

## Exercices : 11 - Principes de la Thermodynamique

### A. Application des principes

#### 1. Comparaison réversibilité - irréversibilité

Une mole d'un gaz parfait de capacité thermique à volume constant  $C_V = 5R/2$  est contenue dans un cylindre vertical calorifugé comportant un piston mobile calorifugé de section  $S = 0,01 \text{ m}^2$  en contact avec une atmosphère extérieure à pression constante  $p_0 = 1 \text{ bar}$ . Initialement, le gaz est en équilibre et sa température vaut  $T_0 = 300 \text{ K}$ ; on donne  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. On pose sur le piston une masse  $M = 102 \text{ kg}$  et on laisse le système évoluer. Déterminer sa pression  $p_1$  et sa température  $T_1$  lorsqu'on atteint un nouvel état d'équilibre (1).
2. L'état d'équilibre (1) étant atteint, on supprime la masse  $M$  et on laisse évoluer le système. Déterminer sa pression  $p_2$  et sa température  $T_2$  lorsqu'on atteint un nouvel état d'équilibre (2). Commenter.
3. Calculer la variation d'entropie  $\Delta S_{01}$  et commenter.  
Pour ramener le système dans son état initial, on supprime la surcharge et on déplace lentement le piston pour faire subir au gaz une détente  $1 \rightarrow 2$  réversible dans le cylindre calorifugé, jusqu'au volume  $V_2 = V_0$ . On bloque le piston, on supprime l'isolation thermique du cylindre et on met le système en contact avec un thermostat à la température  $T_0$  : il évolue de manière isochore jusqu'à un état d'équilibre  $E_3$ .
4. Déterminer la pression et la température dans les états  $E_2$  et  $E_3$ . Calculer les variations d'entropie  $\Delta S_{12}$ ,  $\Delta S_{23}$ ,  $\Delta S_{13}$  du gaz et l'entropie créée au cours de l'évolution  $1 \rightarrow 3$ . Commenter.

#### 2. Transformations polytropiques

On appelle transformation polytropique une transformation réversible au cours de laquelle les transferts de travail et thermique vérifient  $\delta W = k\delta Q$ , où  $k$  est une constante. On étudie de telles transformations pour un gaz parfait à coefficient  $\gamma = cte$ .

1. Établir la relation liant  $p$  et  $V$  le long de cette transformation, sous la forme  $pV^n = cte$ . Déterminer les différents cas particuliers.
2. L'air de l'atmosphère est en équilibre polytropique; en déduire la loi de variation de la température avec l'altitude. On considérera  $n \neq 1$ , on notera  $g$  l'accélération de la pesanteur et on songera à appliquer la loi de la statique des fluides.
3. Évaluer la hauteur totale de l'atmosphère si  $n = 1, 2$ , l'atmosphère étant de l'air ( $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) de température au sol  $0^\circ\text{C}$ , avec  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

#### 3. Travail de séparation

1. Quelle est l'expression du travail minimal nécessaire pour séparer de façon isotherme un mélange idéal (température  $T_0$ , pression  $P_0$ ) de deux gaz parfaits  $A$  et  $B$  en ses constituants purs ( $n_A$  moles de  $A$  séparées des  $n_B$  moles de  $B$ , toujours sous  $P_0$ ) ? On fera intervenir les fractions molaires initiales respectives des gaz  $A$  et  $B$ , notées  $x_A$  et  $x_B$ , dans le résultat ainsi que la température  $T_0$ ,  $n_A$  et  $n_B$  les nombres de moles.
2. On admet que le résultat précédent permet une évaluation correcte du travail minimal de séparation d'un mélange quelconque. Chiffrer ce travail dans les cas suivants (masse initiale de  $1,0 \text{ kg}$  à  $T_0 = 300 \text{ K}$  et  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ ) :
  - Air (en ne considérant que  $\text{O}_2$  et  $\text{N}_2$ ).
  - Mélange de  $\text{U}^{235}\text{F}_6$  (1%) et  $\text{U}^{238}\text{F}_6$  (99%).
  - Eau de mer (pour enlever le sel).
3. Quel est l'intérêt de la séparation de chaque mélange précédent ? Citer pour chacun d'eux au moins une méthode pratique de séparation existante.

#### 4. Chauffe-eau au gaz

De l'eau dont la capacité thermique est  $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  entre à  $T_0$  ( $14^\circ\text{C}$ ) dans un chauffe-eau et en ressort à la température  $T_f$  ( $33^\circ\text{C}$ ). Pendant 5 minutes, il a circulé  $10 \text{ L}$  d'eau pour une consommation de  $27 \text{ L}$  de gaz. Le gaz possède un pouvoir énergétique  $PE = 10,4 \text{ kWh} \cdot \text{m}^{-3}$ .

1. Calculer le rendement du chauffage.

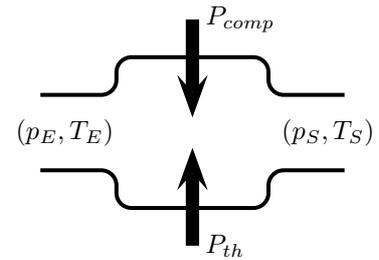
Le rendement du chauffage n'est pas de 100% car il s'effectue entre l'eau chaude et l'extérieur (qu'on suppose toujours à la température  $T_0$ ) un transfert thermique modélisé par la puissance transférée suivante :

$$P_{\text{pertes thermiques}} = \alpha(T - T_0)$$

2. Calculer  $\alpha$ .

### 5. Compresseur refroidi

On étudie un compresseur simple (figure ci-contre) qui fait passer réversiblement de l'air de l'état ( $T_E = 550\text{ K}$ ,  $p_E = 15\text{ bar}$ ) à l'état ( $T_S = 450\text{ K}$ ,  $p_S = 150\text{ bar}$ ). Le débit massique est  $\mathcal{D} = 0,1\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Pour l'air, on prendra  $r = 287\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ ,  $c_p = 1\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1,40$ . On négligera les variations d'énergie cinétique. Déterminer la puissance du compresseur ainsi que la puissance thermique en sachant que le transfert thermique s'effectue avec un thermostat à  $T_0 = 300\text{ K}$ .



### 6. Turbine à vapeur

On considère une turbine à vapeur qui fonctionne en régime permanent. Cette turbine, considérée comme parfaitement calorifugée, possède deux sorties. La sortie haute pression s'effectue sous  $p_1 = 10,0\text{ bar}$  alors que la sortie basse pression est, elle, sous  $p_2 = 0,5\text{ bar}$ . À l'entrée, on a une pression  $p_e = 30,0\text{ bar}$ . Le débit massique d'entrée est  $\mathcal{D}_{me} = 85,0\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . Dans le tableau qui suit, on donne les caractéristiques de la vapeur en entrée et en sortie.

	Enthalpie massique ( $\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ )	Vitesse ( $\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ )
Entrée	3 231,6	105
Sortie 1	2 844,1	180
Sortie 2	2 682,4	80

On précise que le débit massique sur la sortie basse pression est  $\mathcal{D}_{m2} = 78,6\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ .

1. Calculer la puissance mécanique que cette turbine fournit à un alternateur destiné à produire de l'électricité.

### 7. Optimisation d'une compression

On considère deux types d'installation visant à comprimer de l'air de la pression  $P_1$  à la pression  $P_2 = aP_1$  avec  $a = 25$ .  $a$  est le taux de compression. La température d'admission est  $T_1 = 300\text{ K}$  et le débit massique d'air  $\mathcal{D}_m = 1\text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$ . La première installation utilise un seul compresseur, la seconde deux compresseurs et un élément réfrigérant qui permet les transferts thermiques entre les fluides le traversant sans se mélanger. Dans la seconde installation, on décompose la compression en deux étapes pour arriver à la même pression finale. Sur la première étape, le taux de compression est  $r < a$ . Le refroidissement du fluide qui suit la première compression ramène l'air à la température initiale à savoir  $T_1 = 300\text{ K}$ . L'air est considéré comme un gaz parfait diatomique. Chaque compresseur est supposé idéal et la transformation subie par le gaz est supposée adiabatique et réversible. L'échangeur thermique est aussi considéré comme idéal. On rappelle la valeur de  $R = 8,314\text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  et la valeur de la masse molaire de l'air  $M_{air} = 29\text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

1. On commence par étudier le dispositif à un seul compresseur. Calculer la température  $T_2$  de l'air en sortie. Déterminer la puissance nécessaire à l'opération de compression.
2. En discutant la réponse uniquement de façon qualitative, des deux systèmes lequel vous apparaît le moins coûteux ?
3. Exprimer la puissance nécessaire à la compression en deux étapes en fonction de  $a$  et  $r$  en particulier.
4. Déterminer la valeur de  $r$  qui minimise la puissance nécessaire à la compression.
5. Comparer numériquement les coûts de fonctionnement des deux dispositifs en considérant que l'eau utilisée pour le refroidissement est gratuite.
6. Pour protéger l'environnement, l'eau qui circule dans le réfrigérant y entre à la température  $T_0 = 283\text{ K}$  et ne doit pas en ressortir à une température supérieure à  $T_{max} = 293\text{ K}$ . Quel débit massique d'eau minimum imposer dans le réfrigérant sachant que la capacité thermique massique de l'eau liquide est  $c_{eau} = 4,18\text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ?

### 8. Détente dans une tuyère

Une masse d'air assimilée à un gaz parfait arrive à l'entrée d'une tuyère avec une température  $T_0 = 293\text{ K}$  et une vitesse d'ensemble  $v$ . La tuyère la conduit dans un très grand réservoir où elle se disperse et où sa température est  $T_f = 500\text{ K}$ . La tuyère et le réservoir sont parfaitement calorifugés. L'air sera assimilé à un gaz parfait diatomique de coefficient  $\gamma = 1,40$ , la constante des gaz parfaits est  $r = R/M_{air} = 287\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Calculer la vitesse  $v$  de l'air à l'entrée de la tuyère.

### 9. Chauffage d'un solide

Dans une enceinte adiabatique, on fait passer un solide, de capacité thermique constante  $C$ , de la température  $T_1$  à la température  $T_2$  en deux étapes :

- contact avec un thermostat de température  $T_i$  ;
- contact avec un thermostat de température  $T_2$ .

