

# Exercices : 11 - Principes de la Thermodynamique

— Solutions —

## A. Application des principes

### 1. Comparaison réversibilité - irréversibilité

Réponses :  $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} = 2 \text{ bar}$ ,  $V_0 = 25 \text{ L}$ ,  $V_1 = \frac{T_1}{2T_0} V_0$ ,  $T_1 = T_0 \frac{2p_1 V_0 + 5RT_0}{p_1 V_0 + 5RT_0}$ ,  $T_1 = \frac{9}{7} T_0 = 386 \text{ K}$ ,  $V_1 = 16 \text{ L}$ ,  
 $p_2 = p_0$ ,  $V_2 = \frac{2T_2}{T_1} V_1$ ,  $T_2 = T_1 \frac{2p_0 V_1 + 5RT_1}{4p_0 V_1 + 5RT_1} = 331 \text{ K}$ , on ne revient pas à l'état d'équilibre initial, irréversible,  
 $\Delta S_{01} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_1}{T_0} + R \ln \frac{V_1}{V_0} = 1,53 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ ,  $\Delta S_{01} = S_{cr} > 0$  car  $S_e = 0$  (calorifugé) irréversible,  $\gamma = \frac{7}{5}$ ,  
 $p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^\gamma = 1,07 \text{ bar}$ ,  $T_2 = 322 \text{ K}$ ,  $T_3 = T_0 = 300 \text{ K}$ ,  $p_3 = p_0 = 1 \text{ bar}$ ,  $\Delta S_{12} = 0$ ,  $\Delta S_{13} = \Delta S_{23} = \frac{5}{2} R \ln \frac{T_0}{T_2} =$   
 $-1,47 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ , sur le cycle complet  $\Delta S = \Delta S_{01} + \Delta S_{13} > 0$  causes d'irréversibilités.

### 2. Transformations polytropiques

Réponses : Premier principe  $[\gamma(k+1) - 1] \frac{dV}{V} + k \frac{dp}{p} = 0$ ,  $n = \frac{\gamma(k+1)-1}{k}$ , si  $k \rightarrow \infty$   $pV^\gamma = \text{cte}$  adiabatique, si  
 $k \rightarrow 0$   $dV = 0$  isochore;  $T(z) = T_0 - \frac{Mg}{R} \frac{n-1}{n} z$ ;  $z_{atm} = 48 \text{ km}$ .

### 3. Travail de séparation

Réponses : Admettons que l'énoncé suppose les gaz sans énergie cinétique macroscopique (ou sans variation de celle-ci). Le premier principe appliqué à l'ensemble des deux gaz lors de la transformation de séparation s'écrit  $\Delta(U_A + U_B) = W + Q$  en exploitant l'extensivité de l'énergie interne ( $W$  représente le travail total reçu, actions conservatives comprises). Or, les gaz sont parfaits et les températures initiale et finale sont identiques ( $T_0$ ) donc, par première loi de JOULE, il vient  $W + Q = 0$ . Appliquons ensuite le second principe au même système et pour la même transformation isotherme ( $T_0$ ) :  $\Delta(S_A + S_B) = \frac{Q}{T_0} + S_c$  en exploitant l'extensivité de l'entropie et en posant l'entropie créée  $S_c \geq 0$ . En combinant les deux principes, il vient  $W \geq -T_0 \Delta(S_A + S_B)$  le cas de travail minimal  $W_{min}$  correspondant à une transformation réversible. Ainsi,  $W_{min} = -T_0 \Delta(S_A + S_B)$ . Il ne reste qu'à expliciter la variation d'entropie de chaque gaz parfait. L'entropie est une fonction d'état alors on peut raisonner sur un chemin réversible. Pour le gaz  $A$ , passant de la pression partielle  $x_A P_0$  à la pression  $P_0$  et dont la température reste  $T_0$ , l'identité thermodynamique de l'enthalpie  $dH_A = T_0 dS_A + V dP_A = 0$  (deuxième loi de JOULE) permet d'isoler  $dS_A = -\frac{V}{T_0} dP_A = -n_A R \frac{dP_A}{P_A}$  en utilisant l'équation d'état du gaz parfait. On intègre, d'où  $\Delta S_A = -n_A R \ln \frac{P_0}{x_A P_0} = n_A R \ln x_A$   $x_A$  est la fraction molaire initiale du gaz  $A$  dans le mélange. De même, on trouve pour  $B$   $\Delta S_B = n_B R \ln x_B$ . Finalement,  $W_{min} = -R T_0 (n_A \ln x_A + n_B \ln x_B)$ . Tout d'abord, explicitons de façon générale  $n_A$  et  $n_B$  en supposant connus la masse totale  $m$ , les fractions molaires  $x_A$  et  $x_B$  et les masses molaires  $M_A$  et  $M_B$ . Puisque  $m = m_A + m_B = n_A M_A + n_B M_B = (x_A M_A + x_B M_B) n_{tot}$  on a  $n_{tot} = \frac{m}{x_A M_A + x_B M_B}$  donc  $n_A = x_A n_{tot} = \frac{x_A m}{x_A M_A + x_B M_B}$  et  $n_B = x_B n_{tot} = \frac{x_B m}{x_A M_A + x_B M_B}$ . On se sert de ces expressions, avec les unités du système international, dans la suite. Pour l'air,  $x_{O_2} = 0,21$  et  $x_{N_2} = 0,79$ . De plus,  $M_{O_2} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Alors,  $m = 1,0 \text{ kg}$  d'air contient  $n_{O_2} = 7,3 \text{ mol}$  et  $n_{N_2} = 27 \text{ mol}$  et  $W_{min} = 44 \text{ kJ}$ . Pour le mélange d'hexafluorure d'uranium avec les deux isotopes d'uranium et une masse  $m = 1,0 \text{ kg}$ , on a  $x_A = 0,01$ ,  $M_A = 235 + 6 \times 19 = 349 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $x_B = 0,99$ ,  $M_B = (238 + 6 \times 19) = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ,  $n_A = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$ ,  $n_B = 2,8 \text{ mol}$  et  $W_{min} = 0,40 \text{ kJ}$ . Considérons une eau de mer typique à  $30 \text{ g}$  de sel pour  $1,0 \text{ kg}$  d'eau de mer (mais on peut trouver plus salé...). On note  $A$  l'eau  $H_2O$  et  $B$  le sel (essentiellement le chlorure de sodium pour simplifier). Les masses molaires sont  $M_A = (2 \times 1 + 16) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  et  $M_B = (35,5 + 23) = 58,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ . Alors,  $n_A = \frac{m - m_B}{M_A} = 54 \text{ mol}$  et  $n_B = \frac{m_B}{M_B} = 0,51 \text{ mol}$  puis  $x_A = 0,99$  et  $x_B = 9,4 \cdot 10^{-3}$ . Finalement,  $W_{min} = 7,2 \text{ kJ}$ . La séparation de l'air en dioxygène et diazote est une méthode de production de  $O_2$  et  $N_2$  purs. On procède en pratique par séparation cryogénique de l'air (liquéfaction puis distillation fractionnée). La séparation du mélange d'hexafluorure d'uranium permet de réaliser la séparation isotopique de l'uranium : seul l'isotope 235 de l'uranium est intéressant en raison de sa radioactivité naturelle. En pratique, on enrichit l'uranium en isotope 235 en procédant par diffusion gazeuse de  $UF_6$  par des étages avec des trous de diffusion (l'isotope plus léger diffuse plus vite); on peut aussi travailler par ultracentrifugation. La séparation de l'eau de mer permet non seulement de récupérer du sel mais aussi de l'eau douce! On peut procéder par distillation (évaporation de l'eau qui laisse le sel cristallisé) ou par osmose inverse (système de filtrage très fin ne laissant passer que les molécules d'eau).

