Exercices : 10 - Réseaux

— Solutions —

A. Maximums Principaux

1. Réalisation d'un réseau

Réponses : $I = \frac{I_0}{2}[1+\cos(\frac{2\pi}{\lambda}2\sin\frac{\alpha}{2}y)]$; $i = \frac{\lambda}{2\sin(\alpha/2)}$; $36,9\,^\circ$.

2. Ordres présents pour un réseau par transmission

Réponses : $\sin\theta = 0,4p$ $\theta = 0\,^\circ$ $\pm 24\,^\circ$ $\pm 53\,^\circ$, $\sin\theta = 0,48p$ $0\,^\circ$, $\pm 29\,^\circ$ $\pm 74\,^\circ$, $\Delta\theta_0 = 0\,^\circ$, $\Delta\theta = 5\,^\circ$, $\Delta\theta = 21\,^\circ$, $\sin\theta = 0,5{+}0,4p$ $-44,4\,^\circ$ $-17,5\,^\circ$ $5,7\,^\circ$ $30\,^\circ$ $64,2\,^\circ$ et $\sin\theta = 0,5{+}0,48p$ $-70\,^\circ$ $-27\,^\circ$ $1\,^\circ$ $30\,^\circ$ $79\,^\circ$, $\sin\theta = 0,5{+}0,404p$ $-45,4\,^\circ$ $-17,9\,^\circ$ $5,5\,^\circ$ $30\,^\circ$ $64,7\,^\circ$ $\Delta\theta_p$ maximal pour les ordres $|p|$ les plus grands, ici $p=-3$ où $\Delta\theta_{p=-3} = 1,0\,^\circ$.

3. Ordre manquant

Réponses : $\mathcal{D}(i) = \operatorname{sinc}^2\frac{\pi\ell\sin i}{\lambda}$ est une fonction lente qui sert d'enveloppe à la fonction d'interférences ; $\mathcal{I}(i) = \frac{\sin^2 N\frac{\pi a\sin i}{\lambda}}{\sin^2\frac{\pi a\sin i}{\lambda}}$, $a = 5\ell$.

4. Réseau sous incidence normale

Réponses : On écrit la formule fondamentale des réseaux, sachant que l'on est en incidence normale. Pour la raie verte, dans l'ordre 1, on a $\sin i_{\text{vert}} = \frac{\lambda_{\text{vert}}}{a}$. Pour la raie rouge, dans l'ordre 2, on a $\sin i_{\text{rouge}} = 2\,\frac{\lambda_{\text{rouge}}}{a}$. Alors, $\lambda_{\text{rouge}} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin i_{\text{rouge}}}{\sin i_{\text{vert}}}\,\lambda_{\text{vert}} = 762,9\,\text{nm}$. De même, on tire $\lambda_{\text{bleu}} = 479,8\,\text{nm}$. La précision sur les mesures des angles autoriserait une bonne précision sur λ s'il n'y avait pas une autre cause d'incertitude. On peut penser au rôle du nombre fini N de traits éclairés qui provoque un élargissement des ordres d'environ $2\pi/N$ en phase mais ce n'est pas la cause la plus importante d'incertitude avec les réseaux assez performants et une évaluation chiffrée peut nous en convaincre. Par exemple, à l'ordre 1 et aux petits angles (pour plus rapidement se fixer les idées), on aurait une incertitude angulaire relative (en s'appuyant sur $\varphi \simeq \frac{2\pi}{\lambda}\,a\,i$ $\frac{\Delta i}{i} \simeq \frac{\Delta\varphi}{\varphi} = \frac{2\pi/N}{2\pi} = \frac{1}{N} \simeq 0,05\%$) pour un réseau médiocre de 100 traits/mm éclairé sur une largeur de 2 cm. Cela reste assez précis (précision d'environ une moitié de minute d'arc si l'on revient aux angles) ! En pratique, on utilise des réseaux avec N plus élevé ! Par exemple, on peut adopter un réseau de 1000 traits/mm et l'éclairer sur une largeur de 5 cm et on déduit une précision relative angulaire de $2.10^{-3}\%$. La principale cause d'incertitude réside surtout dans l'hypothèse de l'incidence normale. On ne sait pas bien repérer la normale d'un réseau. On pourrait penser à utiliser la réflexion dans l'ordre 0 pour repérer cette direction avec une lunette autocollimatrice. On voit sur la figure 1 que lorsque le réticule lumineux se superpose avec son image par réflexion dans l'ordre 0, le plan du réseau est normal à l'axe de la lunette. Cependant, il n'est pas certain que la réflexion dans l'ordre 0 soit suffisamment intense pour permettre un tel repérage !

