

Exercices : 14 - Conduction - Convection - Rayonnement

A. Régime stationnaire

1. Température d'interface et régime stationnaire

On met en contact, suivant leur surface commune, d'aire S , deux conducteurs thermiques limités par des plans parallèles. En régime stationnaire, l'ensemble des deux conducteurs, de même épaisseur e , se comporte comme un système dont l'état ne dépend que de la seule coordonnée spatiale z le long de l'axe perpendiculaire à leur plan. En outre, les températures des faces des deux conducteurs qui ne sont pas en contact sont maintenues aux valeurs $T_1 = 293\text{ K}$ et $T_2 = 373\text{ K}$ respectivement. On désigne par λ_1 et λ_2 les conductivités thermiques des deux corps.

1. Quelle est l'expression de la résistance thermique de chaque conducteur en fonction de e , S et de sa conductivité thermique? En déduire la résistance thermique R_{th} de l'ensemble des deux conducteurs placés en série.
2. En s'appuyant sur l'analogie avec la loi d'Ohm, montrer que la température T_i à l'interface est telle que : $T_i - T_1 = \alpha(T_2 - T_1)$ où α est une quantité que l'on exprimera en fonction des résistances thermiques R_{th1} et R_{th2} des deux conducteurs. En déduire T_i en fonction de T_1 , T_2 , λ_1 et λ_2 .
3. Application : Calculer T_i pour un conducteur organique comme le corps humain, ($\lambda_1 = 0,5\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) en contact avec du bois ($\lambda_2 = 0,2\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$) puis en contact avec du cuivre ($\lambda_2 = 390\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$).

2. Isolation d'une maison

On considère une maison pendant les trois mois d'hiver où la température intérieure de la maison est $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et la température extérieure $T_\infty = 5^\circ\text{C}$. Elle perd de l'énergie par ses quatre murs d'une surface totale $S = 200\text{ m}^2$. Les murs sont en brique de conductivité thermique $\lambda_1 = 1,2\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et d'épaisseur $e_1 = 20\text{ cm}$. L'air extérieur est caractérisé au niveau de la surface du mur par un coefficient de convection $h = 10\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$. On étudie uniquement le régime permanent ou stationnaire.

1. Effectuer un bilan local d'énergie et en déduire la forme de la loi d'évolution de la température dans la brique. Retrouver l'expression de la résistance thermique de conduction des murs de la maison en brique.
2. Calculer la résistance thermique de la maison en prenant en compte la convection.
3. Déterminer la puissance perdue par la maison en hiver. En déduire l'énergie totale perdue pendant tout l'hiver.
4. Sachant que chauffer la maison coûte 0,18 euro pour 1 kWh, quelle est la facture de chauffage pour l'hiver?

On isole la maison après la brique en créant une couche d'air immobile d'épaisseur $e_2 = 1\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_2 = 0,025\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$, suivi d'une couche de polystyrène d'épaisseur $e_3 = 5\text{ cm}$ et de conductivité thermique $\lambda_3 = 0,042\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

5. Calculer la nouvelle résistance thermique de la maison. En déduire la nouvelle puissance perdue.
6. Quelle est la facture de chauffage, pour l'hiver, avec l'isolation?
7. Déterminer la température T_i à l'interface entre l'air et le polystyrène.

3. Résistance thermique cylindrique, sphérique

On considère un manchon cylindrique de conductivité λ , de hauteur H , de rayon intérieur r_1 et de rayon extérieur r_2 . La paroi intérieure est portée à la température T_1 et la paroi extérieure à $T_2 > T_1$. Le régime permanent indépendant du temps est établi.

1. Représenter les lignes de densité de courant de transfert thermique. Réfléchir aux invariances et aux symétries.
2. En déduire la forme de dépendance en fonction de r du vecteur densité de courant de transfert thermique et de la température $T(r)$.
3. Calculer la résistance thermique équivalente de ce manchon.
4. Reprendre la même étude pour une coquille sphérique.

4. Ailettes de refroidissement

Pour éviter l'échauffement d'un appareil dû à l'effet Joule, on munit son boîtier d'ailettes de refroidissement métalliques. Chaque ailette est parallélépipédique, de dimensions $a = 2,0$ mm (épaisseur), $b = 10$ cm (largeur) et $c = 20$ cm (longueur). On pourra admettre que a est négligeable devant b . En fonctionnement, le boîtier de l'appareil M sera maintenu à la température $T_M = 60^\circ\text{C}$. L'air extérieur, qui circule, est de température constante et uniforme $T_A = 20^\circ\text{C}$, sauf au voisinage immédiat de l'ailette, entourée d'une couche limite d'air thermiquement peu conductrice dont la température reste localement voisine de celle de la surface de l'ailette. Dans l'ailette, on admettra que le transfert thermique, de type conductif, est monodimensionnel dans la direction de l'axe Ox . Il obéit à la loi de Fourier, la conductivité thermique étant $\lambda = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On note $T(x)$ la température de l'ailette à l'abscisse x . Il existe aussi un transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant, à travers la couche limite. Le flux thermique au niveau d'une surface dS de l'élément de l'ailette de longueur dx est de la forme :

$$dP = h(T(x) - T_A)dS$$

où $h = 150$ SI est un coefficient uniforme et constant.

1. Expliquer la loi de FOURIER et donner l'unité du coefficient h dans le système international.
2. Écrire le bilan des transferts d'énergie pour la tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$, en régime permanent. On posera : $L = \sqrt{\frac{\lambda a}{2h}}$ et on donnera la valeur numérique de L ainsi que son unité. En déduire l'équation différentielle dont $T(x)$ est la solution.
3. Résoudre cette équation différentielle pour déterminer l'expression de $T(x)$. On vérifiera que $L \ll c$ et on pourra considérer c comme infini pour simplifier.
4. Donner l'expression de la puissance thermique dP sortant de la surface latérale dS de la tranche d'ailette comprise entre les abscisses x et $x + dx$. En déduire l'expression de la puissance thermique totale P évacuée par l'ailette, faire l'application numérique.
5. Exprimer et calculer la puissance thermique transmise du boîtier de l'appareil M à l'ailette en $x = 0$. Conclure.
6. Combien faudrait-il fixer d'ailettes sur le boîtier pour évacuer un flux thermique total de $0,9$ kW ? La taille de chaque ailette peut-elle être réduite sans changer notablement l'ensemble des résultats précédents ? Si oui, expliquer comment et pourquoi.

5. Géothermie

La croûte continentale terrestre a une épaisseur l d'environ 35 km ; elle est équivalente à une couche homogène de conductivité $\lambda = 23 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Au niveau du sol, la température est $T_2 = 273$ K, et à la profondeur l , elle vaut $T_1 = 873$ K.

1. Calculer la puissance géothermique par unité de surface J_{th} issue de la croûte continentale.
2. Les éléments radioactifs de la croûte dissipent une puissance volumique $\sigma_u = 3 \times 10^{-3} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par la température de la croûte.
3. En déduire la puissance géothermique par unité de surface, J'_{th} , au niveau du sol, quand on tient compte des éléments radioactifs. Conclure.

6. Isolation d'un oléoduc

Un oléoduc de diamètre $100/108$ mm est fait d'un tube en acier de conductivité thermique $\lambda_1 = 15 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Au début de l'oléoduc, il passe de l'huile chaude à la température $T_1 = 50^\circ\text{C}$. Le coefficient de convection entre le tube et l'huile est $h_i = 3000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$. Cet oléoduc est isolé par une couche de laine de verre d'épaisseur $e = 50$ mm et de conductivité thermique $\lambda = 0,042 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. L'oléoduc est aérien, il repose régulièrement sur des plots en béton dont on négligera l'influence. L'air extérieur est à la température de $T_\infty = -15^\circ\text{C}$ et le coefficient de convection entre l'air et l'oléoduc est $h_e = 30 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ en raison de la présence de la bise. Dans l'oléoduc, le débit d'huile est $D_m = 6,4 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. L'huile, liquide, possède la capacité thermique massique à pression constant $c_p = 2100 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. L'objectif de l'exercice est de déterminer la température de l'huile à la fin du parcours aérien de l'oléoduc après avoir parcouru $L = 10$ km.

