

Exercices : 11 - Principes de la Thermodynamique

— Solutions —

A. Application des principes

1. Comparaison réversibilité - irréversibilité

Réponses : $p_1 = p_0 + \frac{Mg}{S} = 2 \text{ bar}$, $V_0 = 25 \text{ L}$, $V_1 = \frac{T_1}{2T_0}V_0$, $T_1 = T_0 \frac{2p_1V_0 + 5RT_0}{p_1V_0 + 5RT_0}$, $T_1 = \frac{9}{7}T_0 = 386 \text{ K}$, $V_1 = 16 \text{ L}$, $p_2 = p_0$, $V_2 = \frac{2T_2}{T_1}V_1$, $T_2 = T_1 \frac{2p_0V_1 + 5RT_1}{4p_0V_1 + 5RT_1} = 331 \text{ K}$, on ne revient pas à l'état d'équilibre initial, irréversible, $\Delta S_{01} = \frac{5}{2}R \ln \frac{T_1}{T_0} + R \ln \frac{V_1}{V_0} = 1,53 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, $\Delta S_{01} = S_{cr} > 0$ car $S_e = 0$ (calorifugé) irréversible, $\gamma = \frac{7}{5}$, $p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_0}\right)^\gamma = 1,07 \text{ bar}$, $T_2 = 322 \text{ K}$, $T_3 = T_0 = 300 \text{ K}$, $p_3 = p_0 = 1 \text{ bar}$, $\Delta S_{12} = 0$, $\Delta S_{13} = \Delta S_{23} = \frac{5}{2}R \ln \frac{T_0}{T_2} = -1,47 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$, sur le cycle complet $\Delta S = \Delta S_{01} + \Delta S_{13} > 0$ causes d'irréversibilités.

2. Transformations polytropiques

Réponses : Premier principe $[\gamma(k+1) - 1] \frac{dV}{V} + k \frac{dp}{p} = 0$, $n = \frac{\gamma(k+1)-1}{k}$, si $k \rightarrow \infty$ $pV^\gamma = \text{cte}$ adiabatique, si $k \rightarrow 0$ $dV = 0$ isochore; $T(z) = T_0 - \frac{Mg}{R} \frac{n-1}{n} z$; $z_{atm} = 48 \text{ km}$.

3. Travail de séparation

Réponses : Admettons que l'énoncé suppose les gaz sans énergie cinétique macroscopique (ou sans variation de celle-ci). Le premier principe appliqué à l'ensemble des deux gaz lors de la transformation de séparation s'écrit $\Delta(U_A + U_B) = W + Q$ en exploitant l'extensivité de l'énergie interne (W représente le travail total reçu, actions conservatives comprises). Or, les gaz sont parfaits et les températures initiale et finale sont identiques (T_0) donc, par première loi de JOULE, il vient $W + Q = 0$. Appliquons ensuite le second principe au même système et pour la même transformation isotherme (T_0) : $\Delta(S_A + S_B) = \frac{Q}{T_0} + S_c$ en exploitant l'extensivité de l'entropie et en posant l'entropie créée $S_c \geq 0$. En combinant les deux principes, il vient $W \geq -T_0 \Delta(S_A + S_B)$ le cas de travail minimal W_{min} correspondant à une transformation réversible. Ainsi, $W_{min} = -T_0 \Delta(S_A + S_B)$. Il ne reste qu'à expliciter la variation d'entropie de chaque gaz parfait. L'entropie est une fonction d'état alors on peut raisonner sur un chemin réversible. Pour le gaz A , passant de la pression partielle $x_A P_0$ à la pression P_0 et dont la température reste T_0 , l'identité thermodynamique de l'enthalpie $dH_A = T_0 dS_A + V dP_A = 0$ (deuxième loi de JOULE) permet d'isoler $dS_A = -\frac{V}{T_0} dP_A = -n_A R \frac{dP_A}{P_A}$ en utilisant l'équation d'état du gaz parfait. On intègre, d'où $\Delta S_A = -n_A R \ln \frac{P_0}{x_A P_0} = n_A R \ln x_A$ x_A est la fraction molaire initiale du gaz A dans le mélange. De même, on trouve pour B $\Delta S_B = n_B R \ln x_B$. Finalement, $W_{min} = -RT_0(n_A \ln x_A + n_B \ln x_B)$. Tout d'abord, explicitons de façon générale n_A et n_B en supposant connus la masse totale m , les fractions molaires x_A et x_B et les masses molaires M_A et M_B . Puisque $m = m_A + m_B = n_A M_A + n_B M_B = (x_A M_A + x_B M_B) n_{tot}$ on a $n_{tot} = \frac{m}{x_A M_A + x_B M_B}$ donc $n_A = x_A n_{tot} = \frac{x_A m}{x_A M_A + x_B M_B}$ et $n_B = x_B n_{tot} = \frac{x_B m}{x_A M_A + x_B M_B}$. On se sert de ces expressions, avec les unités du système international, dans la suite. Pour l'air, $x_{O_2} = 0,21$ et $x_{N_2} = 0,79$. De plus, $M_{O_2} = 32 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{N_2} = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Alors, $m = 1,0 \text{ kg}$ d'air contient $n_{O_2} = 7,3 \text{ mol}$ et $n_{N_2} = 27 \text{ mol}$ et $W_{min} = 44 \text{ kJ}$. Pour le mélange d'hexafluorure d'uranium avec les deux isotopes d'uranium et une masse $m = 1,0 \text{ kg}$, on a $x_A = 0,01$, $M_A = 235 + 6 \times 19 = 349 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $x_B = 0,99$, $M_B = (238 + 6 \times 19) = 352 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, $n_A = 2,8 \cdot 10^{-2} \text{ mol}$, $n_B = 2,8 \text{ mol}$ et $W_{min} = 0,40 \text{ kJ}$. Considérons une eau de mer typique à 30 g de sel pour $1,0 \text{ kg}$ d'eau de mer (mais on peut trouver plus salé...). On note A l'eau H_2O et B le sel (essentiellement le chlorure de sodium pour simplifier). Les masses molaires sont $M_A = (2 \times 1 + 16) = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_B = (35,5 + 23) = 58,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$. Alors, $n_A = \frac{m - m_B}{M_A} = 54 \text{ mol}$ et $n_B = \frac{m_B}{M_B} = 0,51 \text{ mol}$ puis $x_A = 0,99$ et $x_B = 9,4 \cdot 10^{-3}$. Finalement, $W_{min} = 7,2 \text{ kJ}$. La séparation de l'air en dioxygène et diazote est une méthode de production de O_2 et N_2 purs. On procède en pratique par séparation cryogénique de l'air (liquéfaction puis distillation fractionnée). La séparation du mélange d'hexafluorure d'uranium permet de réaliser la séparation isotopique de l'uranium : seul l'isotope 235 de l'uranium est intéressant en raison de sa radioactivité naturelle. En pratique, on enrichit l'uranium en isotope 235 en procédant par diffusion gazeuse de UF_6 par des étages avec des trous de diffusion (l'isotope plus léger diffuse plus vite); on peut aussi travailler par ultracentrifugation. La séparation de l'eau de mer permet non seulement de récupérer du sel mais aussi de l'eau douce! On peut procéder par distillation (évaporation de l'eau qui laisse le sel cristallisé) ou par osmose inverse (système de filtrage très fin ne laissant passer que les molécules d'eau).