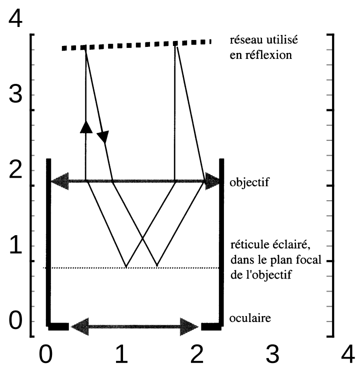

FIGURE 1 – Réseau par réflexion et collimateur

Pour faire des mesures précises de longueur d'onde, on peut utiliser plusieurs méthodes. La plus connue consiste à utiliser le minimum de déviation $D_{p,\text{min}}$ dans l'ordre p, tel que $2\,\sin\frac{D_{p,\text{min}}}{2} = p\,\frac{\lambda}{a}$. On peut démontrer cette formule comme suit. La déviation de l'ordre p par le réseau est $D_p = \theta_p - \theta_0$. Celle-ci est extrémale lorsque $\frac{\mathrm{d}D_p}{\mathrm{d}\theta_0} = \frac{\mathrm{d}\theta_p}{\mathrm{d}\theta_0} - 1 = 0$. Or, la relation fondamentale des réseaux différenciée donne $\cos\theta_p\,\mathrm{d}\theta_p - \cos\theta_0\,\mathrm{d}\theta_0 = 0$ donc $\frac{\mathrm{d}D_p}{\mathrm{d}\theta_0} = \frac{\cos\theta_0}{\cos\theta_p} - 1 = 0$. Ainsi, la déviation est extrémale lorsque $\theta_p = \pm\theta_0$. Le cas avec le signe + n'est possible que pour l'ordre 0 pour lequel la déviation est nulle (on le savait déjà) et bien minimale. Ce n'est pas ce qui nous intéresse. On retient donc $\theta_p = -\theta_0$ qui correspond à une déviation extrémale (avec le réseau bissecteur des rayons incidents et diffractés dans l'ordre p !) $D_{p,\text{extr.}} = 2\,\theta_p$ et la formule fondamentale des réseaux permet de conclure aisément sur la formule proposée mais il reste à prouver que l'on a bien un minimum de déviation. Ceci est en fait évident puisque la déviation est supérieure lorsque $\theta_0 = 0$. En appliquant la méthode du minimum de déviation développée, il vient donc $\lambda_{\text{rouge}} = \lambda_{\text{vert}} \frac{\sin \frac{D_{p,\text{min,rouge}}}{2}}{\sin \frac{D_{p,\text{min,vert}}}{2}}$ sans nécessiter de connaître l'angle d'incidence.

5. Spectre de la lampe à vapeur d'hydrogène

Réponses : Diffraction, interférences, $\sin\theta_k = \sin i + kn\lambda$, $D_k = \theta_k - i$, $\theta_k = \pm i$ signes différents d'où $\theta_k = -i$, $D_{km} = 2\theta_k = -2i$, $\theta_1 = 8,5\,^\circ$ $\lambda_0 = \frac{2}{n}\sin\theta_1$, $\Delta\lambda_0 = \frac{2}{n}\cos\theta_1\Delta\theta_1$, $\lambda_0 = 608,5 \pm 1,2\,\text{nm}$, $i_0 = -19,2\,^\circ$, 6 ordres complets $\{-2,-1,1,2,3,4\}$, $x_\beta = -f'\tan\beta_1 = -3,4\,\text{cm}$, $x_\gamma = -4,5\,\text{cm}$, $x_\delta = -5,0\,\text{cm}$.

6. Réseau par réflexion

Réponses : $\sin\theta + \sin i = pn\lambda$, $2\sin\theta = pn\lambda$, $\theta = 0\,^\circ$ $8,3\,^\circ$ $16,8\,^\circ$ $25,6\,^\circ$ $35,2\,^\circ$ et $46,2\,^\circ$, $x_\lambda = 14,58\,\text{cm}$, $x_{\lambda'} = 14,63\,\text{cm}$, $\Delta x = 0,5\,\text{mm}$.