Déterminer  $T_i$  pour minimiser l'entropie créée.

### 10. Détente dans le vide

L'air atmosphérique est assimilé à un gaz parfait diatomique, de pression et température constantes (1 bar, 20°C). On fait le vide dans un récipient à parois bien isolées sur le plan thermique, indéformable, de volume égal à 1 L. Il peut communiquer avec l'extérieur au moyen d'un robinet de petites dimensions.

1. On ouvre un bref instant le robinet, faisant entrer de l'air dans le récipient. Le robinet est ensuite refermé. Quel est la température de l'air entré dans le ballon ? Quelle est l'entropie créée par cette opération ?
2. On attend ensuite longtemps, de sorte que l'équilibre de température se refasse entre l'intérieur et l'extérieur. Quelle est l'entropie créée par cette transformation ?

### 11. Chauffages d'un gaz

On considère un réservoir à parois calorifugées séparé en deux parties par un piston calorifugé et mobile sans frottement. Initialement, chaque compartiment contient une mole du même gaz parfait diatomique, à la pression  $P_0 = 10^5$  Pa et à la température  $T_0 = 290$  K. Grâce à une résistance électrique, on chauffe progressivement le gaz dans le compartiment de gauche, jusqu'à y obtenir la pression  $P = 2 P_0$ . Voir la figure 1 à gauche.



FIGURE 1 – Deux dispositifs avec chauffage d'un gaz

1. Déterminer l'état du gaz dans chacun des deux compartiments.
2. Calculer l'énergie thermique  $Q$  apportée au gaz de gauche par l'intermédiaire de la résistance, ainsi que le travail  $W$  échangé entre les deux gaz.

La mole du gaz parfait considéré précédemment est maintenant contenue dans un cylindre calorifugé fermé par un piston, lui-même calorifugé, de section  $S = 0,05$  m<sup>2</sup>, retenu par un ressort de raideur  $k = 25 \cdot 10^3$  N · m<sup>-1</sup>. Il n'y a pas de frottement. Le gaz est dans le même état initial que précédemment, et il est à nouveau chauffé progressivement jusqu'à la pression  $P = 2 P_0$ .

3. Calculer l'état final du gaz. Que peut-on dire de la relation  $P(V)$  au cours de ce chauffage ?
4. Calculer l'énergie thermique  $Q_1$  fournie au gaz par la résistance, ainsi que l'énergie absorbée par le ressort.

### 12. Transformation monobare et monotherme

On considère le dispositif de la figure 2. Le compartiment de gauche contient un gaz parfait dans les conditions initiales  $V_0, T_0, P_i = 2 P_0$ . À droite du piston, l'air extérieur est à pression constante  $P_0$  et à température constante  $T_0$ . Initialement, le piston est complètement à gauche et on néglige le volume du petit tuyau de communication. On ouvre le robinet et on laisse le système évoluer. L'ensemble est perméable à la chaleur. Les capacités calorifiques  $C_v$  et  $C_p$  sont supposées constantes. On rappelle que la variation d'entropie de  $n$  moles de gaz parfait, de rapport de capacités calorifiques  $\gamma$  constant, d'un état  $(T_i, V_i)$  à un état  $(T_f, V_f)$  est

$$\Delta S = \frac{nR}{\gamma - 1} \ln \frac{T_f}{T_i} + nR \ln \frac{V_f}{V_i}.$$

1. Montrer que  $G^* = U - T_0 S + P_0 V$  est le potentiel thermodynamique de la transformation de tout le gaz. En déduire l'état final du gaz.
2. Déterminer le travail fourni par le gaz à l'extérieur. Le comparer à la diminution de la fonction  $F^* = U - T_0 S$ . Conclure.

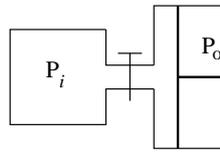


FIGURE 2 – Transformation monobare monotherme d'un gaz

### 13. Étude d'une équation d'état

On compare le fluide de VAN DER WAALS d'équation d'état molaire  $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$  à un gaz parfait.

- Lors d'une transformation réversible, un fluide reçoit le transfert thermique  $\delta Q_{\text{rév}} = C_v dT + \ell dV$ . En exprimant  $dU$  et  $dS$ , établir l'expression de  $\ell$  en fonction de  $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ .
- En déduire l'équation de Helmholtz,  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T^2 \left(\frac{\partial (p/T)}{\partial T}\right)_V$ .
- Expliciter, sous forme d'une intégrale portant sur le volume, la différence entre l'énergie interne d'une mole de fluide de VAN DER WAALS et l'énergie interne d'une mole de gaz parfait pris tous deux à la température  $T$  et dans le volume  $V$ .
- Quel est le comportement d'un gaz de VAN DER WAALS dans une détente de JOULE-GAY-LUSSAC?
- Comparer les capacités thermiques molaires à volume constant des deux gaz.

## B. Machines thermodynamiques

### 14. Système de climatisation

On étudie l'installation de climatisation d'un wagon. On néglige les variations d'énergie cinétique. Un moteur entraîne un compresseur puisant de l'air dans le wagon à la température  $\theta_A = 20^\circ\text{C}$  et à la pression  $p_A = 1$  bar. La compression est adiabatique et réversible. A la sortie l'air est dans l'état  $\theta_B, p_B$ . Il perd ensuite de l'énergie par un transfert thermique isobare au profit de l'air extérieur au wagon qui est à  $37^\circ\text{C}$ . Sa température est alors  $\theta_C$ . Il effectue ensuite une détente adiabatique et réversible dans une turbine, à la suite de quoi il est rejeté dans le wagon à la pression  $p_D = 1$  bar et à la température  $\theta_D = -5^\circ\text{C}$ . Le compresseur et la turbine sont sur le même axe. Pour l'air, on prendra  $r = 287 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $c_p = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  et  $\gamma = 1,40$ . On raisonnera pour un kilogramme d'air.

- Quelle est la valeur minimale que l'on peut espérer atteindre pour  $\theta_C$ ? En déduire la valeur minimale  $p_B$  que le compresseur doit imposer. On donne  $p_B = 1,7$  bar, calculer  $\theta_B$  et  $\theta_C$ .
- La puissance de climatisation est définie comme la puissance thermique échangée par l'air qui entre refroidi dans le compartiment et qui en ressort à  $20^\circ\text{C}$ . Déterminer cette puissance sachant que la puissance thermique rejetée à l'extérieur, est de  $5 \text{ kW}$ . (On calculera le nombre de kilogrammes d'air qui doivent être puisés chaque seconde dans le wagon.)
- Dans le cadre de la question précédente, calculer la puissance fournie au compresseur, celle récupérée dans la turbine, celle globalement fournie par le moteur. Calculer l'efficacité de l'installation définie par  $e = P_{\text{clim}}/P_{\text{moteur}}$ . On justifiera cette définition de l'efficacité.

### 15. Moteur d'avion à réaction

Dans un moteur à réaction, un gaz, assimilé à de l'air supposé parfait, parcourt un cycle réversible. Il pénètre dans le réacteur à la pression  $p_1 = 1$  bar et à la température  $T_1 = 290 \text{ K}$ . Il est ensuite comprimé adiabatiquement jusqu'à la pression  $p_2 = 5$  bar. Sa température vaut alors  $T_2$ . Il passe dans une chambre de combustion isobare, sa température devient  $T_3 = 1300 \text{ K}$ . Le gaz subit ensuite une détente adiabatique dans une turbine jusqu'à  $p_4$  et  $T_4$ . Cette détente est telle que la puissance fournie à la turbine compense exactement celle que consomme le compresseur entre (1) et (2). Enfin le gaz se détend dans une tuyère adiabatique, sans parties mobiles jusqu'à  $p_1$  et  $T_5$ . Le gaz est rejeté avec la vitesse  $v$  (ce qui assure la propulsion) dans l'atmosphère où il se refroidit de manière isobare jusqu'à  $T_1$ . On considérera qu'on a un système en écoulement mais que la vitesse du gaz est partout négligeable sauf à la sortie de la tuyère. On raisonnera sur l'unité de masse et pour l'air, on prendra  $\gamma = 1,40$  et  $c_p = 1 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- Déterminer  $T_2$ .
- Quelle est l'énergie fournie à l'unité de masse de gaz qui traverse le compresseur?
- Quel est le transfert thermique dans la chambre de combustion?
- Déterminer  $T_4$  et  $T_5$ .

5. Quelle est la vitesse du gaz à la sortie de la tuyère ?
6. Quel est le rendement du moteur ?
7. Représenter l'allure du cycle dans le diagramme de Clapeyron ( $p, V$ ).

## 16. Cycles thermiques

### 1. Association de cycles dithermes.

On compare ici deux dispositifs de chauffage d'une pièce maintenue à la température de 300 K, l'extérieur de l'habitation étant supposée à 270 K.

- (a) Un moteur réversible reçoit le transfert thermique  $Q$  d'une chaudière à 600 K et fournit  $q$  à une source froide à la température de 270 K.

Le travail fourni par le moteur sert à faire fonctionner une pompe à chaleur réversible qui pompe  $q'$  à la source à la température de 270 K et fournit  $Q'$  à la pièce à chauffer, à la température de 300 K. Calculer  $\eta_1 = -Q'/Q$  ; commenter.

- (b) On change le dispositif, le moteur étant maintenant placé dans la pièce à chauffer et utilise donc celle-ci comme source froide. On appelle maintenant  $Q''$  le transfert thermique total fourni à la pièce par le moteur et par la pompe à chaleur.

Calculer  $\eta_2 = -Q''/Q$  ; commenter.

### 2. Cycle tritherme.

En l'absence d'alimentation électrique par le réseau, on peut utiliser un « réfrigérateur à gaz ». La flamme du brûleur à gaz chauffe un évaporateur à 127 °C. Celui-ci contient une solution d'ammoniac dans l'eau. À chaud, l'ammoniac est peu soluble dans l'eau et les vapeurs d'ammoniac montent, suivent une canalisation et subissent une condensation plus loin au contact avec l'atmosphère extérieure à la température ambiante (27 °C). Ensuite, il faut redissoudre l'ammoniac dans l'eau, ce qui ne peut se faire qu'à plus basse température, dans l'absorbeur, situé à l'intérieur (froid) du réfrigérateur. En régime permanent, on atteint ainsi une température intérieure de 8 °C.