4. Utilisation de la loi de Laplace

Réponses : $p_A = p_B = p_0 \left(\frac{V_0}{V_B}\right)^\gamma = 1,16 \text{ bar}$, $T_B = 316 \text{ K}$, $T_A = 383 \text{ K}$, $\tau = \frac{5nR(T_A + T_B - 2T_0)}{2R_0 I^2} = 8,2 \text{ s}$, $W_B = 27 \text{ J}$, $\Delta S_A = n \left[\frac{5}{2}R \ln \frac{T_A}{T_0} + R \ln \frac{V_A}{V_0} \right] = 0,04 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$.

5. Chauffe-eau au gaz

Réponses : $\eta = \frac{mc(T_f - T_0)}{V_{gaz} PE} = 79\%$, $mc \frac{dT}{dt} + \alpha T = \alpha T_0 + \frac{V_{gaz} PE}{\Delta t}$, $T_f = T_0 + \frac{V_{gaz} PE}{\alpha \Delta t} (1 - \exp - \frac{\alpha \Delta t}{mc})$, résolution numérique $\alpha \simeq 70 \text{ W} \cdot \text{K}^{-1}$.

6. Compresseur refroidi

Réponses : $\mathcal{D}c_p(T_S - T_E) = P_{comp} + P_{th}$, $\mathcal{D}\Delta s = \dot{S}_{transf} + \dot{S}_{cr} = \frac{P_{th}}{T_0}$, $\Delta s = c_p \ln \frac{T_S}{T_E} - r \ln \frac{p_S}{p_E}$, $P_{th} = -26 \text{ kW}$, $P_{comp} = 16 \text{ kW}$.

7. Turbine à vapeur

Réponses : la turbine fonctionne en régime permanent, on peut écrire la loi des nœuds en ce qui concerne le débit massique, on a donc $\mathcal{D}m_1 = \mathcal{D}m_e - \mathcal{D}m_2 = 6,4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$. Il faut considérer la turbine comme étant en fait la somme de deux opérations distinctes de détente de la vapeur dont les puissances vont s'additionner. Dans chaque cas, on applique le premier principe industriel : $\mathcal{D}m_1(\Delta h + \Delta e_c) = P_1$ puisque l'on va négliger les pertes thermiques ainsi que les variations d'énergie potentielle de pesanteur. On a donc $\mathcal{D}m_1(h_1 - h_e + \frac{v_1^2 - v_e^2}{2}) = P_1$. Nous possédons toutes la valeurs numériques pour réaliser le calcul, on trouve $P_1 = -2,4 \text{ MW}$. On fait exactement la même chose pour le second flux de vapeur : $P_2 = \mathcal{D}m_2(h_2 - h_e + \frac{v_2^2 - v_e^2}{2})$. On trouve $P_2 = -27,6 \text{ MW}$. La puissance totale est bien négative comme il se doit avec une vapeur qui fournit du travail à l'extérieur constitué par l'alternateur. On a donc $P_m = -30,0 \text{ MW}$. On constate que c'est surtout la partie du flux de valeur d'eau qui effectue la plus forte détente qui contribue le plus à la production de puissance mécanique utile.

8. Chauffage d'un solide

Réponses : $\Delta S = C \ln \frac{T_2}{T_1} = S_{transf} + S_{cr}$, $S_{transf} = C(1 - \frac{T_1}{T_i}) + C(1 - \frac{T_i}{T_2})$, $S_{cr} = C[\ln \frac{T_2}{T_1} + (\frac{T_1}{T_i} + \frac{T_i}{T_2}) - 2]$, minimale si $T_i = \sqrt{T_1 T_2}$.

9. Détente dans le vide

Réponses : V_0 volume des moles d'air qui rentrent dans le récipient $p_0 V_0 = n_0 R T_0$, une fois entrées : $p_0 V = n_0 R T_1$, $\Delta U = \frac{n_0 R}{\gamma - 1}(T_1 - T_0) = p_0 V_0$, $T_1 = \gamma T_0$, $\Delta S = \frac{n_0 R}{\gamma - 1} \ln \frac{T_1}{T_0} + n_0 R \ln \frac{V_0}{V} = \frac{n_0 R \gamma}{\gamma - 1} \ln \gamma$, $\Delta S = S_{cr} = 0,28 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ positive, irréversible ; isochore $Q = \Delta U = \frac{n_0 R}{\gamma - 1}(T_0 - T_1) = -n_0 R T_0$, $\Delta S = \frac{n_0 R}{\gamma - 1} \ln \frac{1}{\gamma} = S_{transf} + S_{cr}$, $S_{transf} = -n_0 R$, $S_{cr} = n_0 R[1 - \frac{1}{\gamma} \ln \gamma] = 0,04 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}$ positive, irréversible.

