

# Exercices : 14 - Conduction - Convection - Rayonnement

— Solutions —

## A. Régime stationnaire

### 1. Température d'interface et régime stationnaire

Réponses :  $R_1 = \frac{1}{\lambda_1} \frac{e}{S}$ ,  $R_2 = \frac{1}{\lambda_2} \frac{e}{S}$ ,  $R_{tot} = (\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}) \frac{e}{S}$ ,  $T_2 - T_i = \frac{R_2}{R_1 + R_2} (T_2 - T_1)$ ,  $T_i = \frac{\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$ ,  $T_i = 43^\circ\text{C}$ ,  $T_i \simeq 100^\circ\text{C}$ .

### 2. Isolation d'une maison

Réponses : on considère une couche de mur de section  $S$  compris entre  $x$  et  $x + dx$ . En régime permanent, le bilan énergétique s'écrit  $\frac{dE}{dt} = 0 = \Phi_x - \Phi_{x+dx}$ . Le flux est partout le même. Comme  $\Phi = -\lambda_1 \frac{dT}{dx} S$  par la loi de FOURIER. On en déduit que  $\frac{dT}{dx} = -\frac{\Phi}{S\lambda_1}$  est une constante. La température évolue de façon affine dans le mur. En intégrant entre  $x = 0$  côté intérieur de la maison et  $x = e_1$  côté extérieur, on trouve  $T(e_1) - T_1 = -\frac{\Phi}{S\lambda_1} e_1$ . Cela permet de trouver la résistance thermique de l'ensemble des murs en brique de la maison  $R_{br} = \frac{1}{\lambda_1} \frac{e_1}{S}$ . On trouve  $R_{br} = 8,3 \times 10^{-4} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ . La loi de la convection de NEWTON donne le flux transmis  $\Phi_{conv} = hS(T(e_1) - T_\infty)$  ce qui permet de trouver la résistance de convection  $R_{conv} = \frac{1}{hS} = 5 \times 10^{-4} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ . Les deux résistances sont en série parce que parcourue par un même flux, une même puissance. On a donc  $R_{th} = R_{br} + R_{conv} = 1,33 \times 10^{-3} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ . La puissance perdue est  $\Phi = \frac{T_1 - T_\infty}{R_{th}} = 11,3 \text{kW}$ . 3 mois correspondent à  $\Delta t = 2160 \text{h}$ , on a donc consommé une énergie  $E = \Phi \Delta t = 24410 \text{kWh}$  ce qui fait une facture de 4390 euros. En isolant a maison, on rajoute deux résistances thermiques en série aux précédentes. La résistance  $R_{air} = \frac{1}{\lambda_2} \frac{e_2}{S} = 2 \times 10^{-3} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$  et  $R_{ps} = \frac{1}{\lambda_3} \frac{e_3}{S} = 6 \times 10^{-3}$ . On a donc une nouvelle résistance thermique plus grande  $R'_{th} = 9,3 \times 10^{-3} \text{K} \cdot \text{W}^{-1}$ . La puissance perdue est  $\Phi' = 1,6 \text{kW}$  et l'énergie perdue  $E' = \Phi' \Delta t = 3456 \text{kWh}$ . La facture a baissé sensiblement puisqu'on doit payer 620 euros. Pour trouver la température de l'interface air-polystyrène, on effectue l'équivalent thermique d'un diviseur de tension sur des résistance électriques en série. On a donc  $T_1 - T_i = \frac{R_{br} + R_{air}}{R'_{th}} (T_1 - T_\infty)$ . On trouve  $T_i = 15,4^\circ\text{C}$ .

### 3. Résistance thermique cylindrique, sphérique

Réponses :  $T(r) = (T_2 - T_1) \frac{\ln r/r_1}{\ln r_2/r_1} + T_1$ ,  $\vec{j}_{cond} = -\frac{\lambda}{r} \frac{T_2 - T_1}{\ln r_2/r_1} \vec{e}_r$ ,  $R = \frac{\ln r_2/r_1}{\lambda 2\pi H}$ ,  $T(r) = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} [\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}] (T_2 - T_1) + T_1$ ,  $\vec{j}_{cond} = -\frac{\lambda}{r^2} \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} (T_2 - T_1) \vec{e}_r$ ,  $R = \frac{r_2 - r_1}{4\pi \lambda r_1 r_2}$ .