1. On cherche à calculer la résistance thermique de conduction du tube en acier sur une longueur dz . En considérant un bilan local d'énergie en régime permanent entre les abscisse r et $r + dr$, montrer que la température obéit à l'équation différentielle $r \frac{dT}{dr} = \alpha$ où α est une constante. Intégrer cette loi et en déduire que la résistance du tube est $\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\lambda_1 2\pi dz}$ où R_1 et R_2 sont les rayons intérieurs et extérieurs du tube en acier.

- Montrer que la résistance de convection pour l'interface huile-tube est négligeable devant la résistance de conduction du tube.
- Déterminer l'expression de la résistance thermique associée à la laine de verre et à la convection avec la bise. En déduire que la résistance thermique totale est $\frac{\beta}{dz}$ avec $\beta = 2,53 \text{ K} \cdot \text{W}^{-1} \cdot \text{m}$, toujours une portion d'oléoduc de longueur dz .
- Donner l'expression du flux élémentaire $d\Phi$ perdu par la portion d'oléoduc comprise entre z et $z + dz$ en fonction de β , $(T(z) - T_\infty)$ et dz .
- En effectuant un bilan énergétique sur l'huile transportée entre les abscisses z et $z + dz$ entre les dates t et $t + dt$, établir que la température de l'huile obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT}{dz} + \frac{T}{\ell} = \frac{T_\infty}{\ell} \quad \text{avec} \quad \ell = \beta \mathcal{D}_m c_p$$

- Déterminer la valeur de ℓ et justifier son unité.
- Déterminer la température de l'huile au bout de la partie aérienne de l'oléoduc. Commenter.

7. Conduction thermique, création d'entropie

Une barre en fer, cylindrique, de section circulaire A uniforme (diamètre $D = 1,5 \text{ cm}$), de longueur $L = 1,3 \text{ m}$, a une extrémité à l'intérieur d'un four, à la température $T_f = 494 \text{ K}$ maintenue constante. L'autre extrémité est en contact avec le milieu ambiant qui se comporte comme un thermostat à la température $T_a = 300 \text{ K}$. La surface latérale est calorifugée de telle sorte que l'on peut négliger les déperditions latérales. On étudie la diffusion thermique le long de la barre. On désigne par λ la conductivité thermique du fer : $\lambda = 16 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. La diffusion thermique est stationnaire.

- Calculer, en s'aidant de l'expression de la résistance électrique d'un conducteur ohmique de même géométrie, la résistance thermique R_u de la barre ; préciser son unité SI.
- Écrire le bilan entropique pour un élément de barre, de longueur élémentaire dx , pendant la durée élémentaire dt .
- Trouver l'expression de l'entropie reçue (algébriquement) par cet élément. en fonction de dt , A , dx , λ , $T(x)$ (température au point d'abscisse x) et de sa dérivée dT/dx . L'axe Ox est orienté de l'extrémité O dans le four vers l'extrémité en contact avec le milieu ambiant.
- En déduire l'expression du taux de production d'entropie σ_S dans la barre, par unité de temps et par unité de volume. Quelle serait la production d'entropie pour un tel système à l'équilibre ? Sachant que le gradient de température le long de la barre est uniforme, calculer la production d'entropie aux extrémités. Application numérique.

8. Homéothermie

Une sphère de rayon a est maintenue en permanence à la température T_1 , dans un milieu fluide qui, à grande distance de la sphère, est à la température $T_0 < T_1$. La conductivité thermique du fluide est notée λ . On néglige toute discontinuité de température (transfert pariétal parfait) à la surface de la sphère. Le problème est étudié en régime permanent.

- Expliciter la puissance P thermique produite par la sphère.
- On donne $T_1 = 310 \text{ K}$, $T_0 = 280 \text{ K}$ et $a = 25 \text{ cm}$ (modélisation d'un animal homéotherme avec un rapport surface/volume comparable à celui d'un être humain). Calculer P si le fluide est de l'air ($\lambda = 2,6 \times 10^{-2} \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$).
- L'homéothermie est-elle plus aisée pour un petit animal ou pour un gros ?

9. Transferts entropiques

Dans un milieu conducteur thermique de conductivité λ , on pose $\vec{j}_S = -\lambda \overrightarrow{\text{grad}} \ln \frac{T}{T_0}$ où T_0 est une constante positive quelconque.

On note aussi s l'entropie massique et ρ la masse volumique du milieu étudié.

Enfin, l'irréversibilité des transferts thermiques impose la création d'une entropie par unité de temps et de volume de matériau \dot{s}_c .

- Relier \vec{j}_S , ρ , s et \dot{s}_c .
- On considère une transformation isobare et on note c_p la capacité thermique massique correspondante. ρ et c_p sont supposés constants. On étudie une situation unidimensionnelle en régime permanent. Exprimer \dot{s}_c , examiner son signe et conclure.

10. Effet Joule et effet Thomson

Sir WILLIAM THOMSON (LORD KELVIN) découvre en 1852 l'effet maintenant appelé JOULE-KELVIN ou effet THOMSON. Il résulte du passage d'un courant électrique dans un conducteur où règne un gradient de température. La puissance THOMSON absorbée - comme dans un puits où de l'énergie se perdrait - lors du passage d'un courant d'intensité I dans un tronçon de fil dont les extrémités sont portées à des températures différant de dT s'écrit $dP_T = hIdT$. Le coefficient h s'exprime en $V \cdot K^{-1}$. Il est appelé coefficient de THOMSON du conducteur. Cet effet dépend du sens du passage du courant. On convient de compter $h > 0$ si le passage d'un courant dans le sens des températures croissantes s'accompagne d'une absorption d'énergie. C'est le cas du cuivre.

1. On néglige dans un premier temps l'effet THOMSON pour se consacrer à l'étude de l'effet JOULE. Une barre conductrice en cuivre calorifugée de longueur L , de section S , de conductivité électrique γ et de conductivité thermique λ , est parcourue par un courant d'intensité I uniformément réparti. Les températures imposées aux extrémités sont T_1 en $x = 0$ et T_2 en $x = L$. La masse volumique du cuivre est μ , sa capacité thermique massique est c . La température $T(x, t)$ est identique en tout point d'abscisse x . Quelle est la puissance JOULE fournie à la barre entre les sections x et $x + dx$? Réaliser un bilan énergétique pour une section comprise entre x et $x + dx$. Trouver l'équation différentielle vérifiée par $T(x, t)$.
2. On considère le régime permanent $T(x)$. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ est : $\frac{d^2T}{dx^2} = -KI^2$. Calculer K pour la barre de cuivre avec $\lambda = 400 W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$, $\gamma = 6 \times 10^7 S \cdot m^{-1}$ et $S = 2 mm^2$. Déterminer $T(x)$. À quelle condition la fonction $T(x)$ passe-t-elle par un maximum entre $x = 0$ et $x = L$? On suppose que $T_2 - T_1 = 100 K$. Déterminer la valeur minimale I_1 que doit posséder l'intensité I pour qu'un maximum de température existe entre les extrémités du fil. La longueur est $L = 1 m$.
3. On prend en compte maintenant l'effet THOMSON et on se place en régime permanent dans la situation où le courant I et les températures T_1 et T_2 satisfont les conditions $I < I_1$ et $T_2 > T_1$. Le courant I circule dans le sens des températures croissantes. Trouver l'équation différentielle à laquelle obéit la distribution de température $T(x)$. Pour quelle valeur I_2 de l'intensité I obtient-on un gradient de température uniforme $\frac{dT}{dx} = \frac{T_2 - T_1}{L} = Cte$? Pour le cuivre $h = 2,2 \times 10^{-6} V \cdot K^{-1}$. Calculer I_2 en utilisant les données précédentes.

