurs d'onde de ces deux raies.
2. Le goniomètre permet de mesurer les angles à $1'$ près. Quelle est, en fait, la principale cause d'incertitude ? Comment s'affranchit-on en pratique de cette incertitude pour faire des mesures précises de longueur d'onde ?

5. Spectre de la lampe à vapeur d'hydrogène

On considère un réseau plan par transmission possédant $n = 500$ traits par mm. Il reçoit, sous une incidence i, une lumière parallèle. On appelle θ_k l'angle correspondant au maximum principal d'ordre k pour la longueur d'onde λ. Tous les angles sont évalués algébriquement par rapport à la normale Ox en référence au sens positif indiqué sur le schéma (ce sens correspond au sens trigonométrique), voir la figure 1.

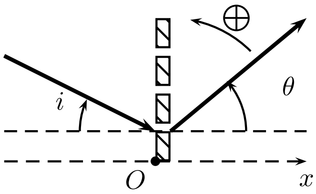

FIGURE 1 – Réseau par transmission

1. Quels sont les phénomènes mis en jeu dans le spectroscope à réseau ?
2. Donner la relation littérale liant θ_k, i, k et les données en justifiant par le raisonnement le plus simple.
3. On appelle déviation l'angle D_k entre le rayon émergent et le rayon incident. Exprimer D_k.
4. On analyse une lumière monochromatique de longueur d'onde λ_0. Montrer que, pour un ordre k donné, la déviation passe par un minimum D_{km} pour un réglage précis de l'incidence.
5. On mesure $D_{1m} = 17°30'$ à $1'$ près. Déterminer l'angle d'incidence, faire un schéma résumant la marche des rayons et déterminer λ_0 et son encadrement.

   On utilise maintenant une lampe à hydrogène émettant les raies suivantes :

raie	H_α	H_β	H_γ	H_δ
λ(nm)	656,3	486,1	434,0	410,2

   On règle l'incidence à la valeur i_0 de telle sorte que $\theta_1 = 0$ dans l'ordre 1 pour la radiation H_α.
6. Calculer i_0. Combien d'ordres complets peut-on observer théoriquement ?
7. On place derrière le réseau une lentille mince convergente L de distance focale $f' = 40\,\text{cm}$ et une plaque photographique P portant une graduation centimétrique. La raie H_α tombe sur la graduation 0. Comment doit-on placer P pour avoir le maximum de netteté ? Donner les coordonnées des autres raies du spectre d'ordre 1.

6. Réseau par réflexion

On considère un réseau d'amplitude par réflexion comportant $n = 500$ lignes par mm. L'angle d'incidence i et l'angle de réflexion θ sont supposés très voisins comme cela est représenté sur la figure 2. Attention à ne pas oublier que le problème ici est envisagé du point de vue de l'optique ondulatoire et non pas de l'optique géométrique pour lequel un tel schéma serait aberrant.

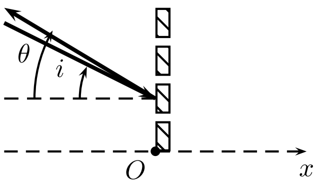

FIGURE 2 – Réseau par réflexion

1. Établir l'expression de la différence de marche entre deux rayons consécutifs.
2. Déterminer approximativement les valeurs de $\theta \simeq i$ correspondant aux cinq premiers ordres possibles, pour la raie de longueur d'onde $\lambda = 577\,\text{nm}$.
3. Le spectre est observé dans le plan focal d'une lentille de distance focale $f = 1\,\text{m}$. Trouver la distance Δx qui sépare, dans le premier ordre, les deux images de la fente d'entrée relatives aux raies jaunes du doublet du mercure, de longueurs d'ondes 577 nm et 579 nm.

7. Position des raies dans la figure de diffraction

Un réseau par réflexion comporte 400 traits par mm. Il est éclairé sous une incidence $i = 30^\circ$ à la longueur d'onde $\lambda = 589\,\text{nm}$.

1. Représenter sur un schéma un rayon lumineux incident et le rayon lumineux émergent.
2. Déterminer les positions des maxima principaux.
3. Quelle doit être la largeur du réseau pour séparer le doublet du sodium ($\Delta\lambda = 0,6\,\text{nm}$) dans le second ordre ? Quel est alors l'angle formé par les deux rayons diffractés correspondants ?

8. Source à distance finie

On étudie un réseau par transmission comportant $N = 10^4$ fentes diffractant la lumière. Le pas du réseau est $a = 2\,\mu\text{m}$, la longueur d'onde utilisée est $\lambda = 520\,\text{nm}$. On éclaire le réseau sous incidence normale dans un premier temps.