### 4. Ailettes de refroidissement

Réponses :  $L = 1,03 \text{cm}$ ;  $\frac{dT}{dx^2} - \frac{T}{L^2} = -\frac{T_A}{L^2}$ ,  $T = T_A + (T_M - T_A) \exp -\frac{x}{L}$ ;  $P = \lambda \frac{ab}{L} (T_M - T_A) \simeq 13 \text{W}$ ; la puissance évacuée est en  $b\sqrt{a}$ , on peut réduire  $c$  tout en conservant  $c \gg L$ .

### 5. Géothermie

Réponses :  $J_{th} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{l} = 0,39 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\frac{dT}{dx^2} = -\frac{\sigma_y}{\lambda}$ ,  $T(x) = -\frac{\sigma_y x^2}{2\lambda} + [\frac{T_2 - T_1}{l} + \frac{\sigma_y l}{2\lambda}] x + T_1$ ,  $J'_{th} = \lambda \frac{T_1 - T_2}{l} + \frac{\sigma_y l}{2} = 52,5 \text{W} \cdot \text{m}^{-2}$ , radioactivité prépondérante.

### 6. Isolation d'un oléoduc

Réponses : le flux thermique dans le tube est radial, l'énergie ne varie pas au cours du temps puisque le régime est permanent. Ainsi le flux qui traverse au niveau de  $r$  est le même que celui qui traverse au niveau de  $r + dr$ . D'après la loi de FOURIER  $d\Phi = -\lambda_1 \frac{dT}{dr} \Big|_r 2\pi r dz = -\lambda_1 \frac{dT}{dr} \Big|_{r+dr} 2\pi(r + dr) dz$ . On voit donc bien que l'on a  $r \frac{dT}{dr} = \alpha$ . On a donc  $T(r) = \alpha \ln r + \gamma$ . En utilisant les conditions aux limites pour les rayons du tube, on peut déterminer  $\alpha$  et  $\gamma$ . Seule  $\alpha = -\frac{T_1 - T_2}{\ln \frac{R_2}{R_1}}$  est utile pour le calcul de la résistance thermique. On trouve bien

une résistance thermique  $\frac{\ln \frac{R_2}{R_1}}{\lambda_1 2\pi dz}$ . La résistance de convection au niveau de l'interface huile-tube est  $\frac{1}{h_i 2\pi R_1 dz}$ . Si on effectue le rapport avec la résistance de conduction, on trouve que la convection est négligeable. La résistance de la laine de verre est  $\frac{\ln \frac{R_2 + e}{R_2}}{\lambda_2 2\pi dz}$ , pour la convection extérieure, on a  $\frac{1}{h_e 2\pi (R_2 + e) dz}$ . En sommant toutes les résistance thermiques, on arrive bien à une résistance thermique  $\frac{\beta}{dz}$  avec la valeur numérique annoncée. On a  $d\Phi = \frac{T(z) - T_\infty}{\beta} dz$  par définition d'une résistance thermique. On raisonne sur une masse  $Dm = \mathcal{D}_m dt$  d'huile qui entre en  $z$  à la température  $T(z)$  et qui sort en  $z + dz$  à la température - plus basse -  $T(z + dz)$  puisque l'énergie  $d\Phi dt$  est sortie par la paroi latérale de l'oléoduc. En régime permanent, l'énergie qui entre est égale à l'énergie qui sort :  $\mathcal{D}_m dt c_p T(z) = \mathcal{D}_m dt c_p T(z + dz) + \frac{T(z) - T_\infty}{\beta} dz$ . On obtient l'équation différentielle annoncée avec  $\ell = \beta \mathcal{D}_m c_p = 34 \text{km}$ ,  $\ell$  ne peut qu'être une distance au vu de l'équation différentielle, on peut retrouver sa dimension par analyse dimensionnelle des facteurs  $\beta$ ,  $\mathcal{D}_m$  et  $c_p$ . La solution est  $T(z) = (T_1 - T_\infty) \exp -\frac{z}{\ell} + T_\infty$ . En  $z = L$ , on trouve  $T(L) = 33,4^\circ\text{C}$ . Il faut calorifuger l'oléoduc pour éviter une baisse trop rapide de la

température de l'huile afin d'éviter qu'elle se fige et ne bouche le tube... mais aussi pour éviter d'avoir à la réchauffer si l'utilisation ultérieure le nécessite.