7. Position des raies dans la figure de diffraction

Réponses : $\sin\theta = 0,5 + 0,2356p$, ordres de 2 à -6 $\theta = 76,2\,^\circ$ $47,4\,^\circ$ $30\,^\circ$ $15,3\,^\circ$ $1,7\,^\circ$ $-11,9\,^\circ$ $-26,3\,^\circ$ $-42,7\,^\circ$ $-66,0\,^\circ$, $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = pN$ $N = n\ell$, $\ell = 1,2\,\text{mm}$, $\Delta\theta = 0,1\,^\circ$.

8. Source à distance finie

Réponses : $\ell = Na = 2\,\text{cm}$, $a\sin\theta = p\lambda$. Puisque l'incidence est normale, il y a symétrie des ordres par rapport à la normale. Les ordres observables sont $p = 0$, $p = \pm 1$, $p = \pm 2$ et $p = \pm 3$ avec les angles $0\,^\circ$, $\pm 15,1\,^\circ$, $\pm 31,3\,^\circ$ et $\pm 51,3\,^\circ$. Il y a une différence de marche supplémentaire avant le réseau $\delta_{\text{avant}} = \sqrt{D^2 + n^2a^2} - D$ pour la fente de rang n à partir de celle située en face de la source. En effectuant un développement limité, on arrive à $\delta_{\text{avant}} \simeq \frac{n^2a^2}{2D}$. Il n'y aura pas de changement si $\delta_{\text{avant}} = p'\lambda$ avec $p' \in \mathbb{N}$. On a donc $D = \frac{n^2a^2}{2p'\lambda}$, ceci doit être vrai $\forall n$. Si on pose la condition pour $n = 1$ à savoir $D = \frac{a^2}{2p'\lambda}$ alors on aura toujours δ_{avant} multiple entier de la longueur d'onde puisque n^2 est toujours un entier. La plus grande valeur de D est obtenue pour $p' = 1$ à savoir $D = \frac{a^2}{2\lambda} = 3,8\,\mu\text{m}$. Cette valeur est très faible et ne respecte pas la condition $D \gg \ell$. On peut donc dire que la présence de la source à distance finie modifiera nécessairement la figure de diffraction fournie par le réseau.

B. Applications du réseau

9. Mesure de la vitesse du son dans l'eau

Réponses : Superposition d'ondes progressives se propageant en sens contraire, $a = \frac{\Lambda}{2}$ où $\Lambda = \frac{c}{\nu}$ est la longueur d'onde, $a\sin\theta = p\lambda$, $x = p\frac{\lambda f}{a}$, $\Delta x = \frac{\lambda f}{a}$, $c = \frac{2\lambda f\nu}{\Delta x} = 1\,508\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ supérieure à $340\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ dans l'air logique, $s = Ks_0 \exp j\omega t \int_{-d/2}^{d/2}\left(1 + j\eta\cos\left(2\pi\frac{x}{a}\right)\right)\exp j\frac{2\pi x\sin\theta}{\lambda}\text{d}x$, maxima en $x = 0$ et en $x = \pm\frac{\lambda f}{a}$, on observe 3 ordres $I = I_0\left[\text{sinc}^2\,\frac{\pi dx}{\lambda f} + \frac{\eta^2}{4}\left(\text{sinc}\,\pi d(\frac{1}{a} + \frac{x}{\lambda f}) + \text{sinc}\,\pi d(-\frac{1}{a} + \frac{x}{\lambda f})\right)^2\right]$.

10. Pouvoir de résolution d'un réseau

Réponses : $E = E_0\frac{\sin^2\frac{N\pi a\sin\theta}{\lambda}}{\sin^2\frac{\pi a\sin\theta}{\lambda}}$ avec $\theta - i = \frac{x}{f}$, $\sin\theta = 0,2454p$ $0\,^\circ$ $14,2\,^\circ$ $29,4\,^\circ$ $(p = 2)$ $47,4\,^\circ$ $79,0\,^\circ$, l'ordre 2 se situe à $0,6\,^\circ$ de l'axe optique de la lentille, $x = 0,52\,\text{cm}$, $\sin\theta'_k = (k + \frac{1}{N})\frac{\lambda}{a}$, $\sin\theta_k = k\frac{\lambda}{a}$, $\theta'_k = \theta_k + \epsilon$ avec $\epsilon \ll \theta_k$, $\epsilon = \frac{\lambda}{Na\cos\theta_k}$, $\Delta x_{1/2} = \frac{\lambda fa}{\ell\sqrt{a^2 - k^2\lambda^2}}$, $\ell \simeq \frac{a\lambda}{2\delta\lambda} = 1,2\,\text{mm}$.