1. Déterminer la largeur ℓ du réseau.
2. Déterminer les ordres observables et l'angle leur correspondant.
3. On place maintenant une source ponctuelle à distance finie $D \gg \ell$ devant le réseau. On cherche à savoir pour quelle(s) valeur(s) de D, les ordres précédents sont inchangés. Donner l'expression de D en supposant que la source ponctuelle est placée juste en face d'une fente du réseau.
4. Déterminer numériquement D et conclure.

B. Applications du réseau

9. Mesure de la vitesse du son dans l'eau

Une onde plane de longueur d'onde $\lambda = 550\,\text{nm}$ dans le vide traverse une cuve K remplie d'eau et siège d'une onde ultrasonore stationnaire de fréquence $\nu = 4,7\,\text{MHz}$. Le dispositif est représenté sur la figure 3. La lame piézoélectrique émet une onde ultrasonore vers le haut, lorsqu'elle arrive à la surface de séparation entre l'eau et l'air une partie de l'onde est réfléchie. C'est de la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie que naît l'onde stationnaire. On observe dans le plan focal image d'une lentille L de distance focale $f = 35\,\text{cm}$.

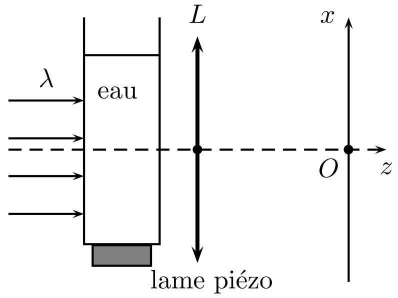

FIGURE 3 – Mesure de la vitesse du son

1. Rappeler ce qu'est une onde stationnaire. Quelle est sa périodicité spatiale a ?
2. Qu'observe-t-on dans le plan focal image de la lentille L ?
3. Sachant que la distance de deux maxima consécutifs est $\Delta x = 1,20\,\text{mm}$, montrer qu'on peut en déduire la célérité des ondes sonores dans l'eau. Faire et commenter l'application numérique.
4. On peut modéliser de manière quantitative l'effet de l'onde stationnaire par une variation sinusoïdale de la transmittance complexe de la cuve d'eau, sous la forme $\underline{t}(x) = t_0\left(1 + j\eta\cos\left(2\pi\dfrac{x}{a}\right)\right)$.
   En déduire le nombre maximal d'ordres observables sur l'écran, et leur intensité lumineuse relative.

10. Pouvoir de résolution d'un réseau

Un réseau de diffraction par réflexion est constitué de traits fins parallèles, réfléchissants, très fins, distants de a, perpendiculaires au plan de la figure 4. Il est utilisé dans les conditions de la figure 4. Éclairé en lumière parallèle par une source quasiment monochromatique S, placée au foyer principal objet d'une lentille sphérique mince convergente de distance focale f, on observe la lumière renvoyée à l'infini au moyen d'une seconde lentille sphérique mince convergente de même distance focale image $f = 50\,\text{cm}$. Les axes optiques des deux lentilles sont inclinés l'un par rapport à l'autre de $i = 30°$. Enfin, la fente source FS disposée devant la source est très fine, parallèle aux traits du réseau, qui sont eux-mêmes perpendiculaires au plan de figure. On appelle a le pas du réseau (distance entre deux traits consécutifs qui sont supposés infiniment fins). Le réseau est éclairé sur une largeur totale ℓ, réglable au moyen d'un diaphragme. On pose $\ell = (N-1)a$.

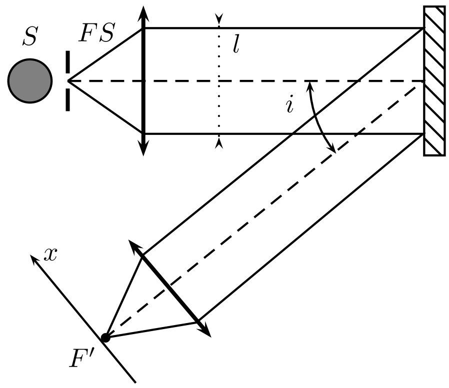

FIGURE 4 – Pouvoir de résolution

1. Déterminer l'éclairement E envoyé par le réseau en un point d'abscisse x du plan d'observation, dans le cas d'un éclairage monochromatique à la longueur d'onde $\lambda = 589\,\text{nm}$. On supposera que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss.
2. L'observation est faite dans l'ordre 2 du réseau. Décrire l'aspect de la figure avec $a = 2,4\,\mu\text{m}$. Combien d'ordres au maximum pourrait-on observer avec ce dispositif ?
3. Déterminer la demi-largeur à la base du pic d'éclairement correspondant à l'ordre k.
4. On considère que deux longueurs d'onde différentes (λ et $\lambda + \delta\lambda$) sont séparées si le maximum de l'une correspond au premier minimum de l'autre. Pour quelle valeur minimale de ℓ ce réseau peut-il séparer les deux raies ? Application numérique avec $\delta\lambda = \lambda/1000$.