**7. Conduction thermique, création d'entropie**

Réponses :  $R_u = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{A}$  en  $K \cdot W^{-1}$  avec  $A = \frac{\pi D^2}{4}$ ,  $\delta S_{cr} = -\delta S_{tr}$ ,  $\delta S_{cr} = \sigma_S A dx dt$ ,  $\sigma_S = -\lambda \frac{d}{dx} \left( \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} \right)$ ,  $\frac{dT}{dx} = \frac{T_a - T_f}{L}$ ,  $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$ ,  $\sigma_S = \frac{\lambda}{T^2} \left( \frac{T_f - T_a}{L} \right)^2$ ,  $\sigma_S(x=0) = 1,46 W \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$  et  $\sigma_S(x=L) = 3,96 W \cdot K^{-1} \cdot m^{-3}$

**8. Homéothermie**

Réponses :  $\text{div } \vec{j} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 j)}{\partial r} = 0$ ,  $j = \frac{\alpha}{r^2}$ ,  $T = \frac{\beta}{r} + \gamma$ ,  $T(r) = (T_1 - T_0) \frac{a}{r} + T_0$ ,  $P = j(r=a) 4\pi a^2 = \lambda(T_1 - T_0) 4\pi a$ ,  $P = 2,45 W$ ; plus  $a$  grand, plus  $P$  est grande, plus facile pour un petit animal.

**9. Transferts entropiques**

Réponses :  $\text{div } \vec{j}_S + \rho \frac{\partial s}{\partial t} = \dot{s}_c$ ;  $\frac{T}{T_0} = ax + b$  en régime stationnaire,  $\dot{s}_c = \frac{\lambda a^2}{(ax+b)^2} > 0$ , irréversible.

**10. Effet Joule et effet Thomson**

Réponses :  $dp_J = \frac{I^2}{\gamma S^2} S dx$ ,  $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{I^2}{\gamma S^2}$ ,  $\frac{d^2 T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda \gamma S^2}$ ,  $K = \frac{1}{\lambda \gamma S^2} = 10,4 K \cdot m^{-2} \cdot A^{-2}$ ,  $T(x) = -\frac{KI^2}{2} x^2 + \left( \frac{T_2 - T_1}{L} + \frac{KI^2 L}{2} \right) x + T_1$ ,  $I_1 = \sqrt{\frac{2(T_2 - T_1)}{KL^2}} = 4,4 A$ ,  $\lambda \frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{hI}{S} \frac{dT}{dx} + \frac{I^2}{\gamma S^2} = 0$ ,  $I_2 = \frac{\gamma Sh}{L} (T_2 - T_1) = 26 \text{ mA}$ .