10. Fin d'une surfusion

Réponses : l'état d'équilibre final correspond soit à un équilibre liquide-solide, soit à du phosphore solide. D'autre part, l'évolution du contenu du tube est suffisamment rapide pour la supposer adiabatique et elle est monobare : le premier principe appliqué à ce contenu donne $\Delta U = W = -P_{ext} \Delta V$, soit $\Delta H = 0$ car les pressions initiale et finale sont P_{ext} . Le contenu du tube évolue de façon isenthalpique. La température initiale $\theta = 42,0^\circ\text{C}$ est proche de la température de fusion $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. Il est donc raisonnable de faire l'hypothèse que l'état final est un équilibre liquide-solide (hypothèse à vérifier à la fin). Dans ce cas, la température finale est obligatoirement $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. Pour préciser l'état final, on doit traduire $\Delta H = 0$ pour le contenu du tube. Les états limites étant fixés, ΔH est fixé et ne dépend pas du chemin suivi (H fonction d'état). Aussi considère-t-on dès à présent un chemin réversible entre les états limites. On peut préciser le chemin comme suit. État initial I : 30,0 g de phosphore liquide à $\theta = 42,0^\circ\text{C}$. État intermédiaire E : 30,0 g de phosphore liquide à $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. État final F : $x \times 30,0 \text{ g}$ de phosphore solide et $(1 - x) \times 30,0 \text{ g}$ de phosphore liquide à $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. Alors, $\Delta H = \Delta H_{IE} + \Delta H_{EF} = 0$ soit $m c_l (\theta_0 - \theta) + x m (-h_{\text{fusion}}) = 0$ donc $x = \frac{c_l (\theta_0 - \theta)}{h_{\text{fusion}}} = 8,00 \cdot 10^{-2}$. L'hypothèse de départ est bien correcte puisqu'on a obtenu $x \in [0; 1[$. On précise l'état final demandé comme suit : 2,40 g de P solide, 27,6 g de P liquide et $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. Cette fois-ci, θ est éloignée de θ_0 donc il est raisonnable de supposer que tout le phosphore est solide à l'état final (hypothèse dont la cohérence est à vérifier à la fin). Le chemin fictif réversible passe par les états suivants. État initial I : 30,0 g de phosphore liquide à $\theta = 12,5^\circ\text{C}$. Premier état intermédiaire E1 : 30,0 g de phosphore liquide à $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. Second état intermédiaire E2 : 30,0 g de phosphore solide à $\theta_0 = 44,0^\circ\text{C}$. État final F : 30,0 g de phosphore solide à θ_f . On a $\Delta H = \Delta H_{IE1} + \Delta H_{E1E2} + \Delta H_{E2F} = 0$ soit $m c_l (\theta_0 - \theta) + m (-h_{\text{fusion}}) + m c_s (\theta_f - \theta_0) = 0$ d'où $\theta_f = \theta_0 + \frac{h_{\text{fusion}} - c_l (\theta_0 - \theta)}{c_s} = 37,1^\circ\text{C}$. On valide bien l'hypothèse de calcul en notant que $\theta_f < \theta_0$.

B. Machines thermodynamiques

11. Climatiseur

Réponses : Le moteur fournit le travail nécessaire au climatiseur. Il fonctionne entre les deux sources les plus éloignées en température pour avoir le rendement maximal, à savoir l'air extérieur et le lac. Le climatiseur fonctionne entre le bungalow et l'air extérieur. Moteur : $W + Q_1 + Q_3 = 0$ et $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$. Climatiseur : $-W + Q_2 + Q_4 = 0$ et $\frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_4}{T_3} = 0$. L'efficacité est définie par le transfert énergie utile (à savoir Q_2) sur le transfert énergétique coûteux. Ici, même si la question du coût peut être discutée, on choisit logiquement le transfert thermique fourni par la source chaude Q_1 . On a donc : $W + Q_1(1 - \frac{T_3}{T_1}) = 0$ et $-W + Q_2(1 - \frac{T_1}{T_2}) = 0$. D'où la relation : $Q_1 \frac{T_1 - T_3}{T_1} = Q_2 \frac{T_1 - T_2}{T_2}$. On a $e = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1 - T_3}{T_1 - T_2} = 1,4$.

12. Pompe à énergie (couramment dite à chaleur)

Réponses : a) vraie, b) fausse, c) vraie, d) vraie, a) vraie, b) fausse, c) vraie, d) fausse.

13. Moteur d'avion à réaction

Réponses : $T_2 = T_1(\frac{p_1}{p_2})^{(1-\gamma)/\gamma} = 459 \text{ K}$, $w_{comp} = c_p(T_2 - T_1) = 169 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $q_{comb} = 841 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $w_{turb} = c_p(T_4 - T_3) = -w_{comp}$, $T_4 = 1131 \text{ K}$, $p_4 = 3,1 \text{ bar}$, $T_5 = T_4(\frac{p_4}{p_1})^{(1-\gamma)/\gamma} = 819 \text{ K}$, $v = \sqrt{2c_p(T_4 - T_5)} = 790 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\eta = \frac{T_4 - T_5}{T_3 - T_2} = 37\%$.

14. Cycles thermiques

Réponses : $W + q + Q = 0$, $\frac{Q}{T_1} + \frac{q}{T_2} = 0$, $-W + q' + Q' = 0$, $\frac{q'}{T_2} + \frac{Q'}{T_3} = 0$, $\eta_1 = \frac{T_3(T_1 - T_2)}{T_1(T_3 - T_2)} = 5,5$; $W + q + Q = 0$, $\frac{Q}{T_1} + \frac{q}{T_3} = 0$, $-W + q' + Q' = 0$, $\frac{q'}{T_2} + \frac{Q'}{T_3} = 0$, $Q'' = q + Q'$, $\eta_1 = \eta_2$, ce qui est gagné par q est perdu en rendement du moteur; $Q_1 + Q_2 + Q_3 = 0$, $\frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} + \frac{Q_3}{T_3} = 0$, $e = \frac{Q_3}{Q_1}$, $e = \frac{T_3(T_1 - T_2)}{T_1(T_2 - T_3)} = 3,7$.