### 4. Chauffe-eau au gaz

Réponses :  $\eta = \frac{mc(T_f - T_0)}{V_{gaz} PE} = 79\%$ ,  $mc \frac{dT}{dt} + \alpha T = \alpha T_0 + \frac{V_{gaz} PE}{\Delta t}$ ,  $T_f = T_0 + \frac{V_{gaz} PE}{\alpha \Delta t} (1 - \exp(-\frac{\alpha \Delta t}{mc}))$ , résolution numérique  $\alpha \simeq 70 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### 5. Compresseur refroidi

Réponses :  $Dc_p(T_S - T_E) = P_{comp} + P_{th}$ ,  $D\Delta s = \dot{S}_{transf} + \dot{S}_{cr} = \frac{P_{th}}{T_0}$ ,  $\Delta s = c_p \ln \frac{T_S}{T_E} - r \ln \frac{p_S}{p_E}$ ,  $P_{th} = -26 \text{ kW}$ ,  
 $P_{comp} = 16 \text{ kW}$ .

**6. Turbine à vapeur**

Réponses : la turbine fonctionne en régime permanent, on peut écrire la loi des nœuds en ce qui concerne le débit massique, on a donc  $\mathcal{D}_{m1} = \mathcal{D}_{me} - \mathcal{D}_{m2} = 6, 4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Il faut considérer la turbine comme étant en fait la somme de deux opérations distinctes de détente de la vapeur dont les puissances vont s'additionner. Dans chaque cas, on applique le premier principe industriel :  $\mathcal{D}_{m1}(\Delta h + \Delta e_c) = P_1$  puisque l'on va négliger les pertes thermiques ainsi que les variations d'énergie potentielle de pesanteur. On a donc  $\mathcal{D}_{m1}(h_1 - h_e + \frac{v_1^2 - v_e^2}{2}) = P_1$ . Nous possédons toutes les valeurs numériques pour réaliser le calcul, on trouve  $P_1 = -2, 4 \text{ MW}$ . On fait exactement la même chose pour le second flux de vapeur :  $P_2 = \mathcal{D}_{m2}(h_2 - h_e + \frac{v_2^2 - v_e^2}{2})$ . On trouve  $P_2 = -27, 6 \text{ MW}$ . La puissance totale est bien négative comme il se doit avec une vapeur qui fournit du travail à l'extérieur constitué par l'alternateur. On a donc au total  $P_m = -30, 0 \text{ MW}$ . On constate que c'est surtout la partie du flux de valeur d'eau qui effectue la plus forte détente qui contribue le plus à la production de puissance mécanique utile.

**7. Optimisation d'une compression**

Réponses :  $T_2 = T_1 a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 753 \text{ K}$ ,  $P_{comp} = \mathcal{D}c_{p,air}(T_2 - T_1) = \mathcal{D}_m c_{p,air} T_1 (a^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1)$  avec  $c_{p,air} = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{R}{M_{air}}$ , on trouve  $P_{comp} = 453 \text{ kW}$ . L'installation à un compresseur est moins coûteuse en investissement mais plus coûteuse en fonctionnement que l'installation à deux étages de compression. Sur la première étape, on a  $P'_{comp,a} = \mathcal{D}_m c_{p,air} T_1 (r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1)$  et sur la seconde  $P'_{comp,b} = \mathcal{D}_m c_{p,air} T_1 ((\frac{a}{r})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1)$  au total  $P'_{comp} = \mathcal{D}_m c_{p,air} T_1 (r^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + (\frac{a}{r})^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2)$ . On calcule  $\frac{dP'_{comp}}{dr} = 0$ , on trouve  $r = \sqrt{a} = 5$ . On trouve  $P'_{comp} = 350 \text{ kW}$  ce qui est nettement inférieur au cas précédent. On écrit  $\mathcal{D}_m c_{p,air}(T_1 - T_2) + \mathcal{D}_{eau} c_{eau}(T_{max} - T_0) = 0$  où  $T_2' = 475 \text{ K}$  est la température à la sortie du premier compresseur. On trouve  $\mathcal{D}_{eau} = 4, 2 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**8. Détente dans une tuyère**

Réponses :  $v = 643 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**9. Chauffage d'un solide**

Réponses :  $\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1} = S_{transf} + S_{cr}$ ,  $S_{transf} = C(1 - \frac{T_1}{T_i}) + C(1 - \frac{T_i}{T_2})$ ,  $S_{cr} = C[\ln \frac{T_2}{T_1} + (\frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_2}) - 2]$ , minimale si  $T_i = \sqrt{T_1 T_2}$ .

**10. Détente dans le vide**

Réponses :  $V_0$  volume des moles d'air qui rentrent dans le récipient  $p_0 V_0 = n_0 R T_0$ , une fois entrées :  $p_0 V = n_0 R T_1$ ,  $\Delta U = \frac{n_0 R}{\gamma-1}(T_1 - T_0) = p_0 V_0$ ,  $T_1 = \gamma T_0$ ,  $\Delta S = \frac{n_0 R}{\gamma-1} \ln \frac{T_1}{T_0} + n_0 R \ln \frac{V}{V_0} = \frac{n_0 R \gamma}{\gamma-1} \ln \gamma$ ,  $\Delta S = S_{cr} = 0, 28 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  positive, irréversible; isochore  $Q = \Delta U = \frac{n_0 R}{\gamma-1}(T_0 - T_1) = -n_0 R T_0$ ,  $\Delta S = \frac{n_0 R}{\gamma-1} \ln \frac{1}{\gamma} = S_{transf} + S_{cr}$ ,  $S_{transf} = -n_0 R$ ,  $S_{cr} = n_0 R [1 - \frac{1}{\gamma-1} \ln \gamma] = 0, 04 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$  positive, irréversible.