**11. Amélioration de la conductivité thermique d'un liquide**

Réponses :  $T(z) = \frac{T_2 - T_1}{L} z + \frac{T_1 + T_2}{2}$ ,  $\Phi = \frac{\lambda(T_1 - T_2)\pi L}{4}$ ,  $\Delta T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$  d'où  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{df(r)}{dr} \right) = 2f(r)$ ,  $u(u+1) = 2$  donc  $u = 1$  ou  $u = -2$ ,  $u = 1$  correspond à la première situation puisque qu'alors  $z = r \cos \theta$  et  $u = -2$ ,  $T(r, \theta) = \frac{T_1 + T_2}{2} + \frac{T_2 - T_1}{L} (Ar + \frac{B}{r^2}) \cos \theta$ ,  $f(r=a) = 0$  impose  $B = -Aa^3$  et l'autre condition  $A(1 - \frac{8a^3}{L^3}) = 1$  et donc  $A \simeq 1 + \frac{8a^3}{L^3}$ ,  $T(r, \theta) = \frac{T_1 + T_2}{2} + A \frac{T_2 - T_1}{L} (r - \frac{a^3}{r^2}) \cos \theta$ ,  $\vec{j}_c = A \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \left[ \left(1 + \frac{2a^3}{r^3}\right) \cos \theta \vec{e}_r - \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \sin \theta \vec{e}_\theta \right]$ ,  $\Phi' = \Phi_1 + \Phi_2$  avec  $\Phi_1$  le flux au niveau de la sphère et  $\Phi_2$  celui dans le reste de la section proposée, en  $r = a$ , on a  $\vec{j}_c(r=a) = 3A \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} \cos \theta \vec{e}_r$  et  $d\Phi_1 = \vec{j}_c \cdot a^2 \sin \theta d\theta d\varphi \vec{e}_r$  d'où  $\Phi_1 = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\Phi_1$ , on trouve  $\Phi_1 = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} 3\pi a^2 \left(1 + \frac{8a^3}{L^3}\right) = \lambda \frac{T_1 - T_2}{L} 3\pi a^2 \left(1 + \frac{8a^3}{L^3}\right)$  pour la sphère de rayon  $a$ . Pour le reste de la section, on se place en  $\theta = \pi/2$  et alors  $\vec{j}_c = -\lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \left(1 - \frac{a^3}{r^3}\right) \vec{e}_\theta(\theta = \pi/2)$ , or  $\vec{e}_\theta(\theta = \pi/2) = -\vec{e}_z$ , on a donc  $d\Phi_2 = \vec{j}_c \cdot r dr d\varphi \vec{e}_z$  d'où  $\Phi_2 = \int_{r=a}^{L/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\Phi_2$ ,  $\Phi_2 = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \pi \left[ \frac{L^2}{4} + \frac{4a^3}{L} - 3a^2 \right]$ ,  $\Phi' = \lambda A \frac{T_1 - T_2}{L} \pi \left[ \frac{L^2}{4} + \frac{4a^3}{L} \right]$ ,  $\Phi' = \Phi \left[ 1 + \frac{16a^3}{L^3} \right] \left( 1 + \frac{8a^3}{L^3} \right)$   $\Phi' \simeq \Phi \left( 1 + \frac{24a^3}{L^3} \right)$ ,  $\lambda_e \simeq \lambda \left( 1 + N_{tot} \frac{24a^3}{L^3} \right)$  avec  $N_{tot} = n \frac{\pi L^3}{4}$  d'où  $\lambda_e \simeq \lambda \left( 1 + 6\pi n a^3 \right)$ .

**12. Anémomètre à fil chaud**

Réponses : on effectue un bilan énergétique pour un morceau de fil électrique compris entre  $r$  et  $r + dr$  et de longueur  $dz$  en régime indépendant de  $t$ , on fait les hypothèses que le système est invariant en  $\theta$  et  $z$ , la puissance volumique dissipée par effet JOULE est  $\rho_e j_{elec}^2 = \rho_e \frac{I^2}{\pi^2 R_0^4}$ , on a donc  $j(r) 2\pi r dz - j(r+dr) 2\pi(r+dr) dz + \rho_e \frac{I^2}{\pi^2 R_0^4} 2\pi r dr dz$  d'où  $\frac{d}{dr} \left( r \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{\rho_e I^2}{\lambda \pi^2 R_0^4} r$ , on intègre  $r \frac{dT}{dr} = -\frac{\rho_e I^2}{2\lambda \pi^2 R_0^4} r^2 + \alpha$ , en  $r = 0$ , il n'y aucune raison pour que la dérivée diverge, d'où  $\alpha = 0$ , on arrive à  $T(r) = \frac{\rho_e I^2}{4\lambda \pi^2 R_0^2} \left( 1 - \frac{r^2}{R_0^2} \right) + T_0$ , la température est maximale au centre et vaut  $T_{max} = \frac{\rho_e I^2}{4\lambda \pi^2 R_0^2} + T_0$ , on trouve  $T_{max} - T_0 = 0,012 K$ , on peut considérer le fil comme homogène en température.