On suppose le fonctionnement idéal. Calculer l'efficacité du réfrigérateur. Comparer à un réfrigérateur à compresseur (ditherme) classique.

## 17. Rendements...

On considère un moteur thermique fonctionnant entre deux thermostat aux températures  $T_1$  et  $T_2 < T_1$ .

1. Donner l'expression et la définition du rendement du moteur thermique.
2. Déterminer l'expression du travail maximal  $W_{max}$  que la machine peut fournir pendant un nombre de cycles entier. Définir son rendement dans ce cas de figure que l'on notera  $\eta_0$ .

*Une machine plus réaliste*

La source chaude est constituée par un solide à la température  $T_1$  que l'on considérera comme constante. Cette énergie est transmise à un fluide caloporteur de température  $T_3$  avec  $T_3 < T_1$ , qui circule en contact avec la source solide. On suppose  $T_1$  et  $T_3$  uniformes et indépendantes du temps. On note  $Q$  l'énergie fournie par la source solide au fluide caloporteur pendant la durée  $\tau$  d'un cycle. On indique que la puissance thermique qui traverse l'interface source chaude - fluide caloporteur est donnée par  $G_{th}(T_1 - T_3)$ .

3. Donner l'expression de  $Q$  en fonction de  $\tau$ ,  $T_1$  et  $T_3$  et de la conductance thermique  $G_{th}$  de l'interface supposée fixée.
4. Le fluide caloporteur constitue la source chaude d'une machine thermique ditherme dont la température froide est à la température  $T_2$ . Il restitue à cette machine thermique l'énergie  $Q$  fournie par la source solide. On suppose par ailleurs que cette machine thermique fonctionne à son rendement maximal. En déduire la dépendance du travail  $W$  qu'elle fournit en fonction de  $\tau$ ,  $T_3$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  et  $G_{th}$ .
5. Tracer l'allure de la variation de la puissance extraite en fonction de  $T_3$  pour  $T_1$  et  $T_2$  fixées. Que vaut la puissance extraite lorsque le rendement est maximal ? Commenter ce résultat.
6. Déterminer la valeur de  $T_3$  qui maximise la puissance extraite de la machine thermique pour  $T_1$  et  $T_2$  fixées. On exprimera cette valeur optimale de  $T_3$  en fonction de  $T_1$  et de  $T_2$ .
7. On note  $\eta_1$  la valeur du rendement correspond à cette valeur de  $T_3$ . Exprimer  $\eta_1$  en fonction de  $T_1$  et  $T_2$ .

8. Exprimer  $\eta_1$  en fonction de  $\eta_0$  et représenter sa variation. Comment cette expression se simplifie-t-elle dans la limite où  $\eta_0 \ll 1$  ?
9. On revient au cas général d'une machine thermique cyclique ditherme dont les sources chaude et froide ont les températures  $T_1$  et  $T_2$ . On note toujours  $Q$  l'énergie fournie par la source chaude pendant la durée  $\tau$  d'un cycle. On suppose maintenant qu'une entropie  $S_c = \frac{\Sigma}{\tau}$  est créée au cours du cycle, où  $\Sigma$  est un coefficient indépendant de  $\tau$ . Commenter cette modélisation. Quel est le signe de  $\Sigma$  ?
10. Déterminer le travail  $W$  fourni pendant un cycle en fonction de  $Q$ ,  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $\Sigma$  et  $\tau$ .
11. Montrer que pour  $Q$  fixé, la puissance est maximale pour une valeur de  $\tau$  qu'on déterminera et qu'on notera  $\tau_2$ .
12. Calculer le rendement de la machine thermique lorsque la puissance est maximale. On le notera  $\eta_2$ .
13. Le réacteur nucléaire anglais Sizewell B est le plus grand réacteur nucléaire à eau pressurisée construit au Royaume-Uni. Il couvre environ 3% des besoins en électricité du Pays. Les températures des sources chaude et froide pour ce réacteur sont  $T_1 = 581$  K et  $T_2 = 288$  K. Son rendement est  $\eta = 0,36$ . Commenter cette valeur à la lumière des résultats obtenus avant.

### 18. Pompe à chaleur

Une pompe à chaleur cyclique ditherme fonctionne réversiblement entre une patinoire de dimensions  $20 \text{ m} \times 50 \text{ m} \times 30 \text{ cm}$  et une piscine de dimensions  $20 \text{ m} \times 50 \text{ m} \times 3 \text{ m}$ .

À l'état initial la piscine et la patinoire sont remplies d'eau liquide à température  $T_0$  ; à l'état final la glace de la patinoire est à  $T_1$ .

On connaît  $t_0 = 12^\circ\text{C}$ ,  $t_1 = -5^\circ\text{C}$ , les capacités thermiques massiques  $c_e = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (eau liquide) et  $c_g = 1,9 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  (glace) et la chaleur latente de fusion de l'eau  $L_f = 334 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ .

La masse volumique de l'eau (liquide ou solide) est  $\rho = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

1. Calculer alors la température  $T_1'$  de la piscine.
2. Calculer le travail minimal à fournir pour parvenir à cette situation.

### 19. Centrale nucléaire

Une centrale nucléaire fournit une puissance de 1000 MW. Elle est installée au bord d'un fleuve dont la température, lors d'une canicule l'été, est de 300 K. En France, il s'agit la plupart du temps du Rhône ou de la Loire. Le débit d'eau du fleuve utilisé par la centrale nucléaire est  $\mathcal{D}_{vol} = 400 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Comme le fleuve est à un niveau bas du fait de la canicule, environ 80% du débit total du fleuve est utilisé par la centrale. La température de la source chaude en rapport avec le cœur du réacteur est de 700 K. Le rendement de la centrale nucléaire est d'environ 60% du rendement maximal de CARNOT. On donne la capacité thermique massique de l'eau à pression constante :  $c_p = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ .

1. Quelle est l'élévation de température du fleuve entre l'amont et l'aval de la centrale nucléaire ?
2. Commenter le résultat.

### 20. Turbomoteur

Un moteur thermique à air fonctionne en régime permanent ; on néglige les variations d'énergie potentielle et d'énergie cinétique de l'air lors des diverses transformations. L'air, assimilé à un gaz parfait ( $\mathcal{M} = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $\gamma = 1,40$ ) subit les transformations suivantes :

- 1-2 Compression adiabatique réversible, le compresseur étant actionné par une partie du travail fourni par la turbine ;
- 2-3 Chauffage isobare réversible dans un récupérateur de chaleur ;
- 3-4 Chauffage isobare par un thermostat à la température  $t_c = 1200^\circ\text{C}$  ;
- 4-5 Détente adiabatique réversible dans la turbine (phase motrice) ;
- 5-6 Refroidissement isobare réversible dans le récupérateur de chaleur ;
- 6-1 Refroidissement isobare par un thermostat de température  $t_a = 0^\circ\text{C}$ .

On donne  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $p_2 = 4 \text{ bar}$ , le débit massique de l'air  $D_m = 10 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $t_1 = 15^\circ\text{C}$  et  $t_4 = 875^\circ\text{C}$ .

1. Établir la relation liant  $T_1$ ,  $T_2$ ,  $T_4$  et  $T_5$ .
2. Déterminer la température et la pression de l'air aux points 2, 3, 4, 5 et 6 du cycle.
3. Pour chacune des transformations du cycle, donner l'expression littérale de la variation d'entropie massique. Représenter l'allure du diagramme  $(T, s)$  de ce cycle.

- Définir et calculer le coefficient de performance  $\eta$  de ce moteur à turbine.  
Que devient ce coefficient lorsque le récupérateur de chaleur est supprimé, toutes autres choses restant égales par ailleurs ?
- Calculer dans les deux cas (avec et sans récupérateur) l'entropie créée par unité de temps. Conclure.

### 21. Tuyère

Dans une tuyère d'axe  $Ox$ , de section  $S(x)$ , un fluide s'écoule de manière stationnaire. On note  $S_1$  et  $p_1$  les section et pression à l'entrée  $x = 0$  de la tuyère,  $S_2$  et  $p_2$  les mêmes grandeurs à la sortie.

On note  $\rho(x)$ ,  $w(x)$  et  $h(x)$  les masse volumique, vitesse et enthalpie massique du fluide à l'abscisse  $x$ .  $\mathcal{M}$  désigne la masse molaire du fluide.

La quantité d'énergie apportée sous forme de transfert thermique à l'unité de masse de fluide lorsqu'elle passe de  $x = 0$  à  $x$  est  $q(x)$ .

- Relier  $w(x)$ ,  $h(x)$ ,  $w_1 = w(x = 0)$ ,  $h_1 = h(x = 0)$  et  $q(x)$ .
- On suppose maintenant que l'évolution est isentropique. Exprimer  $w(x)$  en fonction de  $w_1$  et de  $\int_0^x \frac{dp}{\rho}$ .
- Exprimer  $w(x)$  pour un gaz parfait si  $w_1 \simeq 0$ ; on donne  $\gamma = c_p/c_v$ .

### 22. Parc éolien en montagne

Une ville de montagne a installé un parc éolien capable de fournir une puissance maximale de 15 MW. Afin de pouvoir stocker l'excédent d'énergie produit à certaines périodes, il est accompagné de deux réservoirs d'eau séparés par un dénivelé de 750 m, d'une station de pompage de l'eau et d'une centrale hydro-électrique pour produire de l'électricité en cas d'absence de vent. L'étude porte sur la station de pompage.

Pendant une période d'excédent d'énergie produite par le parc éolien, de l'eau du réservoir inférieur, à une température de  $18^\circ\text{C}$ , est transvasée de façon continue (écoulement stationnaire) dans le réservoir supérieur. La température de l'eau à son arrivée dans le réservoir supérieur est de  $16^\circ\text{C}$ . La station de pompage permet de transvaser l'eau entre les deux réservoirs par une tuyauterie de section constante avec un débit maximal  $\mathcal{D}_m = 700 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Le système de pompes de la station permet de transmettre à l'eau une puissance maximale  $P_m = 8 \text{ MW}$ .