15. Rendements...

Réponses : on a $\eta_0 = -\frac{W}{Q}$ avec $W_{max} + Q + Q_f = 0$ et $\frac{Q}{T_1} + \frac{Q_f}{T_2} = 0$, on obtient $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1}$. La résistance thermique se définit par analogie avec l'électricité $R_{th} = \frac{1}{G_{th}} = \frac{T_1 - T_3}{P_c}$ où P_c est la puissance thermique échangée avec la source chaude, on a $Q = P_c \tau = G_{th}(T_1 - T_3)\tau$. On a $W = -(1 - \frac{T_2}{T_3})Q = -(1 - \frac{T_2}{T_3})(T_1 - T_3)G_{th}\tau$. On en tire $P = -\frac{W}{\tau} = T_1 + T_2 - (T_3 + \frac{T_1 T_2}{T_3})$. $\frac{dP}{dT_3} = \frac{T_1 T_2}{T_3^2} - 1 = 0$ pour $T_3 = \sqrt{T_1 T_2}$. On a alors $\eta_1 = 1 - \frac{T_2}{T_3} = 1 - \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}$ et donc $\eta_1 = 1 - \sqrt{1 - \eta_0}$. Pour $\eta_0 \ll 1$, on peut écrire $\eta_1 \simeq \frac{\eta_0}{2}$. L'entropie créée est d'autant plus importante que le cycle est rapide. La forme proposée avec $\Sigma > 0$ correspond bien au second principe où l'entropie créée ne peut qu'être positive ou nulle. $W + Q + Q_f = 0$, $\frac{Q_f}{T_2} + \frac{Q}{T_1} + \frac{\Sigma}{\tau} = 0$ d'où $W = -[Q(1 - \frac{T_2}{T_1}) - \frac{T_2 \Sigma}{\tau}]$, la puissance est $P = -\frac{W}{\tau} = Q(1 - \frac{T_2}{T_1})\frac{1}{\tau} - \frac{T_2 \Sigma}{\tau^2}$. La puissance est maximale pour $\frac{dP}{d\tau} = 0$, cela se produit pour $\tau_2 = \frac{2T_2 \Sigma}{Q(1 - \frac{T_2}{T_1})}$.

On alors trouve un rendement $\eta_2 = -\frac{W}{Q} = \frac{1}{2}(1 - \frac{T_2}{T_1})$. Le rendement idéal est $\eta_0 = 1 - \frac{T_2}{T_1} = 0,50$, en prenant en compte la conductance thermique, on a $\eta_1 = 0,30$ et enfin le modèle avec création d'entropie on a $\eta_2 = 0,25$. Comme la valeur du rendement est $\eta = 0,36$, on est dans une situation de compromis pour ne pas trop créer d'entropie tout en ayant assez de puissance disponible.

16. Centrale nucléaire

Réponses : Il s'agit de faire un bilan énergétique pour un système en écoulement ce qui revient à étudier une masse entrante dm_e qui devient, en quelque sorte une masse sortante, dm_s . On montre alors par bilan de matière, comme en cours, qu'en régime stationnaire, la masse sortante correspond à la masse entrante, soit $dm = dm_e = dm_s$. On arrive rapidement à $dm(u_s - u_e) = (P_e v_e - P_s v_s)dm + \delta Q$ puisque les variations d'énergie cinétique et potentielle sont a priori négligeables. Il reste, en posant h l'enthalpie massique et en rappelant que δQ est la chaleur reçue par le fleuve depuis la centrale, $dm(h_s - h_e) = \delta Q$. Or, l'eau est incompressible et $h_s - h_e \simeq c \Delta T$ où ΔT est la variation de température de l'eau au cours du passage près de la centrale. De plus, $dm = \rho \mathcal{D}_{vol} dt$. Ainsi, $\rho \mathcal{D}_{vol} c_p \Delta T = \frac{\delta Q}{dt}$. Il ne reste qu'à calculer la puissance thermique $\delta Q/dt$ reçue par le fleuve à cause de la centrale. Pour ce faire, on s'intéresse à la centrale en la modélisant comme une machine thermique : $\delta Q_1 < 0$, $\delta W < 0$, $\delta Q_2 > 0$ où le fleuve constitue la source froide de cette machine (sa température $T_1 = 300 \text{ K}$ est supposée constante car on se doute que la centrale ne doit pas beaucoup la modifier. C'est souhaitable pour les poissons!). Le rendement de celle-ci est par définition $\eta = \frac{-\delta W}{\delta Q_2} = \frac{P dt}{\delta Q_2}$. On donne la valeur du rendement de la centrale dans l'énoncé : $\eta = \frac{60}{100} \eta_{CARNOT} = \frac{60}{100} (1 - \frac{T_1}{T_2})$. Alors $\delta Q_2 = \frac{P}{\eta} dt$ et $\delta Q_1 = -\delta W - \delta Q_2 = P dt - \frac{P}{\eta} dt$. Finalement, l'équation d'évolution de la température de l'eau du fleuve devient $\rho \mathcal{D}_{vol} c_p \Delta T = -\frac{\delta Q_1}{dt} = P(-1 + \frac{1}{\eta})$ soit $\Delta T = \frac{P}{\rho c_p \mathcal{D}_{vol}} (-1 + \frac{1}{\eta})$. En prenant, comme d'habitude, des précautions avec les unités, on trouve $\Delta T = 1,14 \text{ K}$. Cette variation de température correspond à l'élévation de

la température pour l'eau du fleuve utilisée par la centrale. Lorsqu'elle est re-mélangée à l'eau du fleuve non utilisée qui représente 20% du débit, on a, en réalité, 80% de cet élévation par effet de dilution $\Delta T' = 0,91$ K. On vérifie que la variation de température est faible, mais la situation peut être critique pour la survie des poissons et des plantes aquatiques qui vont souffrir d'un manque de dioxygène O_2 . En effet, la solubilité d'un gaz dans l'eau est d'autant meilleure que la température de l'eau (liquide) est faible. Il y a déjà canicule, donc moins d'oxygène, la centrale aggrave un peu le phénomène. En plus comme le débit du fleuve est moindre, la concentration en polluants réguliers dissous est forcément plus élevée. Il est fréquent qu'en période de canicule, on soit obligé d'arrêter des centrales nucléaires car leur refroidissement n'est pas aussi efficace d'une part mais aussi parce que l'élévation de température de l'eau de refroidissement rejetée devient critique. L'arrêt de la centrale pose un sérieux problème car les périodes de canicule représentent toujours un pic important de demande d'électricité aussi important - voire plus - que les périodes de froid intense l'hiver.