**13. Exoplanète**

Réponses : le bilan énergétique conduit à  $\frac{d}{dr} (r^2 j_{cond}) = p_0 r^2$ . La loi de FOURIER indique  $j_{cond} = -\lambda \frac{dT}{dr}$  d'où  $\frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dT}{dr} \right) = -\frac{p_0}{\lambda} r^2$  que l'on intègre en  $T(r) = -\frac{p_0}{6\lambda} r^2 + \beta$  car  $T(r)$  ne peut pas diverger en  $r = 0$ . Dans la partie non radioactive, on a  $\frac{dT}{dr} = \frac{\gamma}{r^2}$ . Avec la continuité du flux de conduction et donc de  $\frac{dT}{dr}$  en  $r = a$ , on obtient  $\frac{dT}{dr} = -\frac{p_0 a^3}{3\lambda r^2}$  qui s'intègre en  $T(r) = \frac{p_0 a^3}{3\lambda r} + \varepsilon$ . Avec la continuité de la température à la surface, on obtient  $\varepsilon = T_s - \frac{p_0 a^3}{3\lambda R}$  d'où  $T(r) = T_s + \frac{p_0 a^3}{3\lambda} \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right)$ . La continuité de la température en  $r = a$  permet d'obtenir pour  $r \leq a$ ,  $T(r) = -\frac{p_0 r^2}{6\lambda} + \frac{p_0 a^3}{\lambda} \left( \frac{1}{2a} - \frac{1}{3R} \right) + T_s$ . Au centre de l'exoplanète en  $r = 0$ , on trouve  $T_c = \frac{p_0 a^3}{\lambda} \left( \frac{1}{2a} - \frac{1}{3R} \right) + T_s = 15 200 K$ .

## B. Régime dépendant du temps

### 14. Mise en équilibre thermique, analogie

Réponses :  $\text{div } \vec{j} = 0$  conduit à  $r^2 \frac{dT}{dr} = \alpha$ ,  $T = -\frac{\alpha}{r} + \beta$ , condition aux limites  $\alpha = \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_2 - T_1)$ ,  $j_{\text{cond}} = 4\pi \lambda \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} (T_1 - T_2)$  et  $R_{th} = \frac{1}{\lambda} \frac{R_2 - R_1}{4\pi R_1 R_2}$ ,  $R_{th} C \frac{dT_1}{dt} + T_1 = T_2$  et  $R_{th} C \frac{dT_2}{dt} + T_2 = T_1$ ,  $\tau = R_{th} C$ ,  $T_1 = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} + \frac{T_{01} - T_{02}}{2} \exp -\frac{2t}{\tau}$  et  $T_2 = \frac{T_{01} + T_{02}}{2} - \frac{T_{01} - T_{02}}{2} \exp -\frac{2t}{\tau}$ , électricité circuit  $RC$  avec  $\tau = RC$ .