- Calculer les débits volumiques  $\mathcal{D}_{v,1}$  et  $\mathcal{D}_{v,2}$  de l'eau, exprimés en  $\text{L} \cdot \text{h}^{-1}$ , respectivement à la sortie du réservoir inférieur et à l'entrée du réservoir supérieur. Peut-on considérer le débit volumique comme constant ?
- Déterminer la puissance thermique  $P_{th}$  transférée à l'eau lors de son passage d'un réservoir à l'autre.

Données :

- Masse volumique de l'eau à  $18^\circ\text{C}$  :  $\rho_e = 998,6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Masse volumique de l'eau à  $16^\circ\text{C}$  :  $\rho'_e = 998,9 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$
- Capacité thermique massique de l'eau à pression constante :  $c_p = 4182 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
- Accélération de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$
- On néglige la variation d'énergie cinétique de l'eau lors du transvasement.

## C. Utilisation du diagramme H-ln(P)

### 23. Patinoire olympique

Une patinoire olympique possède une couche de glace d'une épaisseur d'environ 10 cm et une surface d'environ  $1800 \text{ m}^2$ . La glace doit être maintenue à environ  $-5^\circ\text{C}$ . Pour y parvenir, on fait passer sous la couche de glace environ 100 km de tuyaux parcourus par de l'ammoniac  $\text{NH}_3$  à la température de  $-10^\circ\text{C}$ . La patinoire dispose d'une réserve de 50 tonnes d'ammoniac. Pour maintenir la glace en bon état, il est nécessaire d'avoir une puissance frigorifique  $P_{fr} = 150 \text{ kW}$ . L'ammoniac est le fluide frigorigène d'une machine cyclique, il possède le nom de code R717. Son diagramme enthalpique est fourni. L'ammoniac évolue selon le cycle suivant :

- Dans l'état  $A$ , l'ammoniac est à l'état de vapeur saturante sous la pression  $P_A = 2,8 \text{ bar}$  et la température  $T_A = -10^\circ\text{C}$ . Il subit une compression adiabatique que nous supposons réversible pour l'amener dans l'état  $B$ .
- L'état  $B$  est défini par une pression  $P_B = 10,0 \text{ bar}$ .
- Pour atteindre l'état  $C$  qui correspond au liquide saturant, le fluide subit, depuis l'état  $B$ , un refroidissement et une condensation isobare. Le processus est possible par transfert thermique avec l'atmosphère ambiante qui se trouve à la température de  $20^\circ\text{C}$ .

- La transformation  $C \rightarrow D$  est une détente isenthalpique ramenant le fluide à la pression  $P_D = P_A = 2,8 \text{ bar}$ .
- L'ammoniac est ramené dans l'état  $A$  par une évaporation isobare. Celle-ci s'effectue par transfert thermique au contact de la glace à  $-5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

1. Placer les points  $A$  et  $B$  sur le diagramme enthalpique. Déterminer la valeur du travail massique de compression nécessaire pour cette étape du cycle.
2. Placer les points  $C$  et  $D$  et déterminer l'état précis du fluide pour le point  $D$ .
3. Définir l'efficacité de la machine frigorifique utilisée pour la patinoire. Justifier.
4. Calculer l'efficacité de cette machine. Comparer cette efficacité à celle d'une machine idéale de CARNOT fonctionnant avec les mêmes sources chaude et froide. Commenter.
5. Quel débit massique  $D_m$  doit-on assurer pour maintenir la patinoire en bon état ?

**24. Terminal GNL de Dunkerque**

Le 8 juillet 2016 le terminal méthanier de Dunkerque fut réellement mis en service avec l'arrivée du premier méthanier le Madrid Spirit, battant pavillon espagnol, en provenance du Nigéria, qui a déchargé  $130\,000 \text{ m}^3$  de gaz naturel liquéfié (GNL). Ce terminal recevra ensuite le GNL de Norvège, premier importateur de gaz naturel en France. On utilisera le diagramme enthalpique du méthane de nom de code R50.

On désire étudier le procédé de LINDE de liquéfaction du méthane, utilisé par exemple dans l'usine de Snohvit en Norvège, schématisé à la figure 3 avec les différents états du fluide numérotés de 0 à 10, permettant d'obtenir un débit massique  $D_{m10}$  de méthane liquide saturant à la pression  $P_{10} = 1 \text{ bar}$  à une température  $T_{10} = -161,7 \text{ }^\circ\text{C}$  (état 10).

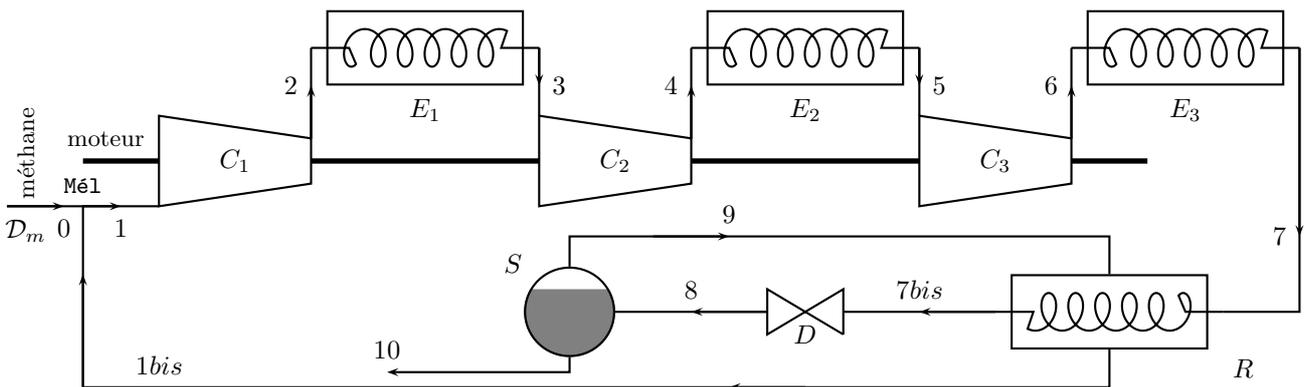


FIGURE 3 – Installation de LINDE de liquéfaction du méthane

Pour cela, on introduit un débit massique  $D_m = 1,0 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$  de méthane gazeux à la température  $T_0 = 7,0 \text{ }^\circ\text{C}$  et à la pression  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$  (état 0). Trois compresseurs  $C_1$ ,  $C_2$  et  $C_3$  fonctionnant de façon adiabatique et réversible, solidaires d'un même arbre entraîné sans perte par un moteur  $M$ , ainsi que trois échangeurs de chaleurs isobares (systèmes de refroidissement)  $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$  permettent d'obtenir en l'état 7 du gaz à la pression  $P_7 = 100 \text{ bar}$  et à la température  $T_7 = -63 \text{ }^\circ\text{C}$ . Les pressions intermédiaires sont  $P_2 = 5,0 \text{ bar}$  et  $P_4 = 25 \text{ bar}$ . L'enthalpie massique du fluide dans l'état 3 est  $h_3 = 866 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$  et dans l'état 5  $h_5 = 840 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$ . Un régénérateur  $R$ , échangeur thermique globalement calorifugé et fonctionnant de façon réversible, permet de refroidir le gaz comprimé non plus à  $-63 \text{ }^\circ\text{C}$  mais à  $-82 \text{ }^\circ\text{C}$  (état 7bis). Ce gaz refroidi est détendu isenthalpiquement de 100 bar à 1 bar par le détendeur  $D$  jusqu'à l'état diphasé 8 de titre massique en vapeur  $x = 0,61$ . Les phases liquide et gazeuse sont séparées dans le séparateur isobare  $S$ . La vapeur saturante sèche sortant du séparateur est recyclée dans le régénérateur  $R$ . Mē1 est un mélangeur globalement calorifugé, sans partie mobile et fonctionnant de façon isobare. La pression en 1 vaut donc  $P_1 = 1 \text{ bar}$ . On se place en régime permanent d'écoulement. On négligera toute variation d'énergie mécanique du fluide.

1. En exploitant le diagramme enthalpique, montrer que pour condenser totalement du gaz naturel assimilé à du méthane gazeux pur à la pression de 1 bar, il faut se placer à une température d'environ  $-162 \text{ }^\circ\text{C}$ . Quel est alors le volume massique du GNL ? Expliquer en quoi le transport du gaz naturel sous forme GNL constitue une bonne alternative au transport par gazoducs ?
2. On note respectivement les débits massiques de fluide  $D_{m1}$  et  $D_{m1bis}$  aux états 1 et 1bis. En utilisant le titre massique en vapeur  $x$  dans le séparateur, établir une relation entre  $D_{m1}$ ,  $D_{m1bis}$  et  $x$ .

3. Déterminer graphiquement les enthalpies massiques aux états 7 ( $P_7 = 100$  bar et  $T_7 = -63$  °C), 7bis ( $P_{7bis} = P_7$  et  $T_{7bis} = -82$  °C) et 9 respectivement notées  $h_7$ ,  $h_{7bis}$  et  $h_9$ . En effectuant un bilan énergétique au niveau du régénérateur  $R$  globalement calorifugé et ne comportant pas de partie mobile, déterminer l'enthalpie massique  $h_{1bis}$ .
4. On admet qu'au niveau du mélangeur M<sub>é</sub>l, il y a conservation du débit d'enthalpie. Calculer  $h_1$ .
5. La transformation au niveau du compresseur  $C_1$  étant supposée isentropique, déterminer graphiquement la valeur de l'enthalpie massique  $h_2$  à l'état 2. En déduire la puissance  $P_{u1}$  fournie par le moteur au compresseur  $C_1$ . On commencera par positionner le point 1 sur le diagramme.
6. Placer l'ensemble des points du processus sur le diagramme enthalpique. Tracer l'ensemble des étapes.
7. La puissance totale délivrée par le moteur est égale à 1,8 MW. En supposant que le moteur est électrique, estimer le coût de revient de la compression d'une tonne de GNL. Pour estimer ce coût, on considérera que le prix d'un kilowattheure électrique est de l'ordre de 15 centimes d'euros. Commenter sachant que l'obtention d'une tonne de GNL nécessite une dépense d'environ 250 kWh. Le pouvoir énergétique d'une tonne de méthane est d'environ 15 000 kWh.