17. Parc éolien en montagne

Réponses : le débit volumique et le débit massique sont reliés par $\mathcal{D}_m = \rho_e \mathcal{D}_v$. On peut donc calculer $\mathcal{D}_{v,1} = \mathcal{D}_m / \rho_e = 0,70098 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\mathcal{D}_{v,2} = 0,70077 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$. Il est assez évident que l'on peut considérer le débit volumique comme constant. D'ailleurs l'écart relatif des masses volumiques est d'environ 3×10^{-4} ce qui était déjà suffisamment significatif pour conclure sans effectuer de calculs. On écrit le premier principe industriel ou en écoulement stationnaire à l'eau. On a $\mathcal{D}_m(\Delta e_c + \Delta e_{pot} + \Delta h) = P_m + P_{th}$. On a $\Delta e_c \simeq 0$ d'après les hypothèses de l'énoncé ce qui est très raisonnable puisque la conduite présente une section constante et que l'eau est à l'état liquide donc quasi-incompressible. La variation d'enthalpie est $\Delta h = c_p(T_{\text{haut}} - T_{\text{bas}})$. $\Delta e_{pot} = g\Delta z = g(z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}})$. On en déduit que $P_{th} = \mathcal{D}_m(c_p(T_{\text{haut}} - T_{\text{bas}}) + g(z_{\text{haut}} - z_{\text{bas}})) - P_m$. On trouve que $P_{th} = -8,7$ MW. L'eau qui monte dans le tuyau perd beaucoup d'énergie thermique, elle se refroidit ce qui n'est pas étonnant en montagne avec un tel dénivelé.

C. Utilisation du diagramme H-ln(P)

18. Patinoire olympique

Réponses : A se situe à l'extrémité droite du palier de changement d'état à $P_A = 2,8$ bar et $T_A = -10^\circ\text{C}$. Pour trouver le point B , il faut suivre l'isentropique $s = 5,75 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$ puisque l'on suppose la transformation adiabatique et réversible. Les points A et B sont caractérisés par les enthalpies massiques $h_A = 1400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ et $h_B = 1600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. En appliquant le premier principe de la Thermodynamique à l'ammoniac en régime d'écoulement stationnaire, on a $h_B - h_A = w_{comp} + q_{AB} = w_{comp} = 200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ où w_{comp} est le travail utile de compression. Le point C se situe sur une horizontale puisque la transformation est isobare, il se situe à l'extrême gauche du palier de changement d'état à la pression $P_C = 10,0$ bar. La température correspondante est de 25°C et l'enthalpie massique $h_C = 200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Comme ensuite la détente est isenthalpique, on suit une verticale $h_D = h_A = 200 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Par le théorème des moments, on détermine la proportion de vapeur dans le mélange diphasé : $x_D \simeq 10\%$. L'efficacité de la machine frigorifique est le rapport de l'énergie utile, c'est-à-dire échangée avec la source froide (ici la glace de la patinoire) et l'énergie coûteuse à savoir le travail de compression à fournir. On a donc $e = \frac{q_{DA}}{w_{comp}} = \frac{h_A - h_D}{h_B - h_A}$. On trouve $e = 7$. La machine de CARNOT fonctionne entre une source froide à la température $T_f = -5^\circ\text{C}$ et une source chaude à la température $T_c = 20^\circ\text{C}$. On peut écrire le premier et le second principe $w + q_f + q_c = 0$ et $\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} = 0$. On trouve alors que $e_c = \frac{T_f}{T_c - T_f} = 10,7$. Cette efficacité est nécessairement supérieure à celle que l'on a calculée, cela est la conséquence des irréversibilités qui se manifestent sur toutes les étapes, en particulier celles où il y a des échanges thermiques. L'étape qui permet de maintenir la glace en bon état est $D \rightarrow A$, le transfert thermique frigorifique est $q_{DA} = h_A - h_D = 1400 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. La puissance frigorifique est donc $P_{fr} = \mathcal{D}_m q_{DA}$, on en déduit que $\mathcal{D}_m = 0,11 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

19. Terminal GNL de Dunkerque

Réponses : On voit que la courbe de changement d'état à -160°C se situe légèrement au-dessus de la pression de 1 bar. La température est donc un peu en-dessous de cette dernière à savoir : -162°C . On est sur la courbe de saturation, très proche de la première courbe iso-volume que fournit le diagramme, on peut donc conclure que $v \simeq 0,005 \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1}$. Un liquide occupe un volume beaucoup moins grand, environ 1000 fois, qu'un gaz. C'est nettement mieux pour le stockage. De plus pour en faire une distribution, cela n'impose pas d'avoir un réseau enterré de conduites de gaz. On écrit la loi des nœuds en entrée puisque le régime permanent est assuré : $\mathcal{D}_m + \mathcal{D}_{m1bis} = \mathcal{D}_{m1}$. Avec la relation $\mathcal{D}_{m1bis} = x\mathcal{D}_{m1}$, on arrive à $\mathcal{D}_{m1} = \frac{\mathcal{D}_m}{1-x} = 2,56 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Par conséquent, $\mathcal{D}_{m1bis} = 1,56 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Sur le graphique, on place les points avec les informations que l'on possède et on lit l'enthalpie massique avec une certaine imprécision... Cela donne $h_7 = 430 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$, $h_{7bis} = 370 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Pour h_9 , il faut comprendre que l'on a de la vapeur saturante à la pression de 1 bar, on lit sur le palier de changement d'état à droite et on trouve $h_9 = 500 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Dans le récupérateur R , on écrit que l'enthalpie est conservée, c'est-à-dire que l'enthalpie qui entre est égale à celle qui sort. Cela donne $\mathcal{D}_{m1bis}h_{1bis} + \mathcal{D}_{m1}h_{7bis} = \mathcal{D}_{m1}h_7 + \mathcal{D}_{m1bis}h_9$. Cela permet de trouver $h_{1bis} = h_9 + \frac{1}{x}(h_7 - h_{7bis}) = 600 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. De la même façon, on