### 15. Gel d'un lac

Réponses : En régime quasi-stationnaire, et en l'absence de source d'énergie dans la glace, on peut utiliser le concept de conductance thermique et on obtient immédiatement  $\phi = \frac{S \lambda (T_f - T_a)}{e(t)}$ . On vérifie que  $\phi > 0$  car  $T_a < T_f$  et le flux thermique se dirige bien du lac vers l'air (plus froid). Appliquons le premier principe de la Thermodynamique à la couche d'eau d'épaisseur  $de$ , de masse  $dm = \mu dS de$ , qui gèle entre  $t$  et  $t + dt$ . On a  $d(\mathcal{E}_c^M + \mathcal{E}_{p,ext}) = 0$ ,  $\delta W = \delta W_{fp}$  (forces pressantes que l'on intègre dans l'enthalpie ; condition isobare) et la chaleur reçue par l'eau vaut  $\delta Q = -\phi dt$  car le flux est sortant. Par conséquent,  $dH = -\phi dt$ . Or,  $dH = dm (-l_f) = -\mu S de l_f$ . Finalement,  $e \frac{de}{dt} = \frac{\lambda (T_f - T_a)}{\mu l_f}$ . On intègre cette équation différentielle à variables séparables et on obtient  $\frac{e^2(t)}{2} - \frac{e_0^2}{2} = \frac{\lambda (T_f - T_a)}{\mu l_f} t$ . On vérifie alors que  $e(t)$  évolue en  $\sqrt{t}$  aux grands temps (caractéristique des phénomènes diffusifs). On peut définir une durée caractéristique  $\tau$  des variations de  $e(t)$  par  $|\frac{de}{dt}| \simeq |\frac{e}{\tau}|$  soit  $\frac{\lambda (T_f - T_a)}{\mu l_f e} \simeq \frac{e}{\tau}$  donc  $\tau = \frac{\mu l_f e^2}{\lambda (T_f - T_a)}$ . Il faut bien noter que  $\tau$  dépend de  $t$  (lentement) via  $e(t)$  : il s'agit donc d'une durée caractéristique au voisinage d'une certaine date  $t$ . L'ARQS est valable si le champ des températures  $T(z, t)$  dans la glace a le temps de s'adapter aux modifications imposées par le fait que l'épaisseur de la couche de glace varie. Or, ce temps d'adaptation n'est autre que la durée caractéristique de la diffusion thermique à l'échelle  $e(t)$ , soit  $\tau_{diff} = e^2 / D_{th} = \mu c e^2 / \lambda$ . En définitive, l'ARQS est valable si  $\tau \gg \tau_{diff}$ , soit  $T_f - T_a \ll \frac{l_f}{c} = 79 \text{ K}$ . Si l'on impose un facteur 10, on trouve que l'ARQS n'est valable que pour  $T_f - T_a < 8 \text{ K}$ , ce qui est assez restrictif en Sibérie... On remarque que la condition de validité de l'ARQS est indépendante du temps, ce qui était loin d'être prévisible. La surface du lac est un système sans masse, donc son énergie totale est toujours nulle. Or, elle reçoit un flux thermique diffusif  $\phi$  de la part de la glace et cède un flux conducto-convectif  $\phi_{cc}$  à l'air. Le premier principe impose immédiatement que  $\underbrace{d\mathcal{E}}_0 = \underbrace{\delta W}_0 + \underbrace{\delta Q}_{(\phi - \phi_{cc})dt}$ .

Ainsi, en  $z = 0$ ,  $\phi = \phi_{cc}$ . Dans l'expression du flux diffusif  $\phi$  établie à la question 1, il convient de remplacer  $T_a$  par la température de surface effective  $T_s$ . En remplaçant  $\phi_{cc}$  par son expression, on peut calculer  $T_s$  :  $\frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e} = h S (T_s - T_a)$  soit  $T_s = \frac{T_a + \frac{\lambda}{eh} T_f}{1 + \frac{\lambda}{eh}}$ . Ainsi, la température de surface est une moyenne pondérée des températures  $T_f$  et  $T_a$ . On obtient  $T_s \simeq T_a$  si  $h \gg \lambda/e$ . Concrètement, cela correspond au cas où un vent souffle fort en négligeant les vagues... En tout état de cause, l'approximation de la première question est mauvaise au début où l'épaisseur est faible. Remarque : on pourrait calculer  $T_s(t)$  et  $e(t)$  via les égalités traduisant la conservation du flux thermique :  $\phi = \frac{\lambda S (T_f - T_s)}{e} = h S (T_s - T_a) = \mu S l_f \frac{de}{dt}$ .

### 16. Explosion dans un réacteur chimique

Réponses :  $\mu c \frac{\partial T}{\partial t} = A(T - T_0) + \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$ ;  $\tau = \frac{\mu c}{\lambda k - A}$ ;  $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0$  et  $\frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0$  imposent  $\varphi = 0$  ou  $\pi$  et  $kL = n\pi$ ; il y aura explosion si  $\tau < 0$  et donc pour  $L > n\pi \sqrt{\frac{\lambda}{A}}$  d'où  $L_c = \pi \sqrt{\frac{\lambda}{A}}$  avec  $A > 0$  puisque la réaction est exothermique.

### 17. Estimation de l'âge de la Terre par Lord Kelvin

Réponses :  $q(z = 0, t \rightarrow 0) \rightarrow \infty$ ,  $q(z = 0, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ ,  $q(z \neq 0, t \rightarrow 0) \rightarrow 0$ ,  $q(z \neq 0, t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$ ;  $A$  en  $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta = 0$ ; pour 1500 K : 80 millions d'années; trop faible, radioactivité à l'intérieur de la Terre.