### 25. Pompe à chaleur pour un bâtiment

Afin de chauffer un grand bâtiment, on utilise des pompes à chaleur identiques qui possèdent comme fluide frigorigène le fluide de code R407C. En fait, il s'agit d'un mélange de plusieurs fluides. Son graphique  $h - \ln P$  est fourni. Il est nécessaire de porter à 70 °C une réserve d'eau qui sera ensuite utilisée pour chauffer le bâtiment. Les pompes à chaleur fonctionnent avec l'air extérieur à la température de 7 °C. Le cycle suivi par le fluide dans chaque pompe à chaleur est le suivant :

- 1-2 : compression isentropique de vapeur surchauffée à 10 °C sous une pression de 6 bar jusqu'à une température de 90 °C
- 2-3 : refroidissement isobare et liquéfaction isobare totale au contact de la source chaude
- 3-4 : détente isenthalpique jusqu'à atteindre la pression de 6 bar
- 4-1 : vaporisation isobare et surchauffage isobare au contact de la source froide

1. Déterminer le  $COP_{rev}$  (coefficient de performance) d'une pompe à chaleur idéale de CARNOT fonctionnant entre deux thermostats à 7 °C et 70 °C.
2. Tracer le cycle thermodynamique sur le diagramme  $(p, h)$  du fluide R407C.
3. Évaluer le  $COP$  de chaque pompe à chaleur.
4. Pour chaque pompe installée, des mesures ont montré que le  $COP$  réel est de 4,0. Commenter.
5. L'eau chaude sort de la réserve à 70 °C et chauffe le bâtiment en parcourant les tuyaux et les radiateurs de l'installation. Elle doit fournir une puissance de  $P_{ch} = 900$  kW pour maintenir le bâtiment à la température de 19 °C. Sachant que la puissance absorbée par une pompe est  $P_m = 30$  kW. Combien faut-il de pompes à chaleur pour le chauffage du grand bâtiment ? Déterminer le débit massique qui passe dans chaque pompe à chaleur, on le suppose identique dans chacune d'elles. On prendra  $c_p = 4,18 \times 10^3$  J · kg<sup>-1</sup> · K<sup>-1</sup> comme capacité thermique pour l'eau.

## D. Statique des fluides

### 26. Récipients communicants

Sur le système de la figure 4, initialement au repos, on coupe l'extrémité supérieure du tube central. Que se passe-t-il ?

Proposition de réponses :

- a) L'eau jaillit du tube central.
- b) Le niveau d'eau baisse dans le tube central.
- c) Rien.
- d) On ne peut rien dire : il manque une donnée.

### 27. Entre deux eaux !

Un bloc flotte dans un mélange eau/huile selon le schéma suivant : 1/5 du bloc est immergé dans l'huile et les 4/5 restant dans l'eau. La masse volumique de l'eau est de 1 000 kg · m<sup>-3</sup> et celle de l'huile est de 900 kg · m<sup>-3</sup>. Quelle est la masse volumique de ce bloc ?

Proposition de réponses :

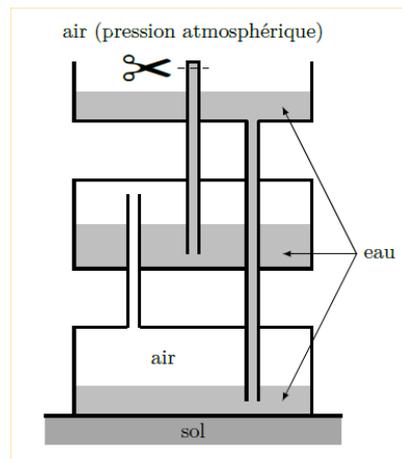


FIGURE 4 – Récipients communicants

- a)  $920 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$     b)  $980 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$     c)  $950 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$     d)  $995 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$

### 28. Pression au fond d'un récipient

On dispose d'un récipient cylindrique de section  $S = 50 \text{ cm}^2$  dans l'air, de pression  $P_{atm} = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ , qui contient un volume d'eau  $V_{eau} = 1 \text{ L}$  (de masse volumique  $\rho_{eau} = 1 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ) sur lequel repose un piston mobile verticalement de masse  $m = 2000 \text{ g}$ . On suppose que l'eau est une phase incompressible et indilatable.

1. Quelle est la pression  $P_{fond}$  dans le fond du récipient ?

Proposition de réponse :

- a)  $P_{fond} = 1,01 \times 10^5 \text{ Pa}$     b)  $P_{fond} = 1,03 \times 10^5 \text{ Pa}$   
 c)  $P_{fond} = 1,05 \times 10^5 \text{ Pa}$     d)  $P_{fond} = 1,07 \times 10^5 \text{ Pa}$

### 29. La fosse des Mariannes

La fosse des Mariannes est la plus profonde fosse océanique avec une profondeur  $h = 11034 \text{ m}$ . Dans un premier temps, on adopte un modèle où l'eau de mer est considérée incompressible de la masse volumique  $\rho_0 = 1,030 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , isotherme et au repos dans le champ de pesanteur uniforme  $g = 9,810 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . À la surface, la pression atmosphérique est  $P_0 = 1,013 \times 10^5 \text{ Pa}$ .

1. Que vaut la pression au fond de la fosse des Mariannes ?
2. On adopte maintenant un nouveau modèle où l'on tient compte de la compressibilité de l'eau de mer, caractérisée par son coefficient de compressibilité isotherme  $\chi_T = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial P} \right)_T$  que l'on suppose constant. Établir la loi donnant la masse volumique en fonction de la pression.
3. En déduire l'expression de la pression en fonction de la profondeur  $z$ .
4. Faire l'application numérique avec  $\chi_T = 5 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$ . Déterminer l'écart relatif entre ces deux estimations de la pression. Commenter.

### 30. Ballon sonde

La troposphère est la zone de l'atmosphère pour des altitudes comprises entre 0 et 11 km. On observe dans cette zone une diminution linéaire de la température  $T$  avec l'altitude  $z$  :  $T(z) = T_0(1 - az)$  où  $a$  est une constante positive. La pression atmosphérique au niveau de la mer vaut  $P_0 = 1,0 \text{ bar}$ . La masse molaire de l'air vaut  $M = 29 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

1. En considérant l'atmosphère au repos dans le champ de pesanteur uniforme  $g$ , déterminer l'expression de  $P(z)$ .
2. La température au niveau de la mer est de  $20^\circ\text{C}$ , et au sommet du Mont-Blanc à  $4807 \text{ m}$  de  $-20^\circ\text{C}$ . Que vaut  $a$  ? Que vaut la pression au sommet du Mont-Blanc ?

3. Un ballon sonde sphérique, de volume fixe  $V = 3,0 \text{ L}$ , est gonflé à l'hélium de masse molaire  $M_{\text{He}} = 4,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  à la pression de  $P_0 = 1 \text{ bar}$  et à la température  $T_0 = 293 \text{ K}$ . L'enveloppe du ballon est en aluminium et a une masse  $m = 2,0 \text{ g}$ . La pression au niveau du sol vaut  $P_0 = 1 \text{ bar}$  et la température vaut  $T_0 = 293 \text{ K}$ . La température varie en fonction de l'altitude selon la loi affine étudiée avant. On lâche le ballon. Jusqu'à quelle altitude s'élèvera-t-il ?

### 31. Étude d'un barrage

Dans cet exercice, les solides et les liquides sont plongés dans le champ de pesanteur uniforme  $g$ . Le référentiel terrestre est supposé galiléen. On se réfère au schéma de la figure 5. Le barrage est formé d'un solide indéformable, en forme de pentaèdre de base rectangulaire. Sa section est un triangle isocèle, de hauteur  $h$ , de demi-angle au sommet égal à  $\alpha$ . Sa masse volumique est  $\rho$ . Il est posé sur le sol horizontal et permet de retenir l'eau d'un lac dont la masse volumique est égale à  $\mu$ . On suppose que les seules forces qui interviennent sont liées à la pression des fluides (eau et air), au poids du barrage et aux forces de contact exercées par le sol. La longueur  $L$  du barrage est suffisamment grande pour que l'on puisse négliger les forces de liaison intervenant à ses extrémités. On appelle  $p_0$  la pression uniforme de l'air au voisinage du barrage.

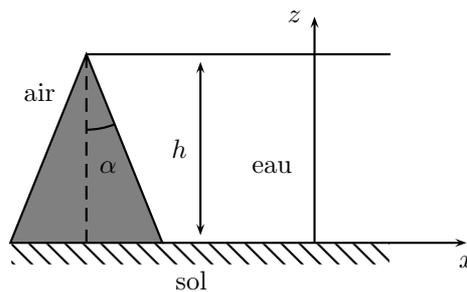


FIGURE 5 – Barrage

1. Exprimer la pression de l'eau en fonction de l'altitude  $z$ , de  $p_0$ ,  $\mu$ ,  $g$  et  $h$ .
2. Calculer la force exercée sur la face immergée. En déduire la force exercée sur la face émergée.

On admet que ni l'air, ni l'eau ne peuvent pénétrer sous le barrage. On considère que ce dernier ne tient alors en équilibre sur le sol que par l'action de la force de frottement solide. Dans ce cas la réaction du sol sur le barrage est représentée par : une composante normale  $N$  verticale ascendante et une composante tangentielle  $T$  horizontale qui s'oppose au glissement du barrage. L'équilibre statique n'est garanti que si  $|T| \leq f|N|$ , expression dans laquelle  $f$  est un coefficient constant, appelé coefficient de frottement statique du barrage sur le sol. On définit aussi l'angle de frottement  $\varphi$  tel que  $\tan \varphi = f$ . Cet angle représente l'inclinaison maximale de la réaction du sol par rapport à la verticale.

3. Déterminer les forces  $N$  et  $T$ .
4. En déduire la valeur minimale du coefficient de frottement, pour que le barrage reste en équilibre sur le sol, sans glisser.
5. Montrer que si  $\alpha + \varphi > \frac{\pi}{2}$ , alors le barrage reste en équilibre.
6. On suppose que  $h = 10 \text{ m}$ ,  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\rho = 2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . Calculer la valeur limite de  $f$ .
7. Que se passe-t-il si l'air peut s'infiltrer sous le barrage et exercer la pression  $p_0$  sur la base ? Quelle est la nouvelle valeur limite du coefficient de frottement  $f$  ?
8. Que se passe-t-il si l'eau peut pénétrer sous le barrage ?