écrit la conservation de l'enthalpie dans le mélangeur $\mathcal{D}_m h_0 + \mathcal{D}_{m1bis} h_{1bis} = \mathcal{D}_{m1} h_1$, on trouve par lecture sur le graphique $h_0 = 870 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ (1 bar et 7°C) et donc $h_1 = (1-x)h_0 + xh_{1bis} = 705 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. En plaçant le point 1 et en suivant une isentropique jusqu'à la pression de 5 bar, on arrive au point 2 et on lit $h_2 = 900 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$. Comme la compression est adiabatique, on a $P_{comp} = \mathcal{D}_{m1}(h_2 - h_1) = 500 \text{ kW}$. Chaque seconde, on produit $\mathcal{D}_{m1} - \mathcal{D}_{m1bis} = \mathcal{D}_m = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ de méthane liquéfié. Il faut donc $\Delta t = 1000 \text{ s}$ pour obtenir une tonne et donc $E = P\Delta t = 500 \text{ kWh}$ ce qui représente 75 euros. Cette somme est nettement inférieure à celle avancée, il y a des coûts qui n'apparaissent pas avec le modèle simplifié présenté. Quoi qu'il en soit, la production de GNL représente un coût énergétique d'environ 1/60 de son pouvoir énergétique, cela reste faible. La solution est viable sur le plan économique.

20. Pompe à chaleur pour un bâtiment

Réponses : $W + Q_c + Q_f = 0$ et $\frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$ d'où $COP_{rev} = \frac{T_c}{T_c - T_f} = 5,4$. Le point 1 est situé légèrement à droite de la courbe de saturation en domaine vapeur à la pression de 6 bar. Le point 2 est obtenu en suivant l'isentropique conduisant à 90°C et une pression d'un peu plus de 30 bar dans le domaine vapeur. On se dirige au point 3 par une isobare jusqu'au point correspondant au liquide saturé. Ensuite, on effectue une descente verticale (isenthalpique) jusqu'à un point 4 situé en mélange liquide-vapeur à la pression de 6 bar. On a $COP = \frac{|Q_c|}{W} = \frac{h_2 - h_3}{h_2 - h_1} = \frac{460 - 300}{460 - 425} = 4,6$. La COP réel est plus faible, il y a non prise en compte d'irréversibilités dans le cycle décrit en particulier sur la compression isentropique 1-2. La puissance absorbée est la puissance mécanique. La puissance fournie à la source chaude est donc $P_c = COP \times P_m = 120 \text{ kW}$. Comme il faut fournir $P_{ch} = 900 \text{ kW}$, il faut $n = 8$ pompes à chaleur car 7 ne suffisent pas. La puissance fournie est $P_{tot} = n\mathcal{D}_m c_p (70 - 19)$, on trouve $\mathcal{D}_m = 0,53 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$.

D. Statique des fluides

21. Récipient à 2 échappements

Réponses : soit μ la masse volumique du bloc, son poids est $\mu V g$ si V est son volume. La poussée d'ARCHIMÈDE est égale au poids du volume de fluide déplacé, ici il faut décomposer en $\frac{4}{5}V$ et $\frac{1}{5}V$. On a donc $\Pi_A = \frac{4}{5}\mu_{\text{eau}} V g + \frac{1}{5}\mu_{\text{huile}} V g$. En écrivant $\mu V g = \Pi_A$, on arrive à $\mu = \frac{\mu_{\text{huile}} + 4\mu_{\text{eau}}}{5} = 980 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. La bonne réponse est donc la réponse b).

22. Pression au fond d'un récipient

Réponses : À l'équilibre, la pression traduit le poids de la colonne de matière située au-dessus de la surface du fond du récipient. Le poids de la colonne d'atmosphère est déjà traduit par la pression atmosphérique. Il faut ajouter le poids du piston et celui du volume d'eau. On divise par la surface S pour traduire cela en pression, la pression au fond du récipient est donc $P_{fond} = P_{atm} + \frac{(m_{\text{eau}} + m)g}{S} = 1,07 \times 10^5 \text{ Pa}$. C'est la réponse d) qui convient.

23. La fosse des Mariannes

Réponses : la loi de la statique des fluides indique que $\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g} = \rho_0 g \vec{e}_z$ en orientant l'axe Oz vers le bas. On a $P = P_0 + \rho_0 g z$. On trouve $P = 1116 \text{ bar}$. On a $\frac{d\rho}{\rho} = \chi_T dP$ d'où $\rho = \rho_0 \exp(\chi_T(P - P_0))$. On a maintenant $dP \exp(-\chi_T(P - P_0)) = \rho_0 g dz$ qui par intégration conduit à $P = P_0 - \frac{1}{\chi_T} \ln(1 - \chi_T \rho_0 g z)$. On trouve $P = 1148 \text{ bar}$. L'écart relatif est de 2,8%, c'est faible mais le coefficient de compressibilité de l'eau est très faible. On aurait pu effectuer des développements limités dans les calculs. Considérer l'eau liquide comme incompressible est plutôt satisfaisant.