### 18. Régime transitoire et série de Fourier

Réponses :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}$ ,  $T(x, t = 0^-) = T_1$ ,  $\theta(x = 0, t > 0) = \theta(x = L, t > 0) = 0$ ,  $\theta(0 < x < L, t = 0) = T_1 - T_0$ ,  $\frac{df}{dt} \frac{1}{f(t)} = a \frac{d^2 g}{dx^2} \frac{1}{g(x)} = \text{Cte} = \alpha$ , conditions aux limites imposent  $\alpha < 0$ ,  $g_n(x) = B_n \sin \frac{n\pi x}{L}$ ,  $k_n = \frac{n\pi}{L}$ ,  $\tau_n = \frac{L^2}{n^2 \pi^2 a}$ ,  $\theta(x, t = 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{L} = T_1 - T_0$ ,  $B_n = \frac{2(T_1 - T_0)}{L} \int_0^L \sin \frac{n\pi x}{L} dx$ ,  $B_n = \frac{2(T_1 - T_0)}{n\pi} (1 - \cos n\pi)$ ,  $\theta(x, t) = 4(T_1 - T_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)\pi} \sin \frac{(2n+1)\pi x}{L} \exp -\frac{(2n+1)^2 \pi^2 a t}{L^2}$ ,  $r_n = \frac{1}{2n+1} \exp \frac{ta\pi^2}{L^2} (1 - (2n+1)^2)$ ,  $r_1 = \frac{1}{3} \exp -\frac{8a\pi^2 t}{L^2}$ ,  $t_1 \simeq 2 \frac{L^2}{8a\pi^2} = 230 \text{ s}$ ,  $\frac{4}{\pi} \frac{T_1 - T_0}{T_0} \exp -\frac{\pi^2 a}{L^2} t_2$  d'où  $t_2 = 2,3 \text{ h}$ .

**19. Fuites thermiques**

Réponses :  $\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \theta}{\partial t}$ ,  $\theta(x, t = 0) = 0$ ,  $\theta(x = 0, t) = 0$ ,  $\theta(x = \infty, t) = 1$ ;  $\frac{d^2 \theta}{du^2} + 2u \frac{d\theta}{du} = 0$ ;  $\frac{d\theta}{du} = \exp(-u^2)$ ,  $\theta = 1 - \operatorname{erf}u$ ,  $T(x, t > 0) = T_0 + (T_e - T_0)(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{\sqrt{4\alpha t}})$ , à  $t$  fixé,  $T(x, t)$  décroît avec  $x > 0$  et pour  $x$  fixé,  $T(x, t)$  augmente pour passer de  $T_0$  à  $T_e$ ;  $j = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\pi t}}(T_e - T_0) \exp(-\frac{x^2}{4\alpha t})$ ;  $j_1 = j_2$  à l'interface,  $T_e = \frac{\varepsilon_1 T_{01} + \varepsilon_2 T_{02}}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$ , métal plus froid car  $T_e$  plus faible.

**20. Refroidissement d'une plaque, un modèle inadapté**

Réponses :  $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{dT}{dt}$  avec  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ ,  $\theta(x, t)$  vérifie aussi cette équation.  $\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{1}{D} \frac{1}{g} \frac{dg}{dt} = K$ .  $g(t) = g_0 \exp KDt$  avec  $K < 0$  car la solution ne doit pas diverger.  $\frac{d^2 f}{dx^2} - Kf(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} + k^2 f(x) = 0$ , la solution est  $f(x) = f_0 \cos kx + f'_0 \sin kx$ . La solution en température est paire en  $x$  et le flux surfacique de conduction est impair car  $j_{cond} = -\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}$ . On a donc bien une forme  $\theta(x, t) = \theta_0 \exp -k^2 Dt \cos kx$ . La continuité du flux surfacique de conduction et de celui de convection en  $x = a$  conduit à  $k\lambda \sin ka = h \cos ka$  d'où  $\tan X = \frac{ha}{\lambda} \frac{1}{X}$  avec  $X = ka$ . Cette équation se résout numériquement ou graphiquement, on trouve tous les points d'intersection entre  $\tan X$  et  $X$  d'où l'ensemble de valeurs discrètes. Le temps caractéristique est  $\tau = \frac{1}{k^2 D}$ , le régime le plus lent correspond à  $\tau$  élevé et donc  $k$  faible. Pour le cuivre, on a  $\frac{ha}{\lambda} = 1,25 \times 10^{-4}$  et  $ka = 1,1 \times 10^{-2}$  comme première solution non nulle. Cela permet d'avoir la plus petite valeur de  $k = 1,1 \text{ m}^{-1}$ . Pour le bois, on a  $\frac{ha}{\lambda} = 0,5$  et  $ka = 6,5 \times 10^{-1}$  et donc  $k = 65 \text{ m}^{-1}$ . Pour le cuivre  $D = 1,1 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , pour le bois  $D = 9,5 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . On trouve pour le cuivre  $\tau_{Cu} \simeq 2 \text{ h}$  et pour le bois  $\tau_{bois} \simeq 40 \text{ min}$ . Ces valeurs ne correspondent pas à la réalité qui veut que la température du cuivre diminue plus rapidement. Le modèle proposé n'est pas adapté, c'est la recherche de solutions à variables séparées (solutions stationnaires) qui ne convient pas ici. Il ne faut pas dissocier temps et espace car s'il y a bien une température stationnaire pour l'air à  $T_0$ , il n'y a pas d'autres grandeurs physiques stationnaires dans le problème.