**11. Chauffages d'un gaz**

Réponses : Soit le gaz du compartiment de droite (sans la résistance). La progression de la transformation est suffisamment lente pour pouvoir supposer l'équilibre mécanique du gaz à tout instant. De plus, l'évolution de ce système fermé est adiabatique et le rapport  $\gamma$  est supposé constant ( $\gamma = 7/5 = 1, 4$  pour un gaz parfait diatomique). On peut donc appliquer la loi de LAPLACE; en notant  $V_2$  le volume final du gaz,  $P V_2^\gamma = P_0 V_0^\gamma$  avec  $P = 2 P_0$  avec  $V_0 = \frac{R T_0}{P_0}$ . Ainsi,  $V_2 = \frac{R T_0}{P_0} (\frac{P_0}{P})^{1/\gamma}$ . On en déduit la température  $T_2$  de ce gaz :  $T_2 = \frac{P V_2}{R} = \frac{P}{P_0} T_0 (\frac{P_0}{P})^{1/\gamma}$  soit  $T_2 = T_0 (\frac{P}{P_0})^{1-1/\gamma}$ . Il ne reste qu'à préciser l'état du gaz du compartiment avec résistance dont le volume final est  $V_1 = 2 V_0 - V_2$  et la température est  $T_1 = \frac{P V_1}{R}$ , soit  $V_1 = \frac{R T_0}{P_0} [2 - (\frac{P_0}{P})^{1/\gamma}]$  et  $T_1 = T_0 \frac{P}{P_0} [2 - (\frac{P_0}{P})^{1/\gamma}]$ . Les applications numériques donnent  $V_2 = 14, 7 \text{ L}$ ,  $T_2 = 353 \text{ K}$ ,  $V_1 = 33, 5 \text{ L}$  et  $T_1 = 806 \text{ K}$ . Pour ne pas avoir à faire intervenir immédiatement le travail  $W$ , on peut appliquer le premier principe à l'ensemble des deux gaz, système qui ne reçoit de l'énergie que de la résistance chauffante (transfert thermique  $Q$ ). En continuant d'indicer par 1 le compartiment avec résistance, et par 2 celui sans, on a donc  $\Delta U_{syst} = \Delta U_1 + \Delta U_2 = Q$ . On utilise la première loi de JOULE d'où  $Q = C_v (T_1 - T_0) + C_v (T_2 - T_0)$ . Or,  $P V_1 = R T_1$ ,  $P V_2 = R T_2$  et  $P_0 V_0 = R T_0$ . De plus,  $C_v = \frac{R}{\gamma-1}$  et  $V_1 + V_2 = 2 V_0$ . En combinant le tout, on obtient  $Q = \frac{2 R T_0}{\gamma-1} (\frac{P}{P_0} - 1)$ . Il reste à calculer le travail  $W$  reçu par le gaz du compartiment de droite (sans la résistance). On applique le premier principe à ce seul gaz parfait et on utilise la première loi de JOULE :  $\Delta U_2 = W$  soit  $W = \frac{R}{\gamma-1} (T_2 - T_0)$  d'où  $W = \frac{R T_0}{\gamma-1} [(\frac{P}{P_0})^{1-1/\gamma} - 1]$ . Les applications numériques pour  $P = 2 P_0$  donnent  $Q = 12, 0 \text{ kJ}$  et  $W = 1, 32 \text{ J}$ . On note  $x$  le déplacement du piston vers la droite depuis sa position initiale (au départ, le ressort a sa longueur au repos puisque le piston est soumis à la même pression  $P_0$  de part et d'autre). Le chauffage du gaz est suffisamment progressif pour supposer qu'il y a équilibre mécanique à tout instant, ce qui se traduit pour le piston par le bilan de forces nul suivant :  $P S - P_0 S - k x = 0$ . Or, le volume du gaz est devenu  $V = V_0 + S x$  donc on en tire  $P = P_0 + \frac{k}{S} \frac{V - V_0}{S}$ . La pression varie selon une fonction affine de  $V$ , ce qui se traduit

par un trajet rectiligne dans le diagramme  $P(V)$ . La valeur de la raideur  $k$  du ressort fixe la pente de la droite représentative de la transformation (plus la raideur est élevée, plus on se rapproche d'un chauffage à volume constant). À l'état final,  $P = 2P_0$  soit  $x = x_F = \frac{S}{k}(P - P_0) = \frac{S}{k}P_0$ . On en déduit le volume final  $V_F = V_0 + \frac{S^2 P_0}{k}$ . La température finale s'obtient par la loi des gaz parfaits. Puisque  $2P_0 V_F = RT_F$  et  $P_0 V_0 = RT_0$ , on déduit  $T_F = 2T_0 + \frac{2S^2 P_0^2}{Rk}$ . Numériquement, on tire  $x_F = 0,2\text{ m}$ ,  $V_F = 34,1\text{ L}$  et  $T_F = 821\text{ K}$ . Toujours grâce à l'équilibre mécanique à chaque instant, on peut dire que le travail reçu par le gaz au cours du chauffage est  $W_1 = -\int_{V_0}^{V_F} P dV = -\int_0^{x_F} (P_0 + \frac{k}{S}x) S dx$  soit  $W_1 = -P_0 S x_F - k \frac{x_F^2}{2}$ . Le premier terme correspond au travail dépensé contre l'air atmosphérique et le second au travail de compression du ressort. En remplaçant  $x_F$  par son expression, on tire  $W_1 = -\frac{3}{2} \frac{S^2 P_0^2}{k}$  et l'énergie absorbée par le ressort seul est  $W_{ressort} = \frac{S^2 P_0^2}{2k}$ . Notez que l'on aurait pu trouver ce résultat directement à partir de l'énergie potentielle finale  $\frac{1}{2}k x_F^2$  du ressort (car elle est nulle au départ). Enfin, le premier principe appliqué au gaz donne  $Q_1 : Q_1 = \Delta U_{gaz} - W_1 = \frac{1}{\gamma-1}(P V - P_0 V_0) - W_1$ . Puis,  $Q_1 = \frac{R T_0}{\gamma-1} + \frac{S^2 P_0^2}{k} \left( \frac{2}{\gamma-1} + \frac{3}{2} \right)$ . Numériquement,  $W_{ressort} = 500\text{ J}$  et  $Q_1 = 12,5\text{ kJ}$ .

## 12. Transformation monobare et monotherme

Réponses : Plutôt que de simplement vérifier que la fonction  $G^*$  proposée est bien décroissante pour une évolution spontanée du système, construisons-la. La transformation du gaz est monotherme et monobare et on écrit pour celle-ci les premier et second principes :  $dU = \delta W + \delta Q$  et  $dS = \frac{\delta Q}{T_0} + \delta S_c$ . Seul le travail des forces pressantes ( $-P_0 dV$  ici en monobare) intervient donc la première équation s'écrit aussi  $dU = -P_0 dV + \delta Q$ . On élimine  $\delta Q$  entre les deux formules précédentes, d'où  $dS = \frac{dU + P_0 dV}{T_0} + \delta S_c$ . On isole ensuite le produit  $T_0 \delta S_c$  dont on sait qu'il est positif ou nul par énoncé du second principe (le cas d'égalité à zéro étant celui de la réversibilité) :  $T_0 \delta S_c = T_0 dS - dU - P_0 dV \geq 0$ . Puisque  $T_0$  et  $P_0$  sont constants, il vient avec  $G^* = U - T_0 S + P_0 V$ ,  $T_0 \delta S_c = -dG^* \geq 0$ . De la sorte, on a montré que  $G^*$  est bien un potentiel thermodynamique du système pour l'évolution monobare monotherme considérée :  $G^*$  décroît strictement en évolution spontanée pour atteindre une valeur minimale à l'équilibre. Pour un gaz parfait, on sait que (première loi de JOULE) :  $U = C_v(T - T_r) + U_r$ . De plus, à partir de la donnée de l'énoncé pour  $\Delta S$  et de l'équation d'état du gaz parfait, on accède à  $S = C_p \ln \frac{T}{T_r} - nR \ln \frac{P}{P_r} + S_r$ . Les indices  $r$  sont associés à l'état de référence  $(T_r, P_r)$ . La fonction  $G^*(T, P)$  s'écrit donc, à une constante près sans intérêt (non précisée), et en utilisant l'équation d'état du gaz parfait :  $G^*(T, P) = C_v T - C_p T_0 \ln \frac{T}{T_0} + nR T_0 \ln \frac{P}{P_0} + P_0 \frac{nRT}{P}$ . Puisqu'il s'agit du potentiel thermodynamique de la transformation, il est minimal à l'équilibre. On doit donc avoir  $\left(\frac{\partial G^*}{\partial P}\right)_T = 0$  et  $\left(\frac{\partial G^*}{\partial T}\right)_P = 0$ . On effectue le calcul et on résout le système compte tenu de la relation de MAYER du gaz parfait  $C_p - C_v = nR$ . On en déduit les valeurs de  $T$  et  $P$  à l'état final (et on peut vérifier qu'elles correspondent bien à un minimum de  $G^*$ ) :  $T_f = T_0$  et  $P_f = P_0$ . Le résultat obtenu est logique : à terme, il y a équilibres thermique et mécanique. L'évolution est irréversible donc  $W = -P_0 \Delta V = -P_0 \left( \frac{nRT_0}{P_0} - \frac{nRT_0}{P_f} \right)$  soit  $W = -\frac{1}{2} nR T_0$ . Sachant que pour le gaz parfait,  $\Delta U = 0$  (la transformation étant telle que  $T_f = T_0$ , d'après la question précédente), on a  $\Delta F^* = -T_0 \Delta S = T_0 nR \ln \frac{P_0}{P_f} = -nR T_0 \ln 2$ . Comme  $\ln 2 > 0,5$ , on note que  $|W| < -\Delta F^*$ . Cette relation découle en fait directement de  $\Delta G^* < 0$  et l'inégalité traduit l'irréversibilité de l'évolution. Finalement, la variation en valeur absolue de  $F^*$  donne accès au travail maximum récupérable au cours de la transformation et correspondant au cas limite réversible.