### 32. Jouons avec un verre d'eau

On remplit complètement un verre cylindrique de rayon  $r = 3 \text{ cm}$  et de hauteur  $h = 10 \text{ cm}$  avec de l'eau. On pose sur ce verre un disque de plomb de rayon  $r' = 4 \text{ cm}$  et d'épaisseur  $e$ . En tenant le disque bien en place avec sa main, on retourne le verre la tête en bas. La densité du plomb est  $d = 11,3$ .

1. Calculer l'épaisseur critique  $e_c$  du disque de plomb pour laquelle le disque tombe (et le verre se vide...) lorsqu'on enlève la main.

### 33. Demi-sphère partiellement remplie

On introduit par l'orifice  $A$  un liquide de masse volumique  $\rho$  dans la demi-sphère de rayon  $a$ , de masse volumique  $\rho_1$  et d'épaisseur  $e \ll a$ . Le liquide ne fuit pas par le contact entre la demi-sphère et le plan horizontal sur lequel elle est posée (cf. figure 6).

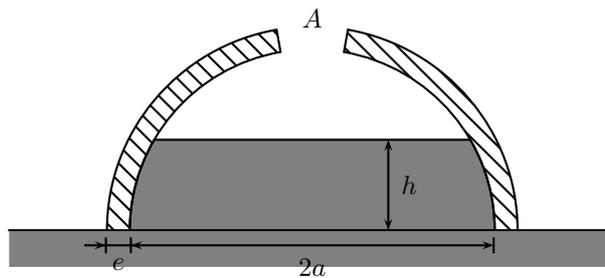


FIGURE 6 – Demi-sphère partiellement remplie

1. Déterminer la force exercée par l'eau sur la demi-sphère.
2. Déterminer la résultante des forces de pression exercées sur la demi-sphère.
3. À partir de quelle hauteur  $h_0$  de liquide la demi-sphère se soulève-t-elle ?

#### 34. Eau dans un entonnoir retourné

Un entonnoir conique transparent, de masse  $M$ , est constitué d'un cône de hauteur  $h = 10$  cm dont la base est un cercle de diamètre  $2R = 10$  cm. Il repose par sa base sur un plan horizontal. On le remplit d'eau par le tube mince sans masse qui le surmonte.

1. Quelle doit être la masse minimale de l'entonnoir pour que le niveau de l'eau versée atteigne la hauteur  $z_m = 8,0$  cm ?

#### 35. Film liquide sur une paroi

Une paroi est confondue avec le demi-espace  $z < 0$ , un gaz remplissant a priori le demi-espace  $z > 0$ . Le gaz est assimilé à un gaz parfait, mais la paroi exerce sur un atome situé en un point  $M$  de cote  $z > 0$ , une force de la forme  $\vec{f}_a = -\frac{4C}{z^4}\vec{e}_z$  où  $C$  est une constante positive. On néglige les forces de pesanteur.

1. Sachant que la pression loin de la paroi vaut  $p(z = \infty) = p_\infty$ , que la température est uniforme et qu'il y a équilibre du gaz, établir l'expression de la pression  $p$  en tout point du fluide en fonction de  $p_\infty$ ,  $z$ ,  $k_B$ ,  $T$  et  $C$ .
2. En déduire que la paroi se recouvre d'un film liquide et exprimer son épaisseur  $e$  en fonction de  $p_\infty$ ,  $k_B$ ,  $T$ ,  $C$  et de la pression de vapeur saturante  $p^{sat}(T)$  à la température  $T$ .
3. Dans une expérience réelle avec de l'hélium, on a  $p_\infty = 1,2$  Pa,  $T = 0,8$  K,  $p^{sat}(T) = 1,52$  Pa et  $C = 5,1 \times 10^{-51}$  N · m<sup>4</sup>. La densité moléculaire de l'hélium liquide vaut  $n = 2,7 \times 10^{28}$  m<sup>-3</sup>. Calculer l'épaisseur  $e$  du film liquide et la distance moyenne  $a$  entre deux atomes dans l'hélium liquide. Le film liquide est-il réellement présent ?
4. On chauffe la paroi. Montrer que l'évolution de la température au voisinage de la paroi permet de distinguer le cas où le film liquide est présent du cas où le film liquide est absent.

#### 36. Instabilité thermodynamique d'une étoile

Une étoile de masse  $M$  est une sphère de rayon  $R$  constituée d'hydrogène (assimilé à un gaz parfait); la température, supposée homogène, de ce gaz est donnée par la relation  $\frac{\mathcal{G}M}{R} = \kappa \frac{k_B T}{m}$  où  $m$  est la masse de l'atome d'hydrogène,  $\mathcal{G}$  la constante de la gravitation universelle et  $\kappa$  une certaine constante et  $k_B$  la constante de BOLTZMANN,  $k_B = R/\mathcal{N}_a$  où  $\mathcal{N}_a$  est le nombre d'AVOGADRO. Pour cette étoile, l'énergie potentielle et l'énergie cinétique sont liées par la relation :  $E_c = -E_p/2$ .

1. Quelle est l'unité de mesure de  $\kappa$  ?
2. Déterminer la variation de température  $\Delta T$  associée à un effondrement de l'étoile caractérisé par une variation de rayon  $\Delta R$ .
3. Exprimer la capacité thermique à volume constant de l'étoile. Commenter.
4. On considère un système isolé formé de deux étoiles dont le rayon est constant. On note  $U_i$ ,  $S_i$  et  $T_i$  respectivement les énergies internes, entropies et températures de chaque élément de ce système isolé ( $i = 1, 2$ ). Exprimer les relations imposées par les deux principes à  $dU_1$ ,  $dU_2$ ,  $dS_1$  et  $dS_2$ .
5. En l'absence de toute variable autre que la température  $T$ , exprimer ces relations en fonction de  $dT_1$  et  $dT_2$ .

6. Montrer que, à l'équilibre thermodynamique,  $T_1 = T_2$  mais que ce système est thermodynamiquement instable.

### 37. Débordement d'un liquide

On considère un récipient de forme cylindrique de rayon  $R$  et de hauteur  $H$  tournant autour de son axe de symétrie  $Oz$  (qui est aussi la verticale) à la vitesse angulaire  $\omega$ . Ce récipient contient de l'eau de masse volumique  $\mu$ . Lorsque  $\omega = 0$ , la hauteur d'eau dans le récipient est  $h < H$ . On note  $g$  la valeur du champ de pesanteur. La pression atmosphérique est notée  $p^\circ$ . On suppose qu'un régime permanent s'est établi.

1. Établir l'expression de la pression au sein du fluide en un point  $M$  de coordonnées  $(r, z)$ .
2. Quelle est l'équation de la surface libre de l'eau en contact avec l'air ?
3. Déterminer la condition sur la vitesse de rotation  $\omega$  pour que le fluide soit toujours présent au centre du récipient. Déterminer la condition sur la vitesse de rotation  $\omega$  pour que le fluide déborde.

### 38. La sève dans un arbre

On assimile la sève de l'eau liquide considérée comme un fluide incompressible. Dans un premier temps, à la question 1., on considère uniquement un problème de statique des fluides. Dans les questions suivantes, on se penche plus particulièrement sur l'écoulement dans la sève dans les canaux prévus à cet effet, canaux appelés xylèmes. La sève s'écoule dans les xylèmes qui présentent un rayon moyen  $R = 100 \mu\text{m}$  à des vitesses de l'ordre de un mètre par heure. Pour l'écoulement de la sève, on adopte le modèle dit de POISEUILLE qui donne l'expression de la vitesse d'écoulement à l'intérieur du tube cylindrique constituant le xylème :

$$\vec{v}(r) = -\frac{R^2}{4\eta} \frac{dp}{dz} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \vec{e}_z$$

où  $\eta = 10^{-3} \text{ SI}$  est la viscosité dynamique de la sève qui traduit les dissipations d'énergie par frottements dans le fluide et  $\frac{dp}{dz}$  le gradient de pression assurant l'écoulement que nous considérerons comme indépendant de  $z$ . Ce gradient de pression n'est pas à confondre avec le gradient hydrostatique. Il est encore appelé *pertes de charge*. Voir le schéma de la figure 7.

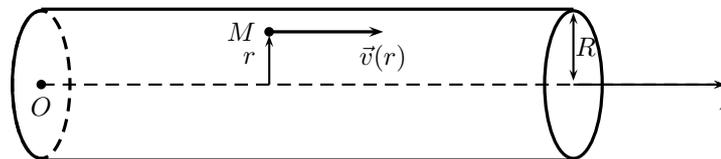


FIGURE 7 – Écoulement de la sève dans un xylème

1. Rappeler la valeur de la masse volumique de l'eau liquide. Déterminer la valeur de la pression nécessaire pour maintenir la sève au sommet d'un arbre d'une hauteur de 30 m. Commenter la valeur obtenue.
2. Déterminer l'unité de la viscosité dynamique  $\eta$ .
3. Expliquer le signe  $-$  présent dans la formule de POISEUILLE donnant l'expression de  $\vec{v}(r)$ . Représenter le profil des vitesses et en faire un commentaire physique.
4. Déterminer l'expression du débit volumique  $\mathcal{D}_{vol}$  de la sève dans les xylèmes.
5. On considère que la vitesse moyenne de l'écoulement est  $v_{moy} = 1 \text{ m} \cdot \text{h}^{-1}$ , la vitesse moyenne est encore appelée *vitesse débitante*. Déterminer la valeur numérique du débit volumique  $\mathcal{D}_{vol}$ . En déduire la perte de charge, la comparer à la variation de pression hydrostatique entre le bas et le haut de l'arbre.

### 39. La Mer de Glace

Du fait de leur plasticité, les glaciers s'écoulent lentement sous l'effet de la gravité avec une vitesse d'écoulement très variable selon la pente, la topographie du lit rocheux ou l'épaisseur de la glace. La vitesse moyenne est de l'ordre de quelques centimètres à quelques dizaines de centimètres par jour, le record revenant au glacier Kangerdlugssuaq dans le Groënland où la vitesse moyenne atteinte est de 14 kilomètres par an. Par ailleurs, les glaciers ne sont pas des masses compactes de glace. Ils sont traversés par un réseau hydrographique de canaux qui collectent et véhiculent l'eau liquide formée en surface. Cette partie propose d'étudier, sur la base du modèle de Poiseuille, l'écoulement d'un glacier sous l'effet de la gravité et d'interpréter certains aspects du réseau hydrographique interne au glacier grâce au modèle de Roethlisberger.