11. Amélioration de la conductivité thermique d'un liquide

On rappelle l'expression, pour une grandeur scalaire $F(r, \theta, \varphi)$ exprimée en coordonnées sphériques, du laplacien :

$$\Delta F = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial F}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2}$$

1. Un milieu conducteur thermique de conductivité λ est étudié en régime permanent. On étudie un cylindre de centre O , d'axe Oz , de hauteur L , de surface de base circulaire de rayon $L/2$, entièrement rempli de ce matériau (cf. fig. 1 à gauche); les surfaces de base du cylindre sont portées aux températures $T(z = -L/2) = T_1$ et $T(z = +L/2) = T_2$.

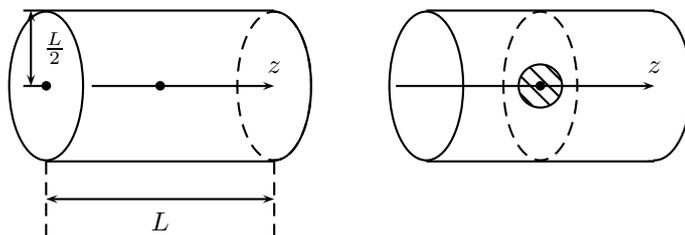


FIGURE 1 – Amélioration de la conductance thermique

Déterminer dans ce milieu la température $T(z)$. Calculer en particulier le flux thermique Φ à travers le cylindre étudié. On négligera tout effet de bord.

2. Dans le milieu précédent, on dispose dans le plan $z = 0$ une sphère, de rayon $a \ll L$, formée d'un matériau de conductivité thermique $\lambda' \gg \lambda$, de sorte que sa température soit considérée comme uniforme égale à $\frac{T_1 + T_2}{2}$ (cf. fig. 1 à droite). On cherche alors la température dans le milieu environnant, en coordonnées sphériques d'axe Oz , sous la forme $T(r, \theta) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{L} \cos \theta f(r)$.

(a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$.

- (b) Résoudre cette équation ; on pourra chercher des solutions de la forme $f(r) = Ar^u$. Montrer que la solution correspond à une combinaison linéaire des deux formes trouvées. On prendra garde à vérifier les conditions aux limites pour $r = a \forall \theta$ et pour $r = \frac{L}{2}$ en $\theta = 0$ par exemple sans oublier que $a \ll L$.
- (c) Exprimer le flux thermique conductif \vec{j}_c en tout point extérieur à la sphère.
- (d) Calculer le flux thermique Φ' à travers le disque de rayon $L/2$, situé dans le plan $z = 0$. Exprimer Φ' en fonction de Φ , a et L .
3. Un liquide homogène de conductivité thermique λ contient, à raison de n par unité de volume, des sphères de très forte conductivité thermique et de rayon a . En admettant que ces sphères soient bien dispersées dans le milieu liquide, montrer que la conductivité thermique du milieu semble améliorée par l'introduction de ces sphères ; calculer la conductivité thermique équivalente λ_e en fonction de λ , n et a .

12. Anémomètre à fil chaud

L'anémométrie à fil chaud est une technique expérimentale permettant de mesurer la vitesse d'un fluide. Son principe est le suivant : on fait parcourir un courant électrique dans un fil électrique pour le maintenir chaud. Le fluide qui s'écoule autour du fil a tendance à le refroidir et donc à faire chuter sa résistance électrique. Une mesure de cette dernière, après calibration, permet de calculer la vitesse du fluide. Ici, on considère un fil métallique conducteur cylindrique de rayon $R_0 = 10 \mu\text{m}$. Il est parcouru par une intensité $I = 1 \text{ A}$. La résistivité électrique du métal est $\rho_e = 1,8 \times 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$. Sa conductivité thermique est $\lambda = 370 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. Sa température en périphérie est $T_0 = 300 \text{ K}$.

- Déterminer le profil de température à l'intérieur du fil.
- Où se trouve la température maximale dans le fil ? Déterminer numériquement $T_{max} - T_0$. Conclure.

13. Exoplanète

Une exoplanète, de rayon $R = 1000 \text{ km}$, située loin de son étoile possède une température de surface $T_s = 300 \text{ K}$ bien supérieure à ce qu'elle devrait être si elle ne faisait que recevoir le rayonnement de l'étoile autour de laquelle elle gravite. On propose d'expliquer sa température de surface en considérant que son cœur est une boule radioactive de rayon $a = 10 \text{ km}$ dégageant une puissance volumique $p_0 = 3 \times 10^{-4} \text{ W} \cdot \text{m}^{-3}$ à cause de la désintégration radioactive des noyaux qui la composent. On considère que la planète est un milieu de conductivité thermique uniforme $\lambda = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$. On suppose que l'exoplanète est à symétrie sphérique et que l'on est régime indépendant du temps.

- Pour $r \leq a$, établir un bilan énergétique locale entre r et $r + dr$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par la température $T(r)$.
- En déduire la forme de la loi $T(r)$.
- On étudie maintenant la partie non radioactive de l'exoplanète. Quelle est l'équation différentielle vérifiée par $T(r)$? En déduire l'expression de $T(r)$.
- Déterminer la valeur numérique de la température au centre de l'exoplanète.

B. Régime dépendant du temps

14. Mise en équilibre thermique, analogie

On considère la conduction thermique entre deux sphères de rayons respectifs R_1 et R_2 avec $R_1 < R_2$. Entre ces sphères l'espace est occupé par un matériau homogène et isotrope de conductivité thermique λ supposée constante. Les sphères sont portées respectivement aux températures T_1 et $T_2 < T_1$. Le régime est supposé stationnaire.

- Calculer en fonction de R_1 , R_2 et λ la résistance thermique R_{th} entre les deux sphères.

Les deux sphères ont une même capacité calorifique C et ont une grande conductivité thermique de sorte qu'à chaque instant on peut considérer les températures T_1 et T_2 comme uniformes. On désignera par T_{01} et T_{02} les températures initiales des sphères. On définira une constante de temps τ qui fixe l'évolution des températures. On supposera que l'ensemble est isolé thermiquement avec le milieu extérieur.

- Déterminer les équations qui déterminent les évolutions temporelles des températures T_1 et T_2 .
- Quelles analogies peut-on faire ?

15. Gel d'un lac

Lorsque l'air au-dessus d'un lac de surface S est à une température T_a inférieure à la température de fusion de la glace T_f , on constate que l'épaisseur $e(t)$ de la couche de glace croît lentement, proportionnellement à \sqrt{t} aux grands t . On note T_f la température de l'eau liquide, supposée uniforme, et $T(z, t)$ la température de la glace pour $0 \leq z \leq e(t)$. On suppose que le profil de température $T(z, t)$ est le même que si le régime était stationnaire (approximation des régimes quasi-stationnaires). On donne la température de fusion $T_f = 273 \text{ K}$ et la chaleur latente de fusion $l_f = 330 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$ de la glace, ainsi que sa masse volumique μ , sa capacité calorifique massique $c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ et sa conductivité thermique λ . On adoptera la même valeur μ pour la masse volumique de l'eau liquide. Voir la figure 2.

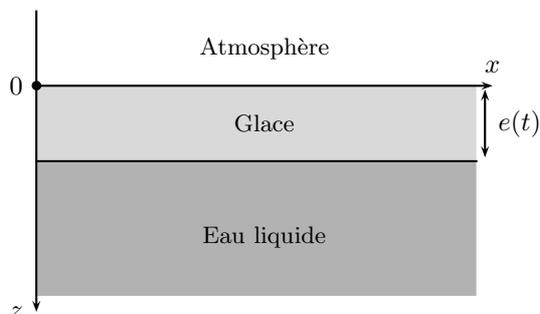


FIGURE 2 – Lac gelé

1. On suppose que l'air impose sa température T_a à la surface du lac, c'est-à-dire que $T(0, t) = T_a$ (hypothèse (\mathcal{H})). Exprimer le flux thermique ϕ traversant la couche de glace dans le sens des z décroissants en fonction de λ , $e(t)$, S , T_a et T_f .
2. En faisant un bilan pour la couche de glace qui gèle entre les instants t et $t + dt$, montrer que $e(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda(T_f - T_a)}{\mu l_f}$$

Déterminer $e(t)$ avec la condition initiale $e(0) = e_0$.