## 13. Étude d'une équation d'état

Réponses :  $dU = C_v dT + (\ell - p)dV$ ,  $dS = \frac{C_v}{T} dT + \frac{\ell}{T} dV$ ,  $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ ,  $\frac{1}{T} \left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial \ell}{\partial T}\right)_V - \frac{\ell}{T^2}$  d'où  $\ell = T \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ , vrai car  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \ell - p$ ,  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}$ ,  $U_V dW - U_{GP} = a \int \frac{dV}{V^2}$ ,  $dU = 0$  d'où  $dT = \frac{p-\ell}{C_v} dV = -\frac{a}{C_v V^2} dV$ ,  $dV > 0$   $dT < 0$  le fluide se refroidit,  $\left(\frac{\partial C_v}{\partial V}\right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V = 0$ ,  $C_v$  identiques.

## B. Machines thermodynamiques

### 14. Système de climatisation

Réponses :  $37^\circ\text{C}$ ,  $1,22\text{ bar}$ ,  $\theta_B = 68^\circ\text{C}$ ,  $\theta_C = 39^\circ\text{C}$ ;  $D_m = 0,172\text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$   $P_{clim} = 4,3\text{ kW}$ ;  $P_{turb} = -7,6\text{ kW}$ ,  $P_{comp} = 8,3\text{ kW}$ ,  $P_{moteur} = 0,7\text{ kW}$ ,  $e = 6,1$ .

### 15. Moteur d'avion à réaction

Réponses :  $T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 459\text{ K}$ ,  $w_{comp} = c_p(T_2 - T_1) = 169\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $q_{comb} = 841\text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $w_{turb} = c_p(T_4 - T_3) = -w_{comp}$ ,  $T_4 = 1131\text{ K}$ ,  $p_4 = 3,1\text{ bar}$ ,  $T_5 = T_4 \left(\frac{p_4}{p_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 819\text{ K}$ ,  $v = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 790\text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\eta = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_2} = 37\%$ .

**16. Cycles thermiques**

Réponses :  $W + q + Q = 0$ ,  $\frac{Q}{T_1} + \frac{q}{T_2} = 0$ ,  $-W + q' + Q' = 0$ ,  $\frac{q'}{T_2} + \frac{Q'}{T_3} = 0$ ,  $\eta_1 = \frac{T_3(T_1 - T_2)}{T_1(T_3 - T_2)} = 5,5$ ;  $W + q + Q = 0$ ,  $\frac{Q}{T_1} + \frac{q}{T_3} = 0$ ,  $-W + q' + Q' = 0$ ,  $\frac{q'}{T_2} + \frac{Q'}{T_3} = 0$ ,  $Q'' = q + Q'$ ,  $\eta_1 = \eta_2$ , ce qui est gagné par  $q$  est perdu en rendement du moteur;  $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$ ,  $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$ ,  $e = \frac{Q_3}{Q_1}$ ,  $e = \frac{T_3(T_1 - T_2)}{T_1(T_2 - T_3)} = 3,7$ .

**17. Rendements...**

Réponses : on a  $\eta_0 = -\frac{W}{Q}$  avec  $W_{max} + Q + Q_f = 0$  et  $\frac{Q}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} = 0$ , on obtient  $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$ . La résistance thermique se définit par analogie avec l'électricité  $R_{th} = \frac{1}{G_{th}} = \frac{T_1 - T_3}{P_c}$  où  $P_c$  est la puissance thermique échangée avec la source chaude, on a  $Q = P_c \tau = G_{th}(T_1 - T_3)\tau$ . On a  $W = -(1 - \frac{T_2}{T_3})Q = -(1 - \frac{T_2}{T_3})(T_1 - T_3)G_{th}\tau$ . On en tire  $P = -\frac{W}{\tau} = T_1 + T_2 - (T_3 + \frac{T_1 T_2}{T_3})$ .  $\frac{dP}{dT_3} = \frac{T_1 T_2}{T_3^2} - 1 = 0$  pour  $T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$ . On a alors  $\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_3}}$  et donc  $\eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \eta_0}$ . Pour  $\eta_0 \ll 1$ , on peut écrire  $\eta_1 \simeq \frac{\eta_0}{2}$ . L'entropie créée est d'autant plus importante que le cycle est rapide. La forme proposée avec  $\Sigma > 0$  correspond bien au second principe où l'entropie créée ne peut qu'être positive ou nulle.  $W + Q + Q_f = 0$ ,  $\frac{Q_f}{T_2} + \frac{Q}{T_1} + \frac{\Sigma}{\tau} = 0$  d'où  $W = -[Q(1 - \frac{T_2}{T_1}) - \frac{T_2 \Sigma}{\tau}]$ , la puissance est  $P = -\frac{W}{\tau} = Q(1 - \frac{T_2}{T_1})\frac{1}{\tau} - \frac{T_2 \Sigma}{\tau^2}$ . La puissance est maximale pour  $\frac{dP}{d\tau} = 0$ , cela se produit pour  $\tau_2 = \frac{2T_2 \Sigma}{Q(1 - \frac{T_2}{T_1})}$ .

On alors trouve un rendement  $\eta_2 = -\frac{W}{Q} = \frac{1}{2}(1 - \frac{T_2}{T_1})$ . Le rendement idéal est  $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,50$ , en prenant en compte la conductance thermique, on a  $\eta_1 = 0,30$  et enfin le modèle avec création d'entropie on a  $\eta_2 = 0,25$ . Comme la valeur du rendement est  $\eta = 0,36$ , on est dans une situation de compromis pour ne pas trop créer d'entropie tout en ayant assez de puissance disponible.

**18. Pompe à chaleur**

Réponses :  $W + Q_a + Q_b = 0$ ,  $Q_b = m_b[c_e t_0 - c_g t_1 + L_f] = 1,182 \times 10^{11}$  J,  $W$  est minimale  $\Delta S = 0$ ,  $m_a c_e \ln \frac{T'_0}{T_0} + m_b c_e \ln \frac{T_f}{T'_0} - m_b \frac{L_f}{T_f} + m_b c_g \ln \frac{T_1}{T_f} = 0$ ,  $T'_1 = 295$  K (22 °C),  $Q_a = -m_a c_e (T'_1 - T_0) = -1,254 \times 10^{11}$  J,  $W_{mini} = 7,2 \times 10^9$  J.