11. Spectroscope à réseau

On utilise un goniomètre (cf. fig. 5) pour étudier un réseau de N traits par unité de longueur ($N = 800\,\text{mm}^{-1}$). Les faisceaux incident et émergent font les angles i et i_0 avec la normale au réseau. Le faisceau incident est parallèle, monochromatique de longueur d'onde λ.

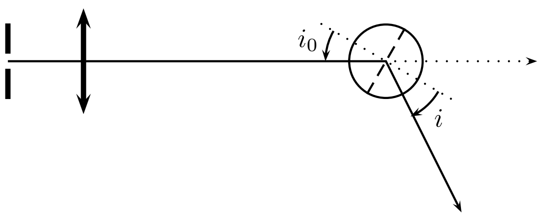

FIGURE 5 – Réseau plan et goniomètre

1. Quelle est la signification du nombre sans dimension g défini par $g = \dfrac{\sin i - \sin i_0}{\lambda N}$?
2. Quel est le nombre maximal d'ordres observables dans le domaine visible en incidence normale ?
3. Déterminer les angles i_0 et i, ainsi que la déviation D, dans le cas où celle-ci est minimale.
4. On donne $\lambda = 500\,\text{nm}$ et $g = 2$. Déterminer le plus petit écart en longueur d'onde $\Delta\lambda$ repérable par ce dispositif, si le réseau est éclairé sur une largeur totale égale à 1 cm.
5. Quels autres facteurs limitent la résolution de ce dispositif ? Proposer une évaluation quantitative.

12. Réseau de Michelson

Un réseau à échelette (réseau de Michelson) est formé de l'empilement de N lames de verre réfléchissantes, de même épaisseur e, décalées de a, conformément à la figure 6.
Un faisceau de lumière parallèle, monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 0,66\,\mu\text{m}$, éclaire le réseau sous l'incidence θ.

1. Analyse qualitative.
   (a) Dans le cas où $\theta = 0$, quelle est la direction du maximum d'intensité du fait de la réflexion ?
   (b) À quelle condition ce maximum correspond-il aussi à un maximum d'interférences ?
   (c) On suppose ici $e = 0,1\,\text{mm}$. Commenter les conditions ci-dessus.

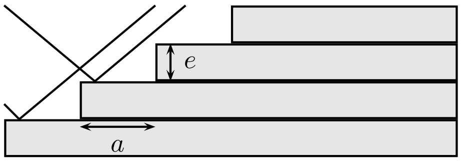

FIGURE 6 – Réseau de Michelson

2. Analyse quantitative.
   (a) Déterminer la répartition d'amplitude diffractée par un seul des traits du réseau ; on ne suppose plus nécessairement $\theta = 0$.
   (b) Même question pour l'ensemble des N traits du réseau.
   (c) À quelle condition le maximum de diffraction coïncide-t-il avec un maximum d'interférence ?
   (d) Définir et calculer le pouvoir de résolution de ce réseau, utilisé comme un monochromateur en $\theta = 0$ avec $N = 20$.

C. Interféromètre de Fabry et Perot

13. Éclairement transmis par l'interféromètre de Fabry et Perot

L'interféromètre est constitué d'une lame à faces parallèles d'un matériau transparent d'indice de réfraction n_0 occupant l'espace compris entre $x = 0$ et $x = L$. On envoie depuis $x = -\infty$ une onde lumineuse monochromatique plane de pulsation ω, se propageant dans la direction $\vec{e}_x$, d'amplitude A_0 et d'éclairement $I_0 = A_0^2$. L'onde incidente engendre une succession infinie d'ondes transmises et réfléchies aux interfaces lame-verre (figure 7).

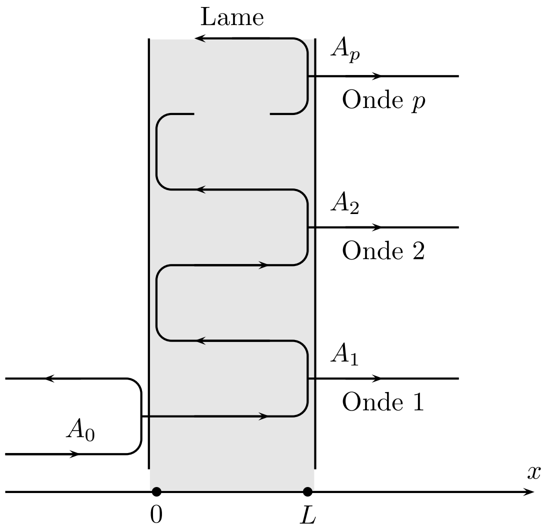

FIGURE 7 – Réflexions et transmissions successives d'une onde lumineuse. Les décalages transversaux sont fictifs et ont pour seul but de faciliter la lecture.