3. En déduire une durée caractéristique τ des variations de $e(t)$. Discuter la validité de l'approximation des régimes quasi-stationnaires.

En réalité, l'hypothèse (\mathcal{H}) n'est pas satisfaisante en général : le transfert thermique de la glace vers l'air met en jeu simultanément la diffusion thermique selon \vec{u}_z et la convection selon \vec{u}_x et \vec{u}_y . On parle de transport *conducto-convectif*. Dans ce cas, la loi phénoménologique de NEWTON donne l'expression du flux thermique $\phi_{cc} = hS(T_s - T_a)$ où $T_s = T(0, t)$ est la température de la surface du lac et h un coefficient constant, d'autant plus élevé qu'un vent fort souffle au-dessus du lac.

4. Justifier brièvement la continuité du flux thermique en $z = 0$.
5. En déduire l'expression de T_s en fonction de T_a , T_f , h et λ . À quelle condition le modèle de la première question est-il valable ? On ne demande pas d'établir la nouvelle expression de $e(t)$.

16. Explosion dans un réacteur chimique

Un réacteur chimique est assimilé à un cylindre d'axe Ox , de section S et de longueur L contenant des réactifs. La surface latérale et les surfaces extrêmes sont calorifugées. Si la température $T(x, t)$ dépasse le seuil T_0 , une réaction chimique exothermique se produit. On traite le réacteur comme un milieu homogène de composition constante, décrit par sa conductivité thermique λ , sa masse volumique μ et sa capacité thermique massique c . On traite la réaction chimique comme une source de chaleur : dans un élément de volume $d\tau$, la réaction exothermique apporte au milieu une chaleur $\delta^2 Q = A(T - T_0)d\tau dt$. On néglige la convection.

1. En faisant un bilan d'énergie pour une tranche de réacteur comprise entre x et $x + dx$, établir l'équation dont est solution $T(x, t)$.
2. On cherche des solutions non explosives de la forme :

$$T(x, t) = T_0 + T_1 \cos(kx - \varphi) \exp -\frac{t}{\tau}$$

Déterminer τ en fonction de k , A , μ , λ et c .

- Exprimer les conditions aux limites du réacteur. En déduire φ et les valeurs possibles de k en faisant apparaître un entier n .
- En déduire la valeur minimale L_c de la longueur L du réacteur permettant une explosion.

17. Estimation de l'âge de la Terre par Lord Kelvin

On néglige la sphéricité et les sources radioactives de la planète, mais on ne se place pas en régime permanent. On admet que la température dépend de t et de la profondeur z comptée positivement. Elle vérifie l'équation de diffusion :

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

où ρ est la masse volumique, c_p la capacité thermique massique à pression constante et λ la conductivité thermique.

- Démontrer l'équation différentielle vérifiée par q (puissance surfacique) :

$$\frac{\partial q}{\partial t} = D \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}$$

dans la quelle on notera D la diffusivité thermique $D = \lambda / \rho c_p$.

Au milieu du XIX^e siècle, Lord Kelvin a imaginé que la Terre avait été formée à une température élevée T_1 uniforme à la date $t = 0$. Il a proposé d'autre part qu'à cette même date, sa surface avait été soumise instantanément à une température T_S . Depuis ce temps-là, la planète se refroidirait. Lord Kelvin a modélisé le refroidissement pour en déduire l'âge de la Terre. La densité de flux thermique est donc une fonction de la profondeur et du temps $q(z, t)$.

- Dans l'hypothèse de Lord Kelvin, quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique en $z = 0$ lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ? Quelle doit être la valeur de la densité de flux thermique à une profondeur z non nulle lorsque t tend vers zéro et lorsqu'il tend vers l'infini ?
- Vérifier que la solution proposée par Lord Kelvin :

$$q(z, t) = -\frac{A}{\sqrt{Dt}} \exp -\frac{z^2}{4Dt}$$

où t est le temps écoulé depuis la formation de la Terre est bien la bonne. Dessiner schématiquement la valeur absolue de la densité de flux thermique en fonction de la profondeur pour deux époques différentes.

- Les paramètres du problème sont $T_1 - T_S$, λ , ρ et c_p . On suppose que A s'exprime par :

$$A = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (T_1 - T_S)^\alpha \lambda^\beta \rho^\gamma c_p^\delta$$

Déterminer par analyse dimensionnelle, les valeurs des exposants de cette loi.

- Exprimer la valeur du gradient thermique en surface de la Terre $\frac{\partial T}{\partial z}$. Lord Kelvin a admis que $T_1 - T_S$ était de l'ordre de 1000 à 2000 K et que D est proche de $10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Sachant que l'augmentation de température mesurée dans les mines indiquait un gradient proche de $30 \text{ K} \cdot \text{km}^{-1}$, quel âge de la Terre Lord Kelvin a-t-il déduit de son modèle ?
- Que pensez-vous de l'estimation précédente ? Quel est le ou les ingrédients que Lord Kelvin n'aurait pas dû négliger ?

18. Régime transitoire et série de Fourier

Un solide (C) la forme d'un cylindre droit à base circulaire de hauteur L , de rayon R est constitué d'un matériau homogène et isotrope de masse volumique μ , de capacité thermique massique c et de conductivité thermique λ supposées constantes. T désigne la température du cylindre. On appelle x la direction parallèle à l'axe du cylindre et on suppose que T ne dépend que de x et de t . On place les deux faces extrêmes de (C) (en $x = 0$ et $x = L$) en contact avec deux sources de chaleur (S') et (S'') de température respectives T' et T'' et on empêche tout transfert thermique par la face latérale. On posera $a = \frac{\lambda}{\mu c}$. Pour $t < 0$ on a $T' = T'' = T_1$. A $t = 0$ on change les sources (S') et (S'') et pour $t > 0$ on a $T' = T'' = T_0$.

- Établir l'équation de diffusion thermique dans le cylindre.
- Donner en le justifiant la fonction $T(x, t)$ juste avant $t = 0$.

On s'intéresse désormais à la fonction $T(x, t)$ pour $t > 0$ et on pose $\theta = T - T_0$.

3. Quelles sont les conditions aux limites pour θ en $x = 0$ et $x = L$? Quelles sont les conditions initiales à $t = 0$ (en fonction de x)?
4. On cherche $\theta(x, t)$ sous la forme $\theta = f(t)g(x)$.
 - Montrer que $g(x)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{d^2g}{dx^2} = \alpha g$ où α est une constante indéterminée à ce stade des calculs.
 - À l'aide des conditions aux limites, montrer que $-\alpha$ est positive (on posera $-\alpha = k^2$) et ne peut prendre que certaines valeurs dépendant d'un entier n .
 - À quelle équation différentielle obéit $f(t)$?
 - Montrer que la solution la plus générale que l'on peut obtenir par cette méthode est :

$$\theta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \exp -\frac{t}{\tau_n} \sin k_n x$$

en donnant les expressions de τ_n et k_n en fonction de n , L et a .

5. À l'aide des conditions initiales montrer que le calcul des coefficients B_n se ramène au calcul des coefficients de Fourier d'une fonction $g^*(x)$ dont on précisera la parité et la période. Calculer B_n et donner l'expression $\theta(x, t)$.
6. Calculer le rapport r_n entre l'amplitude d'un terme quelconque du développement de θ et l'amplitude du premier terme et montrer qu'à partir d'un instant t_1 dont on donnera un ordre de grandeur on peut garder uniquement le premier terme. Donner l'allure de $\theta(x, t)$ pour $t \ll t_1$, pour $t > t_1$ puis pour $t \rightarrow \infty$. À partir de quel instant t_2 a-t-on :

$$\frac{|T(x, t) - T_0|}{T_0} < 10^{-2}$$

Données numériques : $L = 1 \text{ m}$; $R = 2 \text{ cm}$; $\mu = 9000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$; $c = 400 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $\lambda = 400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$; $T_1 = 370 \text{ K}$ et $T_0 = 300 \text{ K}$.