**19. Centrale nucléaire**

Réponses : Il s'agit de faire un bilan énergétique pour un système en écoulement ce qui revient à étudier une masse entrante  $dm_e$  qui devient, en quelque sorte une masse sortante,  $dm_s$ . On montre alors par bilan de matière, comme en cours, qu'en régime stationnaire, la masse sortante correspond à la masse entrante, soit  $dm = dm_e = dm_s$ . On arrive rapidement à  $dm(u_s - u_e) = (P_e v_e - P_s v_s)dm + \delta Q$  puisque les variations d'énergie cinétique et potentielle sont a priori négligeables. Il reste, en posant  $h$  l'enthalpie massique et en rappelant que  $\delta Q$  est la chaleur reçue par le fleuve depuis la centrale,  $dm(h_s - h_e) = \delta Q$ . Or, l'eau est incompressible et  $h_s - h_e \simeq c \Delta T$  où  $\Delta T$  est la variation de température de l'eau au cours du passage près de la centrale. De plus,  $dm = \rho \mathcal{D}_{vol} dt$ . Ainsi,  $\rho \mathcal{D}_{vol} c_p \Delta T = \frac{\delta Q}{dt}$ . Il ne reste qu'à calculer la puissance thermique  $\delta Q/dt$  reçue par le fleuve à cause de la centrale. Pour ce faire, on s'intéresse à la centrale en la modélisant comme une machine thermique :  $\delta Q_1 < 0$ ,  $\delta W < 0$ ,  $\delta Q_2 > 0$  où le fleuve constitue la source froide de cette machine (sa température  $T_1 = 300$  K est supposée constante car on se doute que la centrale ne doit pas beaucoup la modifier. C'est souhaitable pour les poissons!). Le rendement de celle-ci est par définition  $\eta = \frac{-\delta W}{\delta Q_2} = \frac{P}{\delta Q_2}$ . On donne la valeur du rendement de la centrale dans l'énoncé :  $\eta = \frac{60}{100} \eta_{CARNOT} = \frac{60}{100} (1 - \frac{T_1}{T_2})$ . Alors  $\delta Q_2 = \frac{P}{\eta} dt$  et  $\delta Q_1 = -\delta W - \delta Q_2 = P dt - \frac{P}{\eta} dt$ . Finalement, l'équation d'évolution de la température de l'eau du fleuve devient  $\rho \mathcal{D}_{vol} c_p \Delta T = -\frac{\delta Q_1}{dt} = P(-1 + \frac{1}{\eta})$  soit  $\Delta T = \frac{P}{\rho c_p \mathcal{D}_{vol}} (-1 + \frac{1}{\eta})$ . En prenant, comme d'habitude, des précautions avec les unités, on trouve  $\Delta T = 1,14$  K. Cette variation de température correspond à l'élévation de la température pour l'eau du fleuve utilisée par la centrale. Lorsqu'elle est re-mélangée à l'eau du fleuve non utilisée qui représente 20% du débit, on a, en réalité, 80% de cet élévation par effet de dilution  $\Delta T' = 0,91$  K. On vérifie que la variation de température est faible, mais la situation peut être critique pour la survie des poissons et des plantes aquatiques qui vont souffrir d'un manque de dioxygène  $O_2$ . En effet, la solubilité d'un gaz dans l'eau est d'autant meilleure que la température de l'eau (liquide) est faible. Il y a déjà canicule, donc moins d'oxygène, la centrale aggrave un peu le phénomène. En plus comme le débit du fleuve est moindre, la concentration en polluants réguliers dissous est forcément plus élevée. Il est fréquent qu'en période de canicule, on soit obligé d'arrêter des centrales nucléaires car leur refroidissement n'est pas aussi efficace d'une part mais aussi parce que l'élévation de température de l'eau de refroidissement rejetée devient critique. L'arrêt de la centrale pose un sérieux problème car les périodes de canicule représentent toujours un pic important de demande d'électricité aussi important - voire plus - que les périodes de froid intense l'hiver.

## 20. Turbomoteur

Réponses :  $T_2 = T_1 \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$ ,  $T_5 = T_4 \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma}$ ,  $T_2 T_5 = T_1 T_4$ ,  $t_2 = 155^\circ\text{C}$ ,  $t_5 = 500^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = p_5 = p_6 = 1 \text{ bar}$ ,  $p_2 = p_3 = p_4 = 4 \text{ bar}$ , échangeur adiabatique réversible :  $T_5 - T_6 = T_3 - T_2$  et  $\Delta s = 0$  d'où  $T_3 T_6 = T_5 T_2$ ,  $t_6 = 155^\circ\text{C}$ ,  $t_3 = 500^\circ\text{C}$ ,  $\eta = \frac{(T_1 - T_2) + (T_4 - T_5)}{T_4 - T_3} = 63\%$ ,  $c_p = \frac{\gamma R}{(\gamma - 1)M}$ ,  $s_c^1 = c_p \left[\ln \frac{T_4}{T_3} - \frac{T_4 - T_3}{T_c}\right]$  et  $s_c^2 = c_p \left[\ln \frac{T_1}{T_6} - \frac{T_1 - T_6}{T_a}\right]$ ,  $\dot{S}_c = \mathcal{D}_m (s_c^1 + s_c^2) = 2,6 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}$ , sans échangeur  $\eta' = \frac{(T_1 - T_2) + (T_4 - T_5)}{T_4 - T_2} = 33\%$ ,  $s_c^1 = c_p \left[\ln \frac{T_4}{T_2} - \frac{T_4 - T_2}{T_c}\right]$  et  $s_c^2 = c_p \left[\ln \frac{T_1}{T_5} - \frac{T_1 - T_5}{T_a}\right]$ ,  $\dot{S}_c = \mathcal{D}_m (s_c^1 + s_c^2) = 12,9 \text{ kW} \cdot \text{K}^{-1}$ , le récupérateur améliore à tout point de vue.

## 21. Tuyère

Réponses :  $h(x) - h_1 + \frac{w(x)^2 - w_1^2}{2} = q(x)$ , isentropique  $w(x)^2 - w_1^2 = 2(h_1 - h(x))$ ,  $dh = T ds + v dp = \frac{1}{\rho(x)} dp$  d'où  $h(x) - h_1 = \int_0^x \frac{dp}{\rho(x)}$ ,  $w(x) = \sqrt{w_1^2 - 2 \int_0^x \frac{dp}{\rho(x)}}$ ,  $w(x) = \sqrt{2c_p(T_1 - T(x))}$  pour GP.

## 22. Parc éolien en montagne

Réponses : le débit volumique et le débit massique sont reliés par  $\mathcal{D}_m = \rho_e \mathcal{D}_v$ . On peut donc calculer  $\mathcal{D}_{v,1} = \mathcal{D}_m / \rho_e = 0,70098 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\mathcal{D}_{v,2} = 0,70077 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Il est assez évident que l'on peut considérer le débit volumique comme constant. D'ailleurs l'écart relatif des masses volumiques est d'environ  $3 \times 10^{-4}$  ce qui était déjà suffisamment significatif pour conclure sans effectuer de calculs. On écrit le premier principe industriel ou en écoulement stationnaire à l'eau. On a  $\mathcal{D}_m (\Delta e_c + \Delta e_{pot} + \Delta h) = P_m + P_{th}$ . On a  $\Delta e_c \simeq 0$  d'après les hypothèses de l'énoncé ce qui est très raisonnable puisque la conduite présente une section constante et que l'eau est à l'état liquide donc quasi-incompressible. La variation d'enthalpie est  $\Delta h = c_p (T_{\text{haut}} - T_{\text{bas}})$ .  $\Delta e_{pot} = g \Delta z = g(z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}})$ . On en déduit que  $P_{th} = \mathcal{D}_m (c_p (T_{\text{haut}} - T_{\text{bas}}) + g(z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}})) - P_m$ . On trouve que  $P_{th} = -8,7 \text{ MW}$ . L'eau qui monte dans le tuyau perd beaucoup d'énergie thermique, elle se refroidit ce qui n'est pas étonnant en montagne avec un tel dénivelé.