On considère l'écoulement stationnaire d'un fluide visqueux newtonien de viscosité dynamique  $\eta$ , incompressible de masse volumique  $\rho$ , dans une conduite cylindrique horizontale de rayon  $R$  et d'axe de symétrie de révolution  $Ox$ . Il règne dans la conduite un gradient horizontal de pression noté  $\frac{dp}{dx}$ , supposé indépendant de  $x$ . En un point  $M$  de l'écoulement, la vitesse de l'écoulement du fluide s'écrit  $\vec{v}(M) = v(r)\vec{e}_x$  où  $r$  est la distance entre le point  $M$  et l'axe  $Ox$ . Voir la figure 8. On admet que le fluide adhère aux parois de la conduite, ce qui se traduit par  $v(r = R) = 0$ . On peut montrer dans ce contexte que la vitesse dans une telle conduite suit la loi de POISEUILLE :

$$\vec{v}(M) = \frac{r^2 - R^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} \vec{e}_x$$

La force de viscosité  $\vec{f}_v$  que le fluide situé à l'extérieur du cylindre de rayon  $r$ , de longueur  $L$  et d'axe  $Ox$  exerce sur le fluide contenu dans ce cylindre s'écrit :  $\vec{f}_v = 2\pi r L \eta \frac{dv}{dr} \vec{e}_x$ .

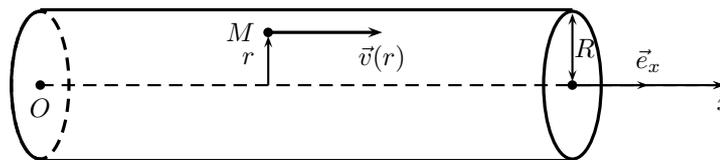


FIGURE 8 – Écoulement de POISEUILLE

1. Calculer l'expression du débit volumique  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $\eta$  et  $\frac{dp}{dx}$ .
2. En déduire la dimension de la viscosité dynamique  $\eta$  en fonction des dimensions fondamentales suivantes : longueur, masse et temps.

Les glaciers du massif du Mont Blanc s'étendent en France, Suisse et Italie ; ils couvrent quelque 150 km<sup>2</sup> (dont 110 km<sup>2</sup> en France). Le plus grand glacier des Alpes françaises est la Mer de glace : 12 km de longueur et 40 km<sup>2</sup> de superficie. La Mer de glace naît sur le plateau du Géant (de 3 600 m à 2 800 m d'altitude) et descend jusqu'à une altitude de 1 500 m. Sa pente moyenne est voisine de 11%. La répartition des vitesses en surface et dans une section transversale du Glacier du Tacul (tronçon de la Mer de glace à l'aplomb du refuge de l'Envers des Aiguilles) est représentée sur la figure 9.

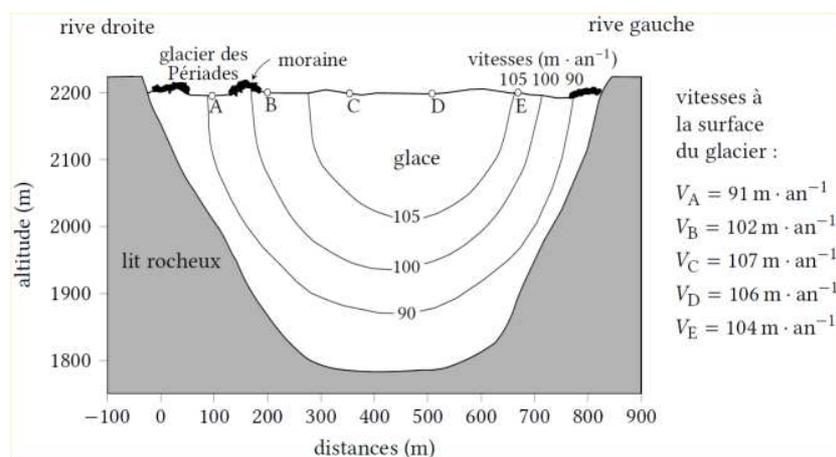


FIGURE 9 – Répartition des vitesses dans une section transversale du Glacier du Tacul

3. On choisit de modéliser l'écoulement de la Mer de glace par l'écoulement de POISEUILLE stationnaire d'un fluide visqueux newtonien incompressible s'écoulant dans la moitié inférieure d'une conduite cylindrique sous le seul effet de la gravité, ce qui impose de remplacer dans l'expression de la vitesse d'écoulement  $\frac{dp}{dx}$  par  $-\rho_g g \sin \alpha$  où  $\rho_g$  est la masse volumique de la glace,  $g$  l'accélération de la pesanteur et  $\alpha$  l'angle qui mesure la pente moyenne de la Mer de glace. Justifier ce choix. À partir de l'analyse de la figure 9, proposer au moins un argument en faveur et au moins un argument en défaveur de ce choix de modélisation de l'écoulement du glacier par un écoulement de POISEUILLE.

4. En utilisant les données quantitatives disponibles, proposer une estimation de l'ordre de grandeur de la viscosité dynamique de la glace. Comparer l'ordre de grandeur obtenu avec la valeur estimée usuelle de la viscosité de la glace de l'ordre de  $10^{13}$  Pa · s. Commenter.

L'eau liquide provenant de la fonte glaciaire et des précipitations est collectée en surface du glacier et pénètre en son sein. L'eau émerge au terminus du glacier par un petit nombre de conduits incisés à sa base. Il est tentant de supposer que ces conduits se prolongent dans la profondeur du glacier, le long de sa base. Un conduit isolé rempli d'eau à l'intérieur du glacier a tendance à se refermer sous l'effet de la pression qu'exerce la glace environnante, à moins que l'écoulement de l'eau dans le conduit ne dissipe suffisamment d'énergie pour faire fondre les parois du conduit et le maintenir ainsi ouvert. Röthlisberger a présenté en 1972 la première analyse hydraulique et thermodynamique de l'écoulement stationnaire dans un canal de drainage, communément appelé canal de Röthlisberger. Röthlisberger fait l'hypothèse que la puissance dissipée par viscosité dans l'écoulement permet non seulement d'éroder le canal par fusion des parois de glace mais aussi de maintenir en tout point du canal l'équilibre thermodynamique entre la glace et l'eau liquide.

5. On considère le système constitué de la masse de glace de la paroi du canal comprise entre les rayons  $R$  et  $R + dR$  et entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$ . En raison de la dissipation d'énergie par frottement visqueux dans l'écoulement, cette masse fond pendant la durée  $dt$ . Exprimer la variation d'enthalpie  $dH_g$  du système qui résulte de la fusion de la masse de glace considérée entre les instants  $t$  et  $t + dt$  en fonction de  $R$ ,  $dR$ ,  $dx$ ,  $\ell_f$  (enthalpie de fusion de la glace) et  $\rho_g$ .
6. Identifier dans un diagramme pression-température les domaines de stabilité des phases liquide, gazeuse et solide de l'eau, et les délimiter en représentant leurs frontières. Placer les points particuliers et les définir. Placer un point  $E$  représentatif d'un équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et la glace.
7. On considère le système fermé constitué, à l'instant  $t$ , de l'eau qui se situe dans le volume du canal compris entre les abscisses  $x$  et  $x + dx$  et de l'eau qui entre dans ce volume pendant la durée  $dt$ . Montrer, en explicitant le raisonnement, que la variation d'enthalpie  $dH_l$  de ce système fermé, entre les instants  $t$  et  $t + dt$  s'écrit :

$$dH_l = \rho_l Q c_l \frac{dT}{dx} dx dt$$

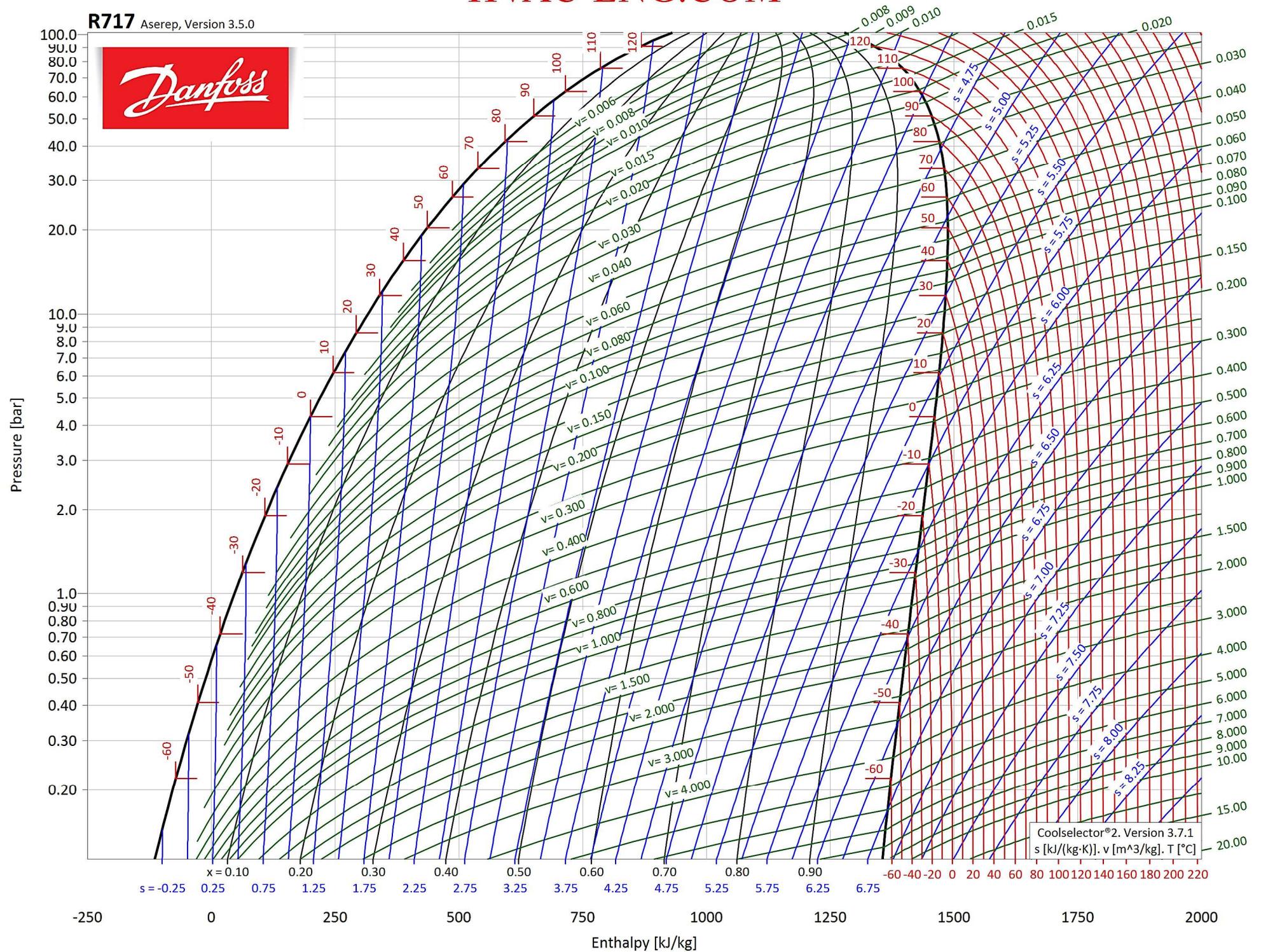
L'hypothèse d'équilibre thermodynamique entre l'eau liquide et la glace impose des variations liées de la température et de la pression de l'eau liquide en écoulement dans le canal. Compte tenu de cette hypothèse, on admet que la relation précédente prend la forme suivante :