19. Fuites thermiques

Un milieu de diffusivité thermique constante α , de conductivité thermique λ , de masse volumique ρ , de capacité thermique massique c , occupe le demi-espace $x > 0$. A l'instant initial, la température dans ce milieu est uniforme et vaut $T(x, t = 0) = T_0$ pour tout x .

À partir de $t = 0$, on impose par un contact thermique avec un corps chaud la température $T(x = 0, t) = T_e > T_0$ pour tout $t > 0$. On négligera tout transfert thermique autre que de conduction, conformément à la loi de FOURIER.

1. On introduit la fonction d'écart relatif $\theta(x, t) = \frac{T(x, t) - T_0}{T_e - T_0}$.
Préciser l'équation aux dérivées partielles vérifiée par $\theta(x, t)$. Indiquer aussi les conditions aux limites et initiales $\theta(x, t = 0)$, $\theta(x = 0, t)$ et $\theta(x = \infty, t)$.
2. On admet que, dans cette géométrie et pour ces conditions aux limites, $\theta(x, t)$ n'est fonction que de la variable réduite u , $\theta(x, t) = \theta(u)$ où $u = \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(u)$.
3. On pose dans la suite $\text{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-v^2) dv$, où on admet $\text{erf}(0,5) = 0,52$ et $\lim_{y \rightarrow \infty} \text{erf}(y) = 1$.
Exprimer $\theta(u)$ puis $T(x, t)$. Commenter l'allure de $T(x, t)$.
4. Exprimer le flux thermique de conduction $j(x, t)$, et sa valeur sur la paroi $j(0, t)$. On introduira l'effusivité thermique $\varepsilon = \sqrt{\lambda \rho c}$.
5. On réalise maintenant le contact thermique de deux milieux semi-infinis, occupant les demi-espaces $x < 0$ et $x > 0$, d'effusivités thermiques respectives ε_1 et ε_2 , dont les températures initiales sont respectivement T_{10} et T_{20} . Lors du contact, on admet que la surface de contact prend une température constante T_e .
Exprimer la température de la surface de contact T_e .
6. On admet que l'effusivité thermique du corps humain ε_c est nettement supérieure à celle ε_b du bois, mais nettement inférieure à celle ε_m d'un métal. En déduire la différence de sensation physique observée lorsqu'on touche un corps froid constitué de bois, ou constitué de métal.

20. Refroidissement d'une plaque, un modèle inadapté

On sort d'un four une plaque parallélépipédique d'épaisseur $2a = 2$ cm et de grandes dimensions selon y et z . On étudiera un problème strictement unidimensionnel sur l'axe Ox d'origine le centre de la plaque. La plaque est mise à refroidir à l'air de température $T_0 = 300$ K supposée uniforme et constante. Lorsque la plaque sort du four, elle est à la température $T_i = 500$ K. Le matériau est homogène de masse volumique μ , de capacité thermique massique c , de conductivité thermique λ . Avec l'air, il se produit un phénomène de convection de chaque côté de la plaque modélisé par la loi de NEWTON : $\vec{j}_{conv} = h(T(x = a) - T_0)\vec{e}_x$ et $\vec{j}_{conv} = -h(T(x = -a) - T_0)\vec{e}_x$.

- Établir l'équation de diffusion thermique de la température $T(x, t)$ dans la plaque.
- On pose $\theta(x, t) = T(x, t) - T_0$ et on recherche des solutions de $\theta(x, t)$ sous la forme $\theta(x, t) = f(x)g(t)$. Déterminer la forme générale de $g(t)$ et de $f(x)$.
- Montrer que la forme de l'écart de température par rapport à l'air est $\theta(x, t) = \theta_0 \exp -k^2 Dt \cos kx$ où θ_0 est une constante tout comme k .
- En imposant les conditions aux limites, montrer que k prend des valeurs discrètes et que le régime le plus lent est celui pour lequel la valeur de k est la plus petite.
- Déterminer la valeur du temps caractéristique τ de refroidissement de la plaque lorsqu'elle est en cuivre, puis lorsqu'elle est en bois. Qu'en pensez-vous ?
- Le modèle utilisé n'est pas adapté. Pour quelle raison d'après vous ?

	μ en $\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$	c en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$	λ en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
Cuivre	9 000	390	400
Bois	700	1 500	0,1

21. Méthode Flash-Laser

On considère une pièce cylindrique de rayon r , de conductivité thermique λ , de capacité thermique massique c , de masse volumique ρ et d'épaisseur e .

- On suppose d'abord l'épaisseur très petite de façon à pouvoir supposer la température uniforme $T(t)$ au sein de la pièce à un instant donné. La pièce est chauffée uniformément par une source de puissance P mise en route à l'instant $t = 0$, instant auquel la température intérieure T initiale vaut T_0 , température de l'extérieur.
 - Établir l'équation différentielle vérifiée par la température T de la pièce en considérant que le flux thermique des pertes conducto-convectives est modélisé par une loi de NEWTON de la forme $P_{th} = h(T - T_0)S$, h est le coefficient d'échange et S la surface de la pièce.
 - En déduire l'expression de la température T de la pièce en fonction du temps en introduisant un temps caractéristique τ .
 - On suppose que le chauffage s'effectue pendant une durée t_0 très inférieure à τ . En déduire une expression approchée de la température sur l'intervalle de temps $[0, t_0]$. Quelle est la valeur maximale T_{max} atteinte par T ?
 - Donner ensuite une expression de T sur l'intervalle $[t_0, \infty[$.
 - En supposant que $\forall t_0, Pt_0 = E$ (constant), que devient l'allure de la température si $t \rightarrow 0$?
- On s'intéresse désormais à la conduction axiale au sein de la pièce.
 - Établir l'équation de la diffusion thermique (pour $T(z, t)$) au sein du solide.
 - En utilisant le modèle de PARKER, voir l'annexe, donner l'expression de la température réduite sur la face arrière de la pièce définie par $u(t) = (T(e, t) - T_0)/(T_{max} - T_0)$. Approcher cette expression pour les instants supérieurs au temps caractéristique de la diffusion (d'après le modèle de PARKER).
 - Compléter le script *Python* fourni dans le fichier *2015-010-FlashLaser* pour donner les représentations graphiques analytique exacte et approchée de la température réduite.
 - En déduire que le temps de demi-montée $t_{1/2}$ (pour lequel u vaut $1/2$) permet de déterminer la diffusivité thermique du matériau.

Étude du Dural.

- À l'aide de l'expérience de BALAGEAS (détaillée dans l'annexe), estimer la diffusivité D du Dural.

- (b) Comparer les temps caractéristiques des pertes convectives (pour $h = 5 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$) et de la conduction au sein de la pièce. Que penser de l'hypothèse consistant à négliger les pertes convectives ?
- (c) Estimer l'énergie apportée par la source à la face avant.
- (d) Quelles critiques peuvent être formulées concernant le modèle de PARKER ?

Annexe :

Méthode de Parker

La technique flash-laser a été développée par PARKER (1960) afin d'obtenir des mesures rapides de la conductivité thermique d'échantillons de petites dimensions. Elle consiste à envoyer une impulsion très brève sur la face avant d'un échantillon cylindrique de faible épaisseur. Ensuite, l'analyse de l'évolution de la température sur la face arrière en fonction du temps permet la détermination de la diffusivité thermique. Le modèle de PARKER consiste à considérer un disque parfaitement isolé d'épaisseur e et de rayon r . Initialement, l'échantillon reçoit une impulsion énergétique de très courte durée, l'absorption de l'énergie s'effectue en surface de façon uniforme. Les pertes convectives sont supposées nulles sur toutes les faces et le flux thermique se propage parallèlement à l'axe optique. La résolution de l'équation de la chaleur dans ces conditions s'obtient par une méthode de séparation de variables ou à l'aide de la transformation de LAPLACE. À une profondeur z donnée de l'échantillon, la solution s'écrit comme suit où D est la diffusivité thermique du matériau :

$$T(z, t) = T_0 + (T_{max} - T_0) \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos\left(\frac{n\pi z}{e}\right) \exp\left(-\frac{n^2 \pi^2 D t}{e^2}\right) \right)$$

La mesure des variations de température en faces avant ou arrière, peut-être réalisée à l'aide de thermocouples ou de détecteurs de rayonnement infrarouge. Les thermocouples sont utilisés en général pour la basses températures et des matériaux épais. Cependant pour l'étude en régimes transitoires rapides, ou dans les conditions de hautes températures, l'utilisation de détecteurs infrarouges est préconisée. Le choix du détecteur s'effectuant suivant la gamme de température de travail.