## C. Utilisation du diagramme H-ln(P)

### 23. Patinoire olympique

Réponses :  $A$  se situe à l'extrémité droite du palier de changement d'état à  $P_A = 2,8 \text{ bar}$  et  $T_A = -10^\circ\text{C}$ . Pour trouver le point  $B$ , il faut suivre l'isentropique  $s = 5,75 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$  puisque l'on suppose la transformation adiabatique et réversible. Les points  $A$  et  $B$  sont caractérisés par les enthalpies massiques  $h_A = 1400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  et  $h_B = 1600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . En appliquant le premier principe de la Thermodynamique à l'ammoniac en régime d'écoulement stationnaire, on a  $h_B - h_A = w_{comp} + q_{AB} = w_{comp} = 200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  où  $w_{comp}$  est le travail utile de compression. Le point  $C$  se situe sur une horizontale puisque la transformation est isobare, il se situe à l'extrême gauche du palier de changement d'état à la pression  $P_C = 10,0 \text{ bar}$ . La température correspondante est de  $25^\circ\text{C}$  et l'enthalpie massique  $h_C = 200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Comme ensuite la détente est isenthalpique, on suit une verticale  $h_D = h_A = 200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Par le théorème des moments, on détermine la proportion de vapeur dans le mélange diphasé :  $x_D \simeq 10\%$ . L'efficacité de la machine frigorifique est le rapport de l'énergie utile, c'est-à-dire échangée avec la source froide (ici la glace de la patinoire) et l'énergie coûteuse à savoir le travail de compression à fournir. On a donc  $e = \frac{q_{DA}}{w_{comp}} = \frac{h_A - h_D}{h_B - h_A}$ . On trouve  $e = 7$ . La machine de CARNOT fonctionne entre une source froide à la température  $T_f = -5^\circ\text{C}$  et une source chaude à la température  $T_c = 20^\circ\text{C}$ . On peut écrire le premier et le second principe  $w + q_f + q_c = 0$  et  $\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} = 0$ . On trouve alors que  $e_c = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 10,7$ . Cette efficacité est nécessairement supérieure à celle que l'on a calculée, cela est la conséquence des irréversibilités qui se manifestent sur toutes les étapes, en particulier celles où il y a des échanges thermiques. L'étape qui permet de maintenir la glace en bon état est  $D \rightarrow A$ , le transfert thermique frigorifique est  $q_{DA} = h_A - h_D = 1400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . La puissance frigorifique est donc  $P_{fr} = \mathcal{D}_m q_{DA}$ , on en déduit que  $\mathcal{D}_m = 0,11 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

### 24. Terminal GNL de Dunkerque

Réponses : On voit que la courbe de changement d'état à  $-160^\circ\text{C}$  se situe légèrement au-dessus de la pression de 1 bar. La température est donc un peu en-dessous de cette dernière à savoir :  $-162^\circ\text{C}$ . On est sur la courbe de saturation, très proche de la première courbe iso-volume que fournit le diagramme, on peut donc conclure que  $v \simeq 0,005 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$ . Un liquide occupe un volume beaucoup moins grand, environ 1000 fois, qu'un gaz. C'est nettement mieux pour le stockage. De plus pour en faire une distribution, cela n'impose pas d'avoir un réseau enterré de conduites de gaz. On écrit la loi des nœuds en entrée puisque le régime permanent est assuré :  $\mathcal{D}_m + \mathcal{D}_{m1bis} = \mathcal{D}_{m1}$ . Avec la relation  $\mathcal{D}_{m1bis} = x \mathcal{D}_{m1}$ , on arrive à  $\mathcal{D}_{m1} = \frac{\mathcal{D}_m}{1-x} = 2,56 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Par conséquent,  $\mathcal{D}_{m1bis} = 1,56 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ . Sur le graphique, on place les points avec les informations que l'on possède et on lit l'enthalpie massique avec une certaine imprécision... Cela donne  $h_7 = 430 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ ,  $h_{7bis} = 370 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Pour  $h_9$ , il faut comprendre que l'on a de la vapeur saturante à la pression de 1 bar, on lit sur le palier de changement d'état à droite et on trouve  $h_9 = 500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Dans le récupérateur  $R$ , on écrit que l'enthalpie est

conservée, c'est-à-dire que l'enthalpie qui entre est égale à celle qui sort. Cela donne  $\mathcal{D}_{m1bis}h_{1bis} + \mathcal{D}_{m1}h_{7bis} = \mathcal{D}_{m1}h_7 + \mathcal{D}_{m1bis}h_9$ . Cela permet de trouver  $h_{1bis} = h_9 + \frac{1}{x}(h_7 - h_{7bis}) = 600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . De la même façon, on écrit la conservation de l'enthalpie dans le mélangeur  $\mathcal{D}_m h_0 + \mathcal{D}_{m1bis} h_{1bis} = \mathcal{D}_{m1} h_1$ , on trouve par lecture sur le graphique  $h_0 = 870 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$  (1 bar et  $7^\circ\text{C}$ ) et donc  $h_1 = (1-x)h_0 + xh_{1bis} = 705 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . En plaçant le point 1 et en suivant une isentropique jusqu'à la pression de 5 bar, on arrive au point 2 et on lit  $h_2 = 900 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ . Comme la compression est adiabatique, on a  $P_{comp} = \mathcal{D}_{m1}(h_2 - h_1) = 500 \text{ kW}$ . Chaque seconde, on produit  $\mathcal{D}_{m1} - \mathcal{D}_{m1bis} = \mathcal{D}_m = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$  de méthane liquéfié. Il faut donc  $\Delta t = 1000 \text{ s}$  pour obtenir une tonne et donc  $E = P\Delta t = 500 \text{ kWh}$  ce qui représente 75 euros. Cette somme est nettement inférieure à celle avancée, il y a des coûts qui n'apparaissent pas avec le modèle simplifié présenté. Quoi qu'il en soit, la production de GNL représente un coût énergétique d'environ 1/60 de son pouvoir énergétique, cela reste faible. La solution est viable sur le plan économique.

### 25. Pompe à chaleur pour un bâtiment

Réponses :  $W + Q_c + Q_f = 0$  et  $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$  d'où  $COP_{rev} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = 5,4$ . Le point 1 est situé légèrement à droite de la courbe de saturation en domaine vapeur à la pression de 6 bar. Le point 2 est obtenu en suivant l'isentropique conduisant à  $90^\circ\text{C}$  et une pression d'un peu plus de 30 bar dans le domaine vapeur. On se dirige au point 3 par une isobare jusqu'au point correspondant au liquide saturé. Ensuite, on effectue une descente verticale (isenthalpique) jusqu'à un point 4 situé en mélange liquide-vapeur à la pression de 6 bar. On a  $COP = \frac{|Q_c|}{W} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{460 - 300}{460 - 425} = 4,6$ . Le  $COP$  réel est plus faible, il y a non prise en compte d'irréversibilités dans le cycle décrit en particulier sur la compression isentropique 1-2. La puissance absorbée est la puissance mécanique. La puissance fournie à la source chaude est donc  $P_c = COP \times P_m = 120 \text{ kW}$ . Comme il faut fournir  $P_{ch} = 900 \text{ kW}$ , il faut  $n = 8$  pompes à chaleur car 7 ne suffisent pas. La puissance fournie est  $P_{tot} = n\mathcal{D}_m c_p(70 - 19)$ , on trouve  $\mathcal{D}_m = 0,53 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## D. Statique des fluides

### 26. Récipients communicants

Réponses : on note  $p_0$  la pression atmosphérique, on note  $h_1$  la différence de niveau de l'eau entre la partie supérieure et le récipient le plus bas. Dans ce récipient la pression est donc  $p_1 = p_0 + \rho g h_1$ . Cette pression  $p_1$  se communique par l'air au niveau du récipient situé à mi-hauteur. Si l'on note  $h_2$  la différence de niveau entre l'eau au niveau intermédiaire et l'eau en haut du tube bouché au départ, on a au niveau supérieur du tube bouché une pression  $p_s = p_1 - \rho g h_2$ . Par conséquent, on a  $p_s = p_0 + \rho g(h_1 - h_2)$ . Par la structure du dispositif, on voit que l'on a forcément  $h_1 > h_2$ . On a donc :  $p_s > p_0$ . Quand on coupe, de l'eau jaillit de ce tube car elle est à une pression supérieure à la pression atmosphérique. C'est donc la réponse a).