24. Ballon sonde

Réponses : la loi de la statique des fluides conduit à $\overrightarrow{\text{grad}} P = \rho \vec{g}$, $P(z) = P_0 \exp(-\frac{Mgz}{RT_0})$. On a $T_{MB} = T_0(1 - ah)$ avec $h = 4807 \text{ m}$ d'où $a = \frac{T_0 - T_{MB}}{T_0 h} = 2,84 \times 10^{-5} \text{ m}^{-1}$. Avec $\rho = \frac{MP}{RT(z)}$, on a $\frac{dP}{dz} = -\frac{Mg}{RT_0} \frac{P}{1 - az}$ que l'on écrit $\frac{dP}{P} = \frac{Mg}{RT_0 a} \frac{-adz}{1 - az}$. On pose $\alpha = \frac{Mg}{RT_0 a} = 4,11$ et on obtient $P(z) = P_0(1 - az)^\alpha$. Au sommet du Mont-Blanc, on trouve $P_{MB} = 0,54 \text{ bar}$. La masse d'hélium est $m_{\text{He}} = \frac{P_0 V M_{\text{He}}}{RT_0} = 0,5 \text{ g}$, avec l'enveloppe cela fait une masse totale $m_{tot} = 2,5 \text{ g}$. Il monte jusqu'à ce que la poussée d'ARCHIMÈDE soit égale au poids $m_{tot}g$, la poussée est $\rho(z)Vg$ d'où $\rho(z) = \frac{m_{tot}}{V} = 0,83 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. $\rho = \frac{P(z)M_{\text{air}}}{RT(z)} = \frac{P_0 M_{\text{air}}}{RT_0} (1 - az)^{\alpha-1}$ d'où $z_b = \frac{1}{a} (1 - \frac{0,83}{1,19})^{1/3,11} = 3870 \text{ m}$.

25. Profil d'un barrage

Réponses : Dans l'eau incompressible, la loi de l'hydrostatique donne $P(z) = P_0 + \rho_0 g (H - z)$ et $P(H) = P_0$. La résultante des efforts de pression s'exerçant sur le barrage est donnée par l'expression $\vec{F} = \iint_{\text{eau/barr.}} P(M) dS \vec{e}_x$ soit $\vec{F} = \int_0^H [P_0 + \rho_0 g (H - z)] L dz \vec{e}_x$ d'où $\vec{F} = LH (P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2}) \vec{e}_x$. Le centre de poussée est le point d'application des efforts de pression de l'eau sur le barrage. Il se trouve forcément sur l'axe Oz et il reste à

déterminer sa côte z_C . On la détermine en écrivant que le moment au point C des forces réparties de pression est nul (définition d'un point d'application). On se doute déjà que $z_C < H/2$, la pression diminuant quand z augmente au sein du fluide. La force répartie de pression à la côte z et le moment associé par rapport à C valent $d\vec{F} = P(z) L dz \vec{e}_x$ et $d\vec{M}(C) = \vec{CM} \wedge d\vec{F} = (z - z_C) P(z) L dz \vec{e}_y$. Au total, $\vec{M}(C) = \int_0^H (z - z_C) dF \vec{e}_y = \vec{0}$ d'où $z_C F = \int_0^H z dF = \int_0^H z P(z) L dz$ soit $z_C F = \int_0^H [P_0 + \rho_0 g (H - z)] L dz$. Il ne reste qu'à calculer l'intégrale et, connaissant F , on déduit $z_C = \frac{H}{2} \frac{P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2}}{P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2}} < \frac{H}{2}$. Le profil du barrage correspond désormais à la courbe d'équation $z = f(x)$. Notons s l'abscisse curviligne repérant, à partir de O , tout point M de cette courbe. Calculons la force élémentaire s'exerçant sur la bande de longueur L et de largeur ds où s est l'abscisse curviligne le long de la courbe. $d\vec{F} = P(M) \vec{n} dS$ où $dS = L ds$. De plus, $P(M) = P_0 + \rho_0 g (H - z)$. On projette la force sur les axes Ox et Oz (pas d'autres composantes par symétrie) : $dF_x = P(M) \cos \alpha L ds = P(z) L dz$ et $dF_z = -P(M) \sin \alpha L ds = -P(z) L dx$. Au total, on trouve par conséquent $F_x = L \int_0^H P(z) dz$ et $F_z = -L \int_0^{x_0} P[f(x)] dx$. Finalement, en remplaçant l'expression de la pression, on tire $F_x = L H (P_0 + \rho_0 g \frac{H}{2})$ et $F_z = -L \int_0^{x_0} [P_0 + \rho_0 g (H - f(x))] dx$ où $H = f(x_0)$. Pour un profil parabolique $z = x^2/h$, il vient $H h = x_0^2$ donc $x_0 = \sqrt{Hh}$ et le calcul de l'intégrale pour F_z donne $F_{z\text{para}} = -L \sqrt{Hh} (P_0 + \frac{2}{3} \rho_0 g H)$. On pourrait s'étonner que la composante F_x de la résultante des efforts de pression de l'eau sur le barrage ne dépende pas de son profil. Pour s'en convaincre aisément, considérons le volume de fluide délimité par le barrage et le plan $x = 0$. Écrivons qu'il est en équilibre sous l'effet de son poids, des efforts de pression (eau et air) et de la réaction du barrage sur l'eau : $M_e \vec{g} + \vec{F}_0 + \vec{F}_1 + (-\vec{F}) = \vec{0}$ où \vec{F} est la force que l'on cherche. On projette cette équation sur l'axe des x : $0 + 0 + F_1 - F_x = 0$. On en déduit que $F_x = F_1$ et ne dépend pas du profil du barrage ! On peut profiter de la remarque précédente pour calculer la composante F_z , en projetant maintenant sur l'axe des z : $-M_e g - F_0 + 0 - F_z = 0$ soit $F_z = -M_e g - F_0$ où $F_0 = P_0 L x_0$ et $M_e = \rho_0 L S$ avec S l'aire de la surface du volume d'eau considéré, soit $S = \int_0^{x_0} (H - z) dx$. Finalement $F_z = -P_0 L x_0 - \rho_0 L g \int_0^{x_0} (H - z) dx$ qui s'écrit $F_z = -L \int_0^{x_0} [P_0 + \rho_0 g (H - f(x))] dx$.