Étude du Dural

Le Dural (ou duralumin ou encore duraluminium) est un alliage d'aluminium et de cuivre utilisé en aéronautique en raison de sa grande résistance aux contraintes et de sa plus faible densité que l'acier. Sa densité n'est que de 2,8. Sa capacité thermique massique est $c = 880 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

Des mesures de diffusivité en face arrière ont été réalisées (DANIEL BALAGEAS, ONERA Département Matériaux et Structures) sur une plaque de Dural, illuminée par 2 lampes flash créant des illuminations de 4 ms (maximum de l'intensité à moins de 2 ms) avec au niveau de l'échantillon en face avant une énergie surfacique ϵ . La température surfacique était enregistrée par une caméra Jade LW Cedip à la fréquence image de 200 Hz. Une mesure en face arrière est faite afin de disposer d'une valeur a priori fiable de la diffusivité (méthode de PARKER). Deux thermogrammes sont présentés à la figure 3. La température d'un pixel unique (courbe grise) et celle de la moyenne d'une zone circulaire centrale de 194 pixels, centrée sur ce pixel. La moyenne d'une zone de 194 pixels conduit à un rapport signal sur bruit de 62.

C. Diffusion de matière

22. Diffusion de neutrons dans une tige

On étudie la diffusion des neutrons dans un matériau homogène qui vérifie la loi de FICK :

$$\vec{j} = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$$

où \vec{j} est le vecteur densité de flux de neutrons en $\text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$, n le nombre de neutrons par unité de volume et D une constante positive. La diffusion se fait parallèlement à l'axe Ox . Les grandeurs n et \vec{j} ne dépendent que de x et du temps t .

1. Indiquer les unités de n et de D . Interpréter le signe $-$ dans la loi de FICK.
2. On suppose dans un premier temps que le matériau est une tige de section constante S , de longueur L , dans laquelle il ne se produit aucune absorption ou création de neutrons. Faire un bilan des particules entre x et $x + dx$ et établir l'équation différentielle vérifiée par n .
3. En régime permanent, en notant n_0 et n_L les valeurs de n en $x = 0$ et $x = L$, exprimer n et j en fonction de x .

On considère maintenant que le matériau qui constitue la tige peut absorber des neutrons et en produire par des réactions de fissions. Le nombre $\delta^2 N_a$ de neutrons absorbés dans un volume dV pendant un

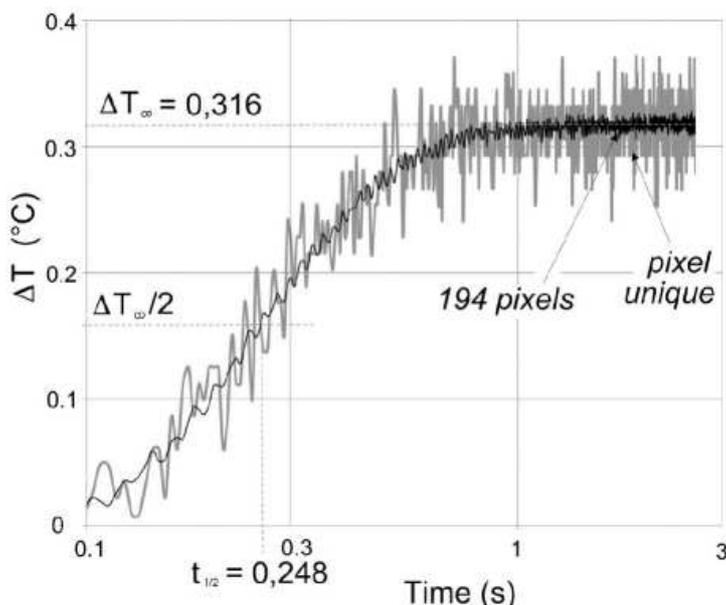


FIGURE 3 – Thermogramme d'une plaque de Dural de surface $S = 0,01 \text{ m}^2$ et d'épaisseur $e = 1 \text{ cm}$.

intervalle de temps dt est donnée par : $\delta^2 N_a = \frac{n}{\tau} dV dt$ où τ est une constante positive. Le nombre $\delta^2 N_p$ de neutrons produits dans le même volume élémentaire dV pendant dt est donné par $\delta^2 N_p = k \delta^2 N_a$ où k est une constante positive.

4. En faisant un bilan de particules dans un volume de section S compris entre x et $x + dx$, montrer que n vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{n}{\tau}$$

5. Quelle équation différentielle vérifie la densité de neutrons n en régime permanent ? On suppose cette condition réalisée dans toute la suite.
6. On suppose dans un premier temps qu'il ne se produit pas de réactions de fission dans le matériau. De plus, on suppose que la tige a une longueur suffisamment importante pour la considérer comme infinie. Un flux de neutrons est imposé en $x = 0$, de densité $\vec{j} = j_0 \vec{e}_x$ avec $j_0 > 0$. À l'extrémité de la tige, on supposera que la densité de neutrons est nulle. Établir l'expression de n . Déterminer la distance δ à partir de laquelle la densité de neutrons est égale à 1% de sa valeur en $x = 0$. Évaluer cette distance pour de l'eau ($\sqrt{D\tau} = 3 \times 10^{-2} \text{ SI}$) et du carbone ($\sqrt{D\tau} = 0,8 \text{ SI}$). Quel est le matériau le plus efficace pour absorber les neutrons ?
7. On suppose maintenant que le matériau produit des neutrons par fissions et que la quantité de neutrons produits est supérieure à celle des neutrons absorbés. La tige a une longueur finie L . La densité de neutrons est supposée nulle aux deux extrémités de la tige et uniquement en ces deux positions. On note n_0 la valeur maximale de la densité de neutrons à l'intérieur de la tige. Exprimer n en fonction de n_0 , k , D , τ et x et montrer que cette solution n'est envisageable que si la longueur de la tige prend une valeur L_C qu'on exprimera en fonction de k , D et τ .

23. Colonie de bactéries

On s'intéresse à la croissance d'une colonie de bactéries par division et diffusion. La densité (nombre de bactéries par unité de longueur) $n(x, t)$ ne dépend que d'une coordonnée x et du temps t .

- On suppose que la loi d'évolution des bactéries pour la diffusion est identique à la loi de diffusion thermique unidimensionnelle. Rappeler l'expression de cette loi, on notera D le coefficient de diffusion encore appelé diffusivité. Sachant que chaque bactérie change aléatoirement de sens tous les $T = 1 \text{ s}$, donner une estimation de D lorsque la vitesse des bactéries est $v = 10 \mu\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$. À l'aide d'un raisonnement dimensionnel, trouver le temps au bout duquel une petite colonie remplit un récipient de longueur $L = 10 \text{ cm}$, commenter brièvement le résultat obtenu.
- Une bactérie se divise en deux en moyenne tous les $\tau = 1200 \text{ s}$. Faire un bilan de nombre de bactéries sur une tranche comprise entre x et $x + dx$ et un intervalle de temps compris entre t et $t + dt$. Trouver l'équation de diffusion modifiée à laquelle satisfait la densité de bactérie. Quelles sont les solutions stationnaires de

l'équation obtenue ? Ont-elles un sens physique ? Déterminer l'évolution d'un profil de densité indépendant de x et valant $n(x, t = 0) = n_0$ initialement.