### 27. Entre deux eaux !

Réponses : soit  $\mu$  la masse volumique du bloc, son poids est  $\mu V g$  si  $V$  est son volume. La poussée d'ARCHIMÈDE est égale au poids du volume de fluide déplacé, ici il faut décomposer en  $\frac{4}{5}V$  et  $\frac{1}{5}V$ . On a donc  $\Pi_A = \frac{4}{5}\mu_{\text{eau}}Vg + \frac{1}{5}\mu_{\text{huile}}Vg$ . En écrivant  $\mu V g = \Pi_A$ , on arrive à  $\mu = \frac{\mu_{\text{huile}} + 4\mu_{\text{eau}}}{5} = 980 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . La bonne réponse est donc la réponse b).

### 28. Pression au fond d'un récipient

Réponses : À l'équilibre, la pression traduit le poids de la colonne de matière située au-dessus de la surface du fond du récipient. Le poids de la colonne d'atmosphère est déjà traduit par la pression atmosphérique. Il faut ajouter le poids du piston et celui du volume d'eau. On divise par la surface  $S$  pour traduire cela en pression, la pression au fond du récipient est donc  $P_{fond} = P_{atm} + \frac{(m_{\text{eau}} + m)g}{S} = 1,07 \times 10^5 \text{ Pa}$ . C'est la réponse d) qui convient.

### 29. La fosse des Mariannes

Réponses : la loi de la statique des fluides indique que  $\overrightarrow{\text{grad}}P = \rho \vec{g} = \rho_0 g \vec{e}_z$  en orientant l'axe  $Oz$  vers le bas. On a  $P = P_0 + \rho_0 g z$ . On trouve  $P = 1116 \text{ bar}$ . On a  $\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T dP$  d'où  $\rho = \rho_0 \exp \chi_T (P - P_0)$ . On a maintenant  $dP \exp(-\chi_T (P - P_0)) = \rho_0 g dz$  qui par intégration conduit à  $P = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g z)$ . On trouve  $P = 1148 \text{ bar}$ . L'écart relatif est de 2,8%, c'est faible mais le coefficient de compressibilité de l'eau est très faible. On aurait pu effectuer des développements limités dans les calculs. Considérer l'eau liquide comme incompressible est plutôt satisfaisant.

### 30. Ballon sonde

Réponses : la loi de la statique des fluides conduit à  $\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$ ,  $P(z) = P_0 \exp -\frac{Mgz}{RT_0}$ . On a  $T_{MB} = T_0(1 - ah)$  avec  $h = 4807 \text{ m}$  d'où  $a = \frac{T_0 - T_{MB}}{T_0 h} = 2,84 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$ . Avec  $\rho = \frac{MP}{RT(z)}$ , on a  $\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} \frac{P}{1-az}$  que l'on écrit  $\frac{dP}{P} = \frac{Mg}{RT_0 a} \frac{-adz}{1-az}$ . On pose  $\alpha = \frac{Mg}{RT_0 a} = 4,11$  et on obtient  $P(z) = P_0(1 - az)^\alpha$ . Au sommet du Mont-Blanc, on trouve  $P_{MB} = 0,54 \text{ bar}$ . La masse d'hélium est  $m_{\text{He}} = \frac{P_0 V M_{\text{He}}}{RT_0} = 0,5 \text{ g}$ , avec l'enveloppe cela fait une masse totale  $m_{\text{tot}} = 2,5 \text{ g}$ . Il monte jusqu'à ce que la poussée d'ARCHIMÈDE soit égale au poids  $m_{\text{tot}}g$ , la poussée est  $\rho(z)Vg$  d'où  $\rho(z) = \frac{m_{\text{tot}}}{V} = 0,83 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .  $\rho = \frac{P(z)M_{\text{air}}}{RT(z)} = \frac{P_0 M_{\text{air}}}{RT_0} (1 - az)^{\alpha-1}$  d'où  $z_b = \frac{1}{a} (1 - \frac{0,83}{1,19})^{1/3,11} = 3870 \text{ m}$ .

### 31. Étude d'un barrage

Réponses :  $p = p_0 + \mu g(h - z)$ ,  $\vec{f}_{\text{eau}} = -Lh(p_0 + \frac{\mu gh}{2})[\vec{e}_x + \tan \alpha \vec{e}_z]$ ,  $\vec{f}_{\text{air}} = Lhp_0[\vec{e}_x - \tan \alpha \vec{e}_z]$ ,  $M\vec{g} = -\rho Lh^2 \tan \alpha g \vec{e}_z$ ,  $T = Lh \frac{\mu gh}{2}$ ,  $N = Lh \tan \alpha [2p_0 + \frac{\mu gh}{2} + \rho gh]$ ,  $f_{\text{min}} = \frac{\mu gh}{4p_0 + \mu gh + 2\rho gh} \frac{1}{\tan \alpha}$ ,  $\epsilon = \frac{\mu gh}{4p_0 + \mu gh + 2\rho gh}$ ,  $f > \epsilon \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ , si  $f = \tan \varphi > \tan(\frac{\pi}{2} - \alpha)$  alors  $\alpha + \varphi > \frac{\pi}{2}$  et non glissement,  $f_{\text{min}} = 0,111$ ,  $N_{\text{air}} = Lh \tan \alpha [\frac{\mu gh}{2} + \rho gh]$  d'où  $f_{\text{min}} = \frac{\mu gh}{\mu gh + 2\rho gh} = 0,333$ ,  $N_{\text{eau}} = Lh \tan \alpha [\rho gh - \frac{3\mu gh}{2}]$  or  $\rho = 2\mu$  d'où  $N_{\text{eau}} = Lh \tan \alpha \frac{\mu gh}{2}$ ,  $f_{\text{min}} = \frac{1}{\tan \alpha} = 1$ ,  $f > 1$  pas impossible mais il y a beaucoup de chances que le barrage soit emporté par l'eau.

### 32. Jouons avec un verre d'eau

Réponses : On se place juste à l'épaisseur critique et on effectue un bilan des forces agissant sur le disque à l'équilibre en prenant un axe ( $Oz$ ) vertical ascendant : son poids  $m_e \vec{g} = -\rho g e_c \pi r^2 \vec{e}_z$ , les forces de pression de l'air  $\vec{F}_{\text{air}} = P_{\text{atm}} \pi r^2 \vec{e}_z$  et les forces de pression de l'eau  $\vec{F}_{\text{eau}} \simeq -\rho_{\text{eau}} g h \pi r^2 \vec{e}_z$  (on a fermé le verre sans chercher à comprimer l'eau avec le disque) ; ces forces sont négligeables car correspondent à une pression de l'ordre de 0,01 bar. À la limite critique, les forces se compensent juste et on tire  $e_c = \frac{P_{\text{atm}} r^2}{\rho g r^2} = 0,5 \text{ m}$ . L'expérience est aisément réalisable avec une feuille cartonnée (tant qu'elle reste étanche...). On note que l'épaisseur critique est très élevée, ce qui met en exergue l'importance des forces de pression.