26. Jouons avec un verre d'eau

Réponses : On se place juste à l'épaisseur critique et on effectue un bilan des forces agissant sur le disque à l'équilibre en prenant un axe (Oz) vertical ascendant : son poids $m_e \vec{g} = -\rho g e_c \pi r'^2 \vec{e}_z$, les forces de pression de l'air $\vec{F}_{air} = P_{atm} \pi r'^2 \vec{e}_z$ et les forces de pression de l'eau $\vec{F}_{eau} \simeq -\rho_{eau} g h \pi r'^2 \vec{e}_z$ (on a fermé le verre sans chercher à comprimer l'eau avec le disque) ; ces forces sont négligeables car correspondent à une pression de l'ordre de 0,01 bar. À la limite critique, les forces se compensent juste et on tire $e_c = \frac{P_{atm} r'^2}{\rho g r'^2} = 0,5 \text{ m}$. L'expérience est aisément réalisable avec une feuille cartonnée (tant qu'elle reste étanche...). On note que l'épaisseur critique est très élevée, ce qui met en exergue l'importance des forces de pression.

27. Film liquide sur une paroi

Réponses : $\frac{dp}{dz} = -\frac{4Cp}{z^4 k_B T}$ et $p = p_\infty \exp \frac{C}{k_B T z^3}$, $p \rightarrow \infty$ si $z \rightarrow 0$ on atteint forcément la pression de vapeur saturante, $p^{sat}(T) = p_\infty \exp \frac{C}{k_B T e^3}$, $e \simeq 1,3 \times 10^{-9} \text{ m}$, $a = n^{-1/3} \simeq 3 \times 10^{-10} \text{ m}$, a et e même ordre de grandeur, le film n'existe pas vraiment, si film $T = \text{Cte}$ tant qu'il y a vaporisation du film et sans film T va augmenter tout de suite.

28. Instabilité thermodynamique d'une étoile

Réponses : κ sans dimension ; $\Delta T = -\frac{g M m}{\kappa k_B} \frac{\Delta R}{R^2}$, $\Delta R < 0 \Delta T > 0$; $U = -E_c$, $E_c = \frac{M}{m} \frac{3}{2} k_B T$, $C_V = (\frac{\partial U}{\partial T})_V = -\frac{3Mk_B}{2m} < 0$, T augmente, l'énergie diminue ; $dU_1 + dU_2 = 0$, $dS_1 + dS_2 \geq 0$; $dU_1 = T_1 dS_1 = C_{V1} dT_1$; $C_{V1} dT_1 (\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}) \geq 0$, si $T_1 > T_2$ alors $dT_1 > 0$ et $dT_2 < 0$, instable.

29. Balle de tennis bouchant un abreuvoir

Réponses : Pour des raisons de symétrie, la force due à la pression de l'eau exercée sur la balle de tennis est verticale, on la note f_z . Si N , elle aussi verticale, est la force de contact entre la baignoire et la balle, on peut écrire à l'équilibre au fond de la baignoire $N - mg + f_z = 0$ et donc $N = mg - f_z$. Si $N > 0$ alors la balle de tennis reste au fond de la baignoire et empêche qu'elle se vide mais si N s'annule alors la baignoire se vide. Il faut donc calculer f_z . L'eau étant incompressible, $\frac{dp}{dz} = -\mu g$ donne une loi affine de z pour la pression s'exerçant sur la balle de tennis. Comme la pression p_0 va contribuer en tout point de la sphère, elle n'intervient pas dans le bilan des forces pressantes, seule la surpression Δp compte. On note $\theta_0 > \pi/2$ l'angle entre l'axe Oz et la direction marquant le contact entre la balle de tennis et la baignoire. On a $\cos \theta_0 = -\frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{R}$ et $\sin \theta_0 = \frac{r}{R}$. En un point sous l'eau de la surface de la balle de tennis repéré par l'angle θ , on a une surpression $\Delta p = \mu g (H - R(\cos \theta - \cos \theta_0))$. La force exercée par l'eau sur une surface élémentaire est $d\vec{f} = -\Delta p R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$. Seule la projection de cette force sur l'axe Oz contribue à f_z , on a $df_z = -\mu g R^2 (H + R \cos \theta_0 - R \cos \theta) \cos \theta \sin \theta d\theta d\varphi$. On intègre pour $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \theta_0$ et $\varphi = 0$ jusqu'à $\varphi = 2\pi$. On trouve $f_z = -\mu g \pi R^2 [H(1 - \cos^2 \theta_0) + \frac{R}{3} (3 \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 - 2)]$. Cette

expression fonctionne dans le cas où la balle de tennis serait complètement immergée, on aurait $\cos \theta_0 = -1$, on retrouve alors $f_z = \frac{4}{3}\pi R^3 \mu g$, c'est-à-dire le poids du volume de fluide déplacé. à partir de l'expression de f_z , on arrive à l'expression de $N = g(m + \mu \frac{4}{3}\pi R^3 [\frac{3H}{4R}(1 - \cos^2 \theta_0) + \frac{1}{4}(3 \cos \theta_0 - \cos^3 \theta_0 - 2)])$. Avec les valeurs numériques proposées, on trouve bien $N > 0$ puisque $N = 153 \text{ N}$.

30. La sève dans un arbre

Réponses : $\mu = 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, loi de la statique $\overrightarrow{\text{grad}} p = \mu \vec{g}$, $\frac{dp}{dz} = -\mu g$, $\Delta p = p(h) - p(0) = -\mu g h = -3 \text{ bar}$, dPr^2 est une force en $\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, la viscosité dynamique η est en $\frac{\text{kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}} = \text{kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$, la pression diminue dans le sens de l'écoulement, c'est logique puisqu'il y a des frottements il faut une pression plus élevée en amont qu'en aval pour que le fluide puisse vaincre les frottements et puisse s'écouler, le profil des vitesses est parabolique, à cause des frottements la vitesse de la couche de fluide au contact de la paroi est nulle, $\mathcal{D}_{vol} = \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} v(r) r dr d\theta$, $\mathcal{D}_{vol} = -\frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{dp}{dz}$, la vitesse moyenne se définit par $\mathcal{D}_{vol} = \pi R^2 v_{moy}$, on a donc $\mathcal{D}_{vol} = 8,7 \times 10^{-12} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$ et $\frac{dp}{dz} = -2,2 \times 10^{-3} \text{ bar}$, ce gradient (en valeur absolue) est très petit devant le gradient hydrostatique.