11. Spectroscope à réseau

Réponses : Ordre ; $-\frac{1}{N\lambda_{bleu}} \leq p \leq \frac{1}{N\lambda_{bleu}}$; $i = -i_0$, $D = 2i = -2i_0$, $\sin i = p\frac{N\lambda}{2}$; $\Delta\lambda = \frac{\lambda}{N_{tot}g} = 31\,\text{pm}$; transparence du réseau, diffraction.

12. Réseau de Michelson

Réponses : Réflexion en $\theta = 0$, maximum d'interférences si $2e = p\lambda$; $p = 303,03$ quasiment le cas ; amplitude diffractée en sinc $\frac{\pi a(\sin i - \sin\theta)}{\lambda}$; différence de marche $\delta = a(\sin i - \sin\theta) + e(\cos i + \cos\theta)$, amplitude des interférences en $\frac{\sin\frac{N\pi\delta}{\lambda}}{\sin\frac{\pi\delta}{\lambda}}$; maximum de diffraction si $i = \theta$ alors $\delta = 2e\cos\theta$, maximum d'interférences si $2e\cos\theta = p\lambda$ avec $p \in \mathbb{N}$, $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N\frac{2e}{\lambda} \simeq 6060$.

C. Interféromètre de Fabry et Perot

13. Éclairement transmis par l'interféromètre de Fabry et Perot

Réponses : $A_1 = \tau^2 A_0$, $A_2 = \tau^2\rho^2 A_0$, $A_p = \tau^2\rho^{2(p-1)}A_0$, $\Phi = 2kLn_0$, maximal si $\Phi \equiv 0[2\pi]$, $A_{tr,\max} = A_0\tau^2(1+\rho^2+\rho^4+\rho^6+\ldots) = A_0\frac{\tau^2}{1-\rho^2}$ d'où $A_{tr,\max} = A_0$ et $I_{tr,\max} = I_0$, minimal si $\Phi \equiv \pi[2\pi]$, $A_{tr,\min} = \tau^2 A_0(1-\rho^2+\rho^4-\rho^6+\ldots) = \frac{\tau^2}{1+\rho^2}A_0$ d'où $I_{tr,\min} = \left(\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2}\right)^2 I_0$ ou encore $I_{tr,\min} = \left(\frac{1-R}{1+R}\right)^2$, $V = \frac{2\rho^2}{1+\rho^4}$, plus $\rho^2 \to 1$ élevé plus $V \to 1$ plus il y a d'écart entre les maxima et les minima $I_{tr,\min} \to 0$ et on voit bien les interférences, $T = 1-\rho^2 = 1-R$, $I_{tr} = I_0\frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\Phi}$, si $\Phi \equiv 0[2\pi]$ $I_{tr} = I_0$ et si $\Phi \equiv \pi[2\pi]$ $I_{tr} = I_0\left(\frac{1-R}{1+R}\right)$, $\Theta = \frac{(1-R)^2}{1+R^2-2R\cos\Phi}$.

14. Signal optique dans l'interféromètre de Fabry et Perot

Réponses : Le terme $\exp(-jn_0k(x-L))$ provient de l'onde allant dans le sens x croissant qui s'arrête en x et ne va pas jusqu'en L, le terme $\rho\exp(jn_0k(x-L))$ représente l'onde réfléchie qui est allée de L vers x et qui n'est pas comptée dans $\underline{S}_{tr}(L,t)$, $\tau^2 = 1-\rho^2 \simeq 2\varepsilon$, $I_{lam} = \frac{I_0\Theta}{2\varepsilon}(1+\rho^2+2\rho\cos\psi)$ où $\psi = n_0k(x-L)$, avec $\rho^2 \simeq 1$ et $\rho \simeq -1$ on a $I_{lam} = \frac{2I_0\Theta}{\varepsilon}\sin^2(n_0k(x-L))$, les représentations sur la figure 2.

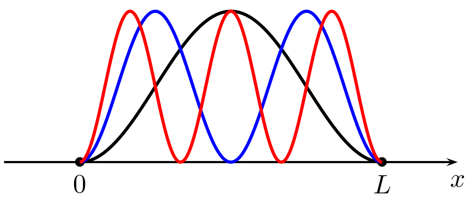

FIGURE 2 – Signal optique dans la lame