### 33. Demi-sphère partiellement remplie

Réponses :  $p(\theta) = p_0 + \rho g(h - a \cos \theta)$ , on pose  $h = a \cos \theta_0$ ,  $p = p_0 + \rho g a (\cos \theta_0 - \cos \theta)$ ,  $df_z = p(\theta) \cos \theta a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ,  $\vec{f} = \vec{e}_z [\pi a^2 \cos^2 \theta_0 (p_0 + \frac{\rho g a \cos \theta_0}{3})]$ ,  $\vec{f}_{\text{eau} \rightarrow \text{sphère}} = \vec{e}_z \pi h^2 (p_0 + \frac{\rho g h}{3})$ ,  $\vec{f}_{\text{air ext} \rightarrow \text{sphère}} = -\vec{e}_z \pi h^2 p_0$ , il y a soulèvement pour  $h \geq h_0$  telle que  $h_0 = \left(12 \frac{\rho_0}{\rho} a^2 e\right)^{1/3}$ .

### 34. Eau dans un entonnoir retourné

Réponses :  $\frac{dp}{dz} = -\frac{4Cp}{z^4 k_B T}$  et  $p = p_\infty \exp \frac{C}{k_B T z^3}$ ,  $p \rightarrow \infty$  si  $z \rightarrow 0$  on atteint forcément la pression de vapeur saturante,  $p^{\text{sat}}(T) = p_\infty \exp \frac{C}{k_B T e^3}$ ,  $e \simeq 1,3 \times 10^{-9} \text{ m}$ ,  $a = n^{-1/3} \simeq 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ ,  $a$  et  $e$  même ordre de grandeur, le film n'existe pas vraiment, si film  $T = \text{Cte}$  tant qu'il y a vaporisation du film et sans film  $T$  va augmenter tout de suite.

### 35. Instabilité thermodynamique d'une étoile

Réponses :  $\kappa$  sans dimension ;  $\Delta T = -\frac{GMm}{\kappa k_B} \frac{\Delta R}{R^2}$ ,  $\Delta R < 0 \Delta T > 0$  ;  $U = -E_c$ ,  $E_c = \frac{M}{m} \frac{3}{2} k_B T$ ,  $C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V = -\frac{3Mk_B}{2m} < 0$ ,  $T$  augmente, l'énergie diminue ;  $dU_1 + dU_2 = 0$ ,  $dS_1 + dS_2 \geq 0$  ;  $dU_1 = T_1 dS_1 = C_{V1} dT_1$  ;  $C_{V1} dT_1 (\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}) \geq 0$ , si  $T_1 > T_2$  alors  $dT_1 > 0$  et  $dT_2 < 0$ , instable.

### 36. Débordement d'un liquide

Réponses :  $\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu(\vec{g} - \vec{a}_{\text{ent}})$ ,  $\frac{\partial p}{\partial z} = -\mu g$ ,  $\frac{\partial p}{\partial r} = \mu \omega^2 r$ ,  $p(r) = -\mu g z + \mu \omega^2 \frac{r^2}{2} + a$  ; surface libre  $p(r) = p^\circ$ ,  $z = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{a - p^\circ}{\mu g}$ , minimum en  $r = 0$ ,  $z = z_{\text{min}} + \frac{\omega^2}{2g} r^2$ ,  $V_{\text{eau}} = \pi R^2 h = \int 2\pi r z(r) dr$ ,  $z = h + \frac{\omega^2}{2g} [r^2 - \frac{R^2}{2}]$  ;  $\omega_{\text{centre}} < \frac{2}{R} \sqrt{gh}$ ,  $\omega_{\text{déb}} < \frac{2}{R} \sqrt{g(H - h)}$ .

### 37. La sève dans un arbre

Réponses :  $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ , loi de la statique  $\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu \vec{g}$ ,  $\frac{dp}{dz} = -\mu g$ ,  $\Delta p = p(h) - p(0) = -\mu gh = -3 \text{ bar}$ ,  $dPr^2$  est une force en  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ , la viscosité dynamique  $\eta$  est en  $\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ , la pression diminue dans le sens de l'écoulement, c'est logique puisqu'il y a des frottements il faut une pression plus élevée en amont qu'en aval pour que le fluide puisse vaincre les frottements et puisse s'écouler, le profil des vitesses est parabolique, à cause des frottements la vitesse de la couche de fluide au contact de la paroi est nulle,  $D_{\text{vol}} = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) r dr d\theta$ ,  $D_{\text{vol}} = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz}$ , la vitesse moyenne se définit par  $D_{\text{vol}} = \pi R^2 v_{\text{moy}}$ , on a

donc  $\mathcal{D}_{vol} = 8,7 \times 10^{-12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\frac{dp}{dz} = -2,2 \times 10^{-3} \text{ bar}$ , ce gradient (en valeur absolue) est très petit devant le gradient hydrostatique.

**38. La Mer de Glace**

Réponses : on a  $Q = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \iint v(r)rdrd\theta = -\frac{\pi}{8\eta}R^4\frac{dp}{dx}$  en n’oubliant pas que  $\frac{dp}{dx} < 0$  puisqu’il faut plus de pression en entrée qu’en sortie pour combattre les frottements qui se traduisent par la force de viscosité. Un débit volumique est en  $\text{m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Une pression est une force par une surface donc  $\frac{dp}{dx}$  est équivalent à une force volumique qui s’exprime selon  $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^{-3} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-2} \text{s}^{-2}$ . Comme  $\eta = -\frac{\pi R^4}{8Q} \frac{dp}{dx}$  est en  $\text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ .

L’unité usuelle est le  $\text{Pa} \cdot \text{s}$ . D’après la loi de la statique de fluide, on a  $\vec{\text{grad}}p = \rho_g \vec{g}$ . Si on suppose que l’on est au voisinage d’une situation statique étant donné la lenteur de l’écoulement, on peut en projetant sur la ligne de plus grande pente du glacier obtenir un effet de  $g \sin \alpha$  comme pour n’importe quel plan incliné. Le signe moins traduit la baisse de pression lorsque l’on progresse dans le sens de l’écoulement. Grâce aux données, on peut estimer une rayon  $R = 400 \text{ m}$  et le débit volumique comme le produit d’une section  $S = 400 \times 600 \text{ m}^2$  et une vitesse d’écoulement de l’ordre de  $100 \text{ m/an}$ . On trouve  $Q \simeq 0,75 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ . Avec ces données, on trouve  $\eta \simeq 2,5 \times 10^{13} \text{ Pa} \cdot \text{s}$  ce qui est dans le bon ordre de grandeur. Le diagramme d’état de l’eau est réalisé à la figure 1.  $C$  est le point critique au-delà duquel il y a continuité de l’état fluide, on ne distingue plus le liquide de la vapeur.  $T$  est le point triple où les trois phases coexistent.

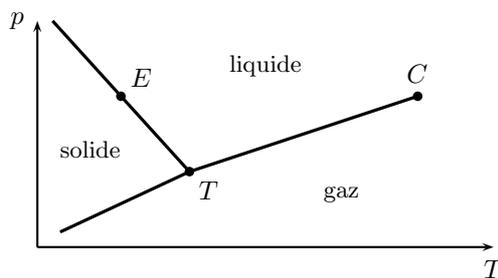


FIGURE 1 – Diagramme d’état de l’eau

On a une masse d’eau  $Qdt$  qui circule d’où  $dH_l = \rho_l Q c_l dT dt = \rho_l Q c_l \frac{dT}{dx} dx dt$ . On écrit que  $Q c_l \frac{\rho_g - \rho_l}{\rho_g} \frac{dp}{dx} dx dt = \frac{1}{2} \rho_g R dR 2\pi dx \ell_f$ . On en déduit  $(\frac{dR}{dt})_{\text{érosion}} = \frac{1}{\ell_f} \frac{Q c_l}{R} \frac{\rho_g - \rho_l}{\rho_g^2} \frac{dp}{dx}$ . L’érosion provoque nécessairement un agrandissement du canal, il faut que  $\frac{dR}{dt} > 0$ . C’est bien le cas parce que  $\rho_g < \rho_l$  pour l’eau et  $\frac{dp}{dx} < 0$ .