3. Tous les $\tau = 1200$ s en moyenne, une bactérie meurt avec une probabilité proportionnelle au nombre moyen de ses voisins dans un intervalle de longueur a . Modifier le bilan de particules établi à la question précédente en tenant compte de la mort des bactéries et montrer que :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + d_1 n - d_2 n^2$$

où d_1 et d_2 sont des coefficients dont on précisera les expressions, les dimensions et les valeurs numériques (on prend $a = 10 \mu\text{m}$). Quelles sont les solutions stationnaires et uniformes de l'équation précédente ? À quoi correspondent-elles physiquement ? On les note n_1 et n_2 avec $n_1 < n_2$.

4. On s'intéresse au bord de la colonie et on cherche des solutions de l'équation différentielle de la question 3 sous la forme $n(x, t) = f(x - ct)$, telle que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = n_2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = n_1$$

Que signifie ce choix ? Montrer que l'équation différentielle qui détermine f se met sous la forme :

$$e_1 f'' = e_2 f' + e_3 f + e_4 f^2$$

où les e_i sont des coefficients dont on donnera l'expression. Reconnaître dans cette équation le mouvement d'une particule de masse D soumise à une force de frottement visqueux et à un potentiel à préciser. Faire un bilan des travaux des forces entre les positions n_2 et n_1 et en déduire une expression de c en fonction de $\int f'^2(u) du$. Dans quel sens la colonie se déplace-t-elle ? Un récipient se remplirait-il plus vite ou moins vite que dans la question 1 ?

D. Soleil - Terre

24. Dilution du rayonnement solaire

La Terre et le Soleil sont considérés comme des corps noirs aux températures respectives de 300 K et 5800 K. Leurs rayons sont de 6 400 km et 700 000 km et ils sont distants de 150 millions de kilomètres.

1. Calculer les puissances rayonnées par la Terre et le Soleil.
2. Calculer l'angle solide Ω sous lequel la Terre est vue depuis le Soleil. Le rayonnement du Soleil étant supposé isotrope, en déduire la puissance reçue par la Terre due au rayonnement solaire. Conclure.

25. Bilan radiatif de la Terre

On donne : $R_{\text{soleil}} = 7 \times 10^8$ m ; distance moyenne Terre-Soleil $d = 1,5 \times 10^{11}$ m ; rayon de la terre $R_T = 6400$ km et température moyenne du sol : $T_0 = 287$ K. La constante solaire E_0 est par définition la puissance reçue du soleil par unité de surface normale aux rayons solaires au sommet de l'atmosphère terrestre. On admet qu'on peut assimiler l'émission solaire à celle d'un corps noir de température T_S .

1. Calculer E_0 en fonction de d , R_S , T_S et σ (constante de Stefan). Calculer également la puissance solaire u reçue en moyenne par unité de surface de la sphère de rayon R_T . On trouve expérimentalement $E_0 = 1,35 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire une valeur numérique de T_S .
2. Le maximum de l'émission solaire en fonction de la longueur d'onde est obtenu pour $\lambda_{\text{max}} = 0,474 \mu\text{m}$. Cette valeur est-elle cohérente avec la valeur de T_S que l'on vient de calculer pour pouvoir assimiler l'émission à celle du corps noir ?
3. L'albédo d'une surface est le rapport du flux qu'elle diffuse sans l'absorber au flux qu'elle reçoit. L'albédo A de l'ensemble Terre-Atmosphère pour le rayonnement solaire est évalué à 0,34. On considérera que l'atmosphère terrestre est pratiquement transparente au rayonnement solaire. Calculer le flux surfacique moyen φ_e du rayonnement émis par le sol en supposant l'équilibre radiatif au sol. On négligera dans cette question toute absorption par l'atmosphère du rayonnement émis par le sol de même que tout rayonnement propre de l'atmosphère. On exprimera φ_e en fonction de u . On assimile le rayonnement du sol à celui d'un corps noir de température T_P . Calculer T_P . Comparer à T_0 . Commenter.
4. On tient compte maintenant du rayonnement de l'atmosphère. On admet que seulement une fraction α du rayonnement IR émis par le sol (de température T_0) peut traverser la totalité de l'atmosphère. En outre, l'atmosphère rayonne un flux surfacique moyen φ_1 au niveau du sol et dirigé vers le sol. Enfin, les couches atmosphériques les plus élevées ont un rayonnement propre vers l'extérieur du système Terre-Atmosphère correspondant à un flux surfacique moyen $\varphi_r \neq \varphi_1$. On donne $\alpha = 0,25$. Représenter sur un schéma, les flux évoqués. Calculer φ_e , φ_r et φ_1 en fonction de u .

5. En fait le bilan purement radiatif précédent ne tient pas compte de divers phénomènes qui participent au bilan thermique de l'atmosphère. Ainsi, l'eau s'évapore à la surface du sol et se recondense dans l'atmosphère. La hauteur moyenne des précipitations annuelles est de l'ordre de 2 mètres d'eau. Évaluer l'ordre de grandeur de la puissance surfacique moyenne P_S transférée de cette façon de la Terre à l'Atmosphère. Conclure. On donne l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau : $\Delta H_{vap} = 2250 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$.

E. Objets terrestres en régime indépendant du temps

26. Fahrenheit 451

Le soleil est assimilé à une sphère de rayon $R_S = 7 \times 10^8 \text{ m}$ dont le centre est à la distance $d = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$. On forme l'image du soleil à travers une lentille mince convergente de distance focale $f' = 5 \text{ cm}$ et de rayon de bord $\rho = 1 \text{ cm}$ sur une feuille de papier confondue avec le plan focal image.

- Déterminer les caractéristiques géométriques de cette image.
- Le flux lumineux surfacique reçu à la surface de la lentille vaut $E_0 = 10^3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Déterminer le flux surfacique sur l'image du soleil si on suppose la lentille transparente.
- Calculer la température du papier au niveau de l'image si on suppose l'équilibre radiatif du papier. Le papier brûle-t-il? Sa température d'autoinflammation est de 451 Fahrenheit. On donne $\theta(F) = 32 + 1,8\theta(C)$.

27. Effet de serre

On étudie l'effet de serre produit par l'interposition d'une vitre au-dessus d'une plaque qui reçoit le rayonnement solaire. La plaque est noircie et assimilée à un corps noir. Le verre est supposé totalement transparent au rayonnement solaire (sauf à la question 3) où l'on tient compte du rayonnement solaire réfléchi. La vitre est en revanche totalement absorbante pour le rayonnement infrarouge émis par la plaque qui absorbe le rayonnement solaire. On désigne par φ_S le flux solaire surfacique supposé arriver normalement à la vitre et à la plaque.

- On suppose l'équilibre radiatif de la plaque et de la vitre. Écrire les équations exprimant ces équilibres et en déduire la température T de la plaque. On donne : $\varphi_S = 600 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. Calculer T et la température T_1 de la vitre.
- Reprendre la question précédente dans le cas de deux vitres puis de n vitres.
- Chaque vitre réfléchit une fraction r de l'énergie solaire incidente. On néglige toujours l'absorption du rayonnement solaire par les vitres. Montrer qu'il existe une valeur n_m optimale du nombre de vitres. Application numérique : $r = 0,08$.

28. Utilisation thermique de l'énergie solaire

Une surface noire absorbe totalement le rayonnement solaire auquel elle est exposée et le réémet suivant une loi de corps noir dont la température T_0 est celle de la surface.

- Faire le bilan thermique de la surface en négligeant les pertes par conduction et convection et trouver l'expression de la température T_0 en fonction de J , puissance solaire reçue par unité de surface. Calculer T_0 pour une valeur de J égale à $800 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$. En déduire le domaine spectral du rayonnement émis.
- On interpose une vitre entre la surface noire et le rayonnement solaire. Sachant que le verre absorbe totalement l'infrarouge de longueur d'onde supérieure à $1 \mu\text{m}$ et que le rayonnement solaire n'en contient presque pas au niveau du sol, faire le nouveau bilan énergétique au niveau de la surface ainsi que celui de la vitre. En déduire la nouvelle température T_1 de la surface.
- On fait circuler de l'eau au contact de la surface noire. L'eau passe en dessous de la surface noire, la vitre proposée à la question précédente est toujours présente entre la surface noire et le rayonnement solaire. L'eau arrive à la température $t_3 = 10^\circ\text{C}$ et maintient la surface à la température $t_2 = 60^\circ\text{C}$. Quelle aire de capteur faut-il utiliser pour produire 20 litres d'eau chaude à 60°C par heure? Quelle fraction d'énergie incidente est captée (rendement)?