Lorsque une onde lumineuse de signal $\underline{s}_i(x,t)$ rencontre une interface lame–vide en $x = x_0$ ($x_0 = 0$ ou L), elle donne naissance à une onde réfléchie et une onde transmise de signaux respectifs $\underline{s}_r(x,t)$ et $\underline{s}_{tr}(x,t)$ vérifiant $\underline{s}_r(x_0,t) = \rho \underline{s}_i(x_0,t)$ et $\underline{s}_{tr}(x_0,t) = \tau \underline{s}_i(x_0,t)$. Les coefficients ρ et τ sont réels et vérifient $\rho^2 + \tau^2 = 1$; nous considérerons qu'ils sont les mêmes pour une onde venant de la lame ou pour une onde venant du vide.

1. Étude de l'éclairement transmis ; cas particuliers.
   On se place du côté $x > L$ et on repère les ondes émergeant successivement de la lame à l'aide d'un entier p variant de 1 à l'infini. L'onde p a une amplitude A_p (voir figure 7). Sa phase en un point d'abscisse x est notée $\varphi_p(x)$.
   (a) Exprimer A_1, A_2 puis A_p en fonction de A_0, ρ, τ et p.
   (b) Calculer le déphasage $\Phi = \varphi_{p+1}(x) - \varphi_p(x)$ en $x > L$ entre deux ondes successives $p+1$ et p issues de la lame, en fonction de $k = \omega/c$, L et n_0.
   (c) À quelle condition sur Φ l'éclairement de l'onde transmise est-il maximal ? Montrer alors que l'éclairement total transmis est $I_{tr,\max} = I_0$.

(d) On dit que les interférences entre les ondes p et $p+1$ sont destructives lorsque $\Phi \equiv \pi\,[2\pi]$ près. On admet que, dans ces conditions, l'éclairement transmis est minimal et vaut $I_{tr,\min}$. Déterminer $I_{tr,\min}$ en fonction de ρ et I_0.

(e) Exprimer la visibilité $V = \dfrac{I_{tr,\max} - I_{tr,\min}}{I_{tr,\max} + I_{tr,\min}}$ du phénomène en fonction de ρ. Quel intérêt y-a-t-il à travailler avec une valeur de ρ^2 aussi élevée que possible ?

2. Étude de l'éclairement transmis ; cas général.

(a) Montrer que le signal résultant en $x > L$ est $\underline{S}_{tr}(x,t) = TA_0 \exp\left[j\left(\omega t - \varphi_1(x)\right)\right] \sum_{p=0}^{\infty} R^p \exp\left(-j\Phi p\right)$ et exprimer R et T en fonction de ρ.

(b) Soit I_{tr} l'éclairement total transmis. Écrire le facteur de transmission $\Theta = \dfrac{I_{tr}}{I_0} = \Theta_0(\Phi)$, $\Theta_0(\Phi)$ étant une fonction de R et Φ que l'on déterminera. Retrouver les résultats des questions précédentes.

14. Signal optique dans l'interféromètre de Fabry et Perot

On utilise l'appareil décrit dans l'exercice précédent ; on suppose que les faces ont des réflectivités très élevées et on pose $\rho = -1 + \varepsilon$, avec $0 < \varepsilon \ll 1$.

Par la même méthode que celle utilisée dans l'exercice précédent, on peut calculer le signal optique dans la lame. On trouve $\underline{S}_{lam} = \underline{S}_{tr}(L,t) \times \dfrac{1}{\tau} \times \left[\exp\left(-jn_0k(x-L)\right) + \rho \exp\left(jn_0k(x-L)\right)\right]$ pour $0 < x < L$, où $\underline{S}_{tr}(x,t)$ est la grandeur introduite ci-dessus.

1. Interpréter physiquement les deux termes dépendant de x dans cette expression.
2. Montrer que, lorsque la réflectivité est élevée, l'éclairement $I_{lam}(x)$ dans la lame peut s'écrire de façon approchée $I_{lam}(x) \simeq 2\dfrac{I_0}{\varepsilon}\Theta \sin^2\left(n_0k(x-L)\right)$.
3. On suppose $n_0kL = p\pi$, avec p entier. Représenter $I_{lam}(x)$ en fonction de x pour $p = 1, 2, 3$. Commenter.