$$dH_l = Q c_l \frac{T(x)}{\ell_f} \frac{\rho_g - \rho_l}{\rho_g} \frac{dp}{dx} dx dt$$

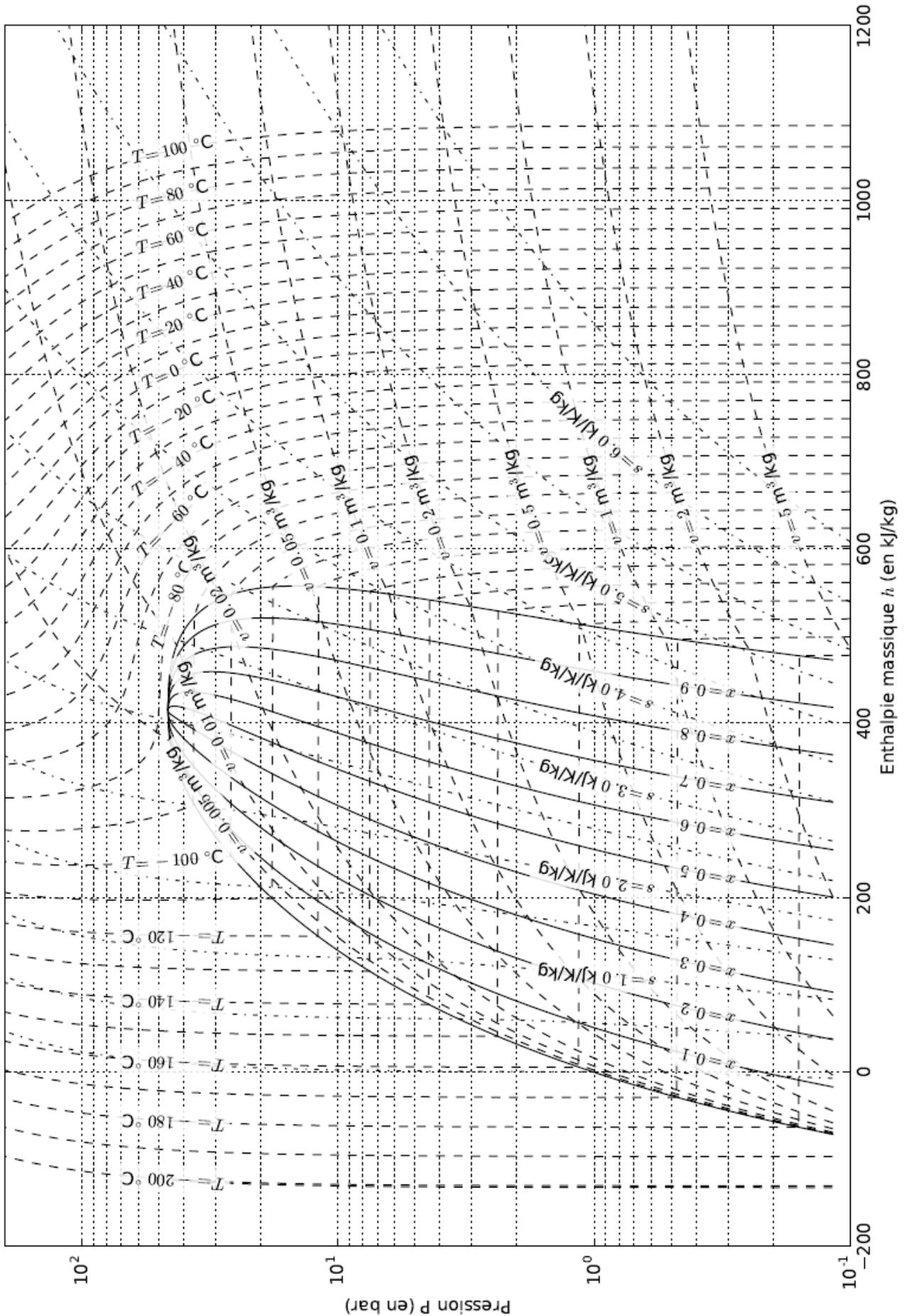
8. Röthlisberger estime dans son modèle que  $dH_l = \frac{1}{2} dH_g$ . En déduire l'expression de la vitesse d'érosion  $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{érosion}}$  du canal en fonction de  $c_l$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $\ell_f$ ,  $T(x)$ ,  $\rho_l$ ,  $\rho_g$  et  $\frac{dp}{dx}$ .
9. Contrôler le signe de  $\left(\frac{dR}{dt}\right)_{\text{érosion}}$ .



R717 Aserep, Version 3.5.0



Annexe 4 : Diagramme pression – enthalpie massique du corps pur méthane



Question 37

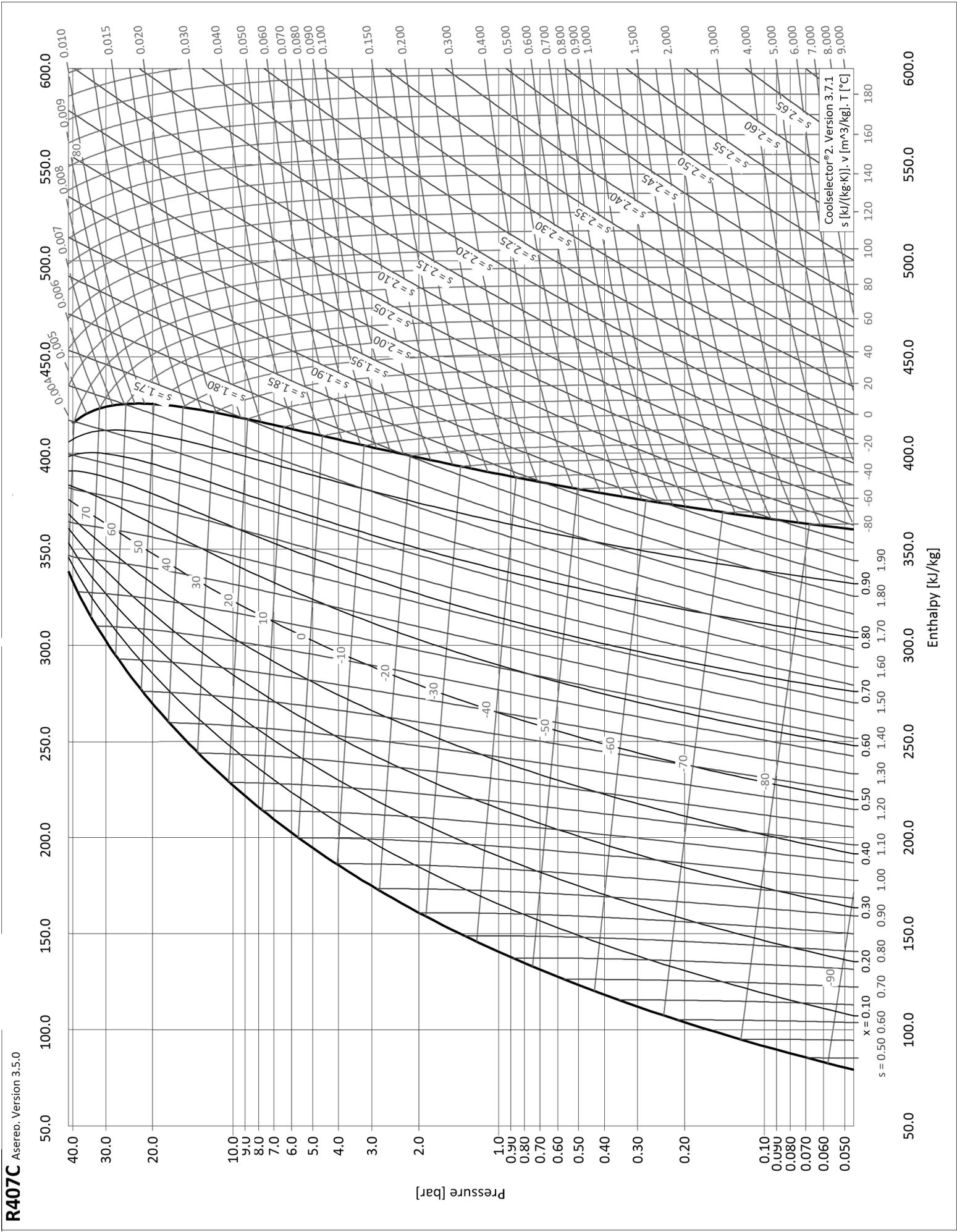


Figure C Diagramme enthalpique du fluide R407c