On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_{eau} = 4,18 \times 10^3 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

29. Maintenir l'eau au frais . . .

Une jarre en terre cuite, sphérique de rayon R , contient de l'eau sur une hauteur z . Du fait de l'évaporation progressive de l'eau contenue dans la jarre, la température T de l'eau (et de la jarre) est en permanence légèrement inférieure à celle $t_a = 30^\circ\text{C}$ de l'air ambiant. La jarre étant abritée du soleil direct, on ne tiendra compte que des échanges par convection et rayonnement avec l'atmosphère.

1. On constate que la jarre, initialement pleine, se vide de la moitié de son eau en une durée τ égale à 30 jours. On admet que la variation \dot{m} de la masse m d'eau contenue dans la jarre est proportionnelle à la surface S de contact entre l'eau et la jarre, $\dot{m} = -KS(z)$. Exprimer K en fonction de R , τ et de la masse volumique ρ de l'eau.

Application numérique : $\rho = 1\,000\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $R = 40\text{ cm}$.

2. On note $L_v = 2,4 \times 10^6\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}$ l'enthalpie massique de vaporisation de l'eau. On note aussi $h = 2,5\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert thermique pariétal (loi de Newton) de la paroi de la jarre avec l'atmosphère.

Enfin, la constante de Stefan vaut $\sigma = 5,67 \times 10^{-8}\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-4}$.

Expliciter la température de l'eau en régime permanent. On néglige les phénomènes de conduction thermique. Commenter.

F. Objets terrestres en régime variable

30. Sphère dans un four

Une sphère d'aluminium de masse m , et de surface S est portée à la température $T_0 = 283\text{ K}$ puis placée dans une enceinte vide dont les parois sont maintenues à la température $T_1 = 300\text{ K}$. On suppose que la capacité thermique massique c de l'aluminium est indépendante de la température. On note T la température de la sphère.

1. Exprimer la puissance reçue par la sphère et la puissance qu'elle émet.
2. Faire un bilan énergétique pendant une durée dt . Montrer que, l'écart de température entre les deux corps étant faible, on peut linéariser les transferts thermiques. On notera λ la constante de proportionnalité entre l'énergie reçue par la sphère et le produit $(T - T_1)dt$. En déduire l'équation différentielle donnant la température T en fonction du temps.
3. Établir l'évolution de T . Expliciter la constante de temps τ et faire l'application numérique avec : $m = 0,12\text{ kg}$; $\mu = 2700\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$; $c = 910\text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ et $\sigma = 5,7 \times 10^{-8}\text{ SI}$.

31. Constante de temps d'un thermomètre

Un thermomètre, de surface $S = 10\text{ cm}^2$ et de capacité thermique c , est placé dans un local vide d'air à la température $T_l = 300\text{ K}$. Le thermomètre est dirigé vers un des murs. On supposera que la face arrière de l'appareil (celle qui ne porte pas le thermomètre lui-même) est thermiquement isolée de la face avant qui porte l'appareil. On le retourne alors vers une vitre à travers laquelle il reçoit une fraction du rayonnement solaire, caractérisé par le flux surfacique $\phi = 100\text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$. Sa température s'élève.

1. Déterminer les températures initiale et finale indiquées par le thermomètre.
2. Le passage de la température initiale à la température finale est achevé (à 90%) en 10 minutes. Déterminer c .

32. Utilisation thermique de l'énergie solaire

On étudie (cf. figure 4) un chauffe-eau solaire ; l'eau y circule à vitesse constante v . L'absorbeur reçoit du Soleil la puissance par unité de surface Φ . Les transferts thermiques entre l'absorbeur et l'eau sont caractérisés par le coefficient de transfert pariétal h ; ceux de l'absorbeur et de l'air sont caractérisés par le coefficient h' . On note μ la masse volumique de l'eau supposée constante et c_{eau} sa capacité thermique massique.

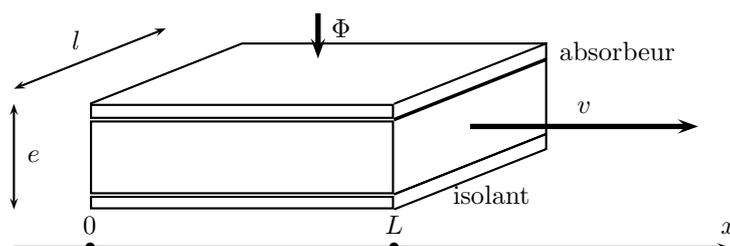


FIGURE 4 – Chauffe-eau solaire

La température de l'eau est notée $T(x, t)$. Les parois latérales et le fond du courant d'eau sont calorifugés.

1. On néglige la capacité thermique de l'absorbeur et on néglige les transferts thermiques par conduction dans l'absorbeur. Montrer que dans ces conditions, la température de l'absorbeur n'est fonction que de x , $T_a = T_a(x)$.
2. Expliciter un bilan thermique pour l'absorbeur puis pour une tranche d'eau de longueur dx ; en déduire une équation pour $T(x, t)$. On notera la température constante de l'air extérieur T_e , $T_a(x, t)$ celle de l'absorbeur et $T(x, t)$ celle de l'eau.
3. On se place en régime permanent. Déterminer $T(x)$ sachant que la température de l'eau à l'entrée du chauffe-eau solaire est T_0 .

G. Thermodynamique du rayonnement

33. Étoiles de luminosité identique

On rappelle la loi de STEFAN du flux surfacique rayonné par un corps à la température T : $j_{ray} = \sigma T^4$. On imagine deux étoiles sphériques A et B de même luminosité (c'est-à-dire qu'elles émettent la même puissance lumineuse), mais dont les températures en surface varient du simple au double : $T_B = 2T_A$. Que peut-on dire du rayon de l'étoile B par rapport à celui de l'étoile A ?

Proposition de réponses :

$$\text{a) } R_B = 4R_A \quad \text{b) } R_B = 2R_A \quad \text{c) } R_B = R_A/2 \quad \text{d) } R_B = R_A/4$$

34. Méthode de Boltzmann

Un gaz de photons est en équilibre thermique à la température T à l'intérieur d'un récipient fermé de volume V , réglable au moyen d'un piston mobile sans frottement. L'énergie interne de ce gaz s'écrit $U = V\bar{u}$ où l'énergie interne volumique $\bar{u}(T)$ ne dépend *a priori* que de la température T .

Pour chaque photon, la vitesse c , l'impulsion (ou quantité de mouvement) q et l'énergie ϵ sont reliés par la relation relativiste $q = \|\vec{q}\| = \epsilon/c$. Le choc des photons sur les parois est élastique.

1. Montrer que la pression statistique p exercée par le gaz sur les parois est $p = \bar{u}/3$. Comparer au cas d'un gaz parfait monoatomique.
2. Au cours d'une transformation infinitésimale réversible, exprimer dU , le travail δW et le transfert thermique δQ puis la variation dS de l'entropie du gaz.
En déduire l'expression de $\bar{u}(T)$ (à une constante multiplicative près). Commenter.
3. On appelle *énergie libre* F d'un système la grandeur $F = U - TS$.
Évaluer la variation dF d'énergie libre au cours d'une transformation réversible.
En déduire à nouveau l'expression de $\bar{u}(T)$ déjà trouvée.
4. On envisage le comportement de l'univers primordial (au début de son expansion) comme celui d'un gaz de photons en évolution adiabatique. En déduire la nature de la relation entre T et V . Commenter.