**21. Méthode Flash-Laser**

Réponses :

1. (a) La variation de l'énergie de la pièce est due à la puissance  $P$  mais aussi aux pertes convectives. On a  $\rho\pi r^2 e c \frac{dT}{dt} = P - h(2\pi r^2 + 2\pi r e)(T - T_0)$ . On obtient l'équation différentielle  $\tau \frac{dT}{dt} + T = T_0 + \frac{P}{h2\pi r(r+e)}$  avec  $\tau = \frac{\rho c r e}{2h(r+e)}$ .
  - (b) La température suit l'évolution  $T(t) = T_0 + \frac{P}{h2\pi r(r+e)}(1 - \exp -\frac{t}{\tau})$ .
  - (c) Si la durée  $t_0$  très inférieure à  $\tau$  alors on peut effectuer un développement limité de l'exponentielle  $\exp -\frac{t}{\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$ . On obtient alors  $T(t) = T_0 + \frac{P}{\rho c \pi r^2 e} t$ . La température maximale est obtenue à  $t_0$  et vaut :  $T_{max} = T_0 + \frac{P}{\rho c \pi r^2 e} t_0$ .
  - (d) Après la date  $t_0$ , il n'y a plus de chauffage mais seulement des pertes convectives. L'équation différentielle se simplifie sans changer la constante de temps et on obtient un refroidissement du premier ordre classique. En écrivant la continuité de la température à  $t = t_0$ , on arrive à la forme :  $T(t) = T_0 + (T_{max} - T_0) \exp -\frac{t-t_0}{\tau}$ .
  - (e) On reprend l'expression de la phase de chauffage pour écrire que  $T(t) = T_0 + \frac{E}{\rho c \pi r^2 e} \frac{t}{t_0}$ . Ainsi pour  $E$  fixé, on voit bien que si  $t_0 \rightarrow 0$ , on obtient une montée très rapide de la température jusqu'à  $t_0$  (non nul ...) puis la décroissance exponentielle prévue dans le refroidissement, voir le graphique de la figure 1.
2. (a) On ne prend pas en compte la convection et on étudie une tranche de la pièce d'épaisseur  $dz$  comprise entre  $z$  et  $z + dz$ . La variation d'énergie du système est égal à la puissance qui entre en  $z$  moins la puissance qui sort en  $z + dz$  car il n'y a pas de phénomènes de création d'énergie à l'intérieur de la pièce. On a  $\rho\pi r^2 dz c \frac{\partial T}{\partial t} = j_{cond}(z, t)\pi r^2 - j_{cond}(z + dz, t)\pi r^2$ . On a donc l'équation locale du bilan énergétique :  $\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\partial j_{cond}}{\partial z}$ . On utilise la loi de la conduction de FOURIER et il vient  $j_{cond} = -\lambda \frac{\partial T}{\partial z}$  où  $\lambda$  est la conductivité thermique du matériau. On obtient facilement l'équation de diffusion thermique  $\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial T}{\partial t}$  avec  $D$  la diffusivité thermique qui est  $D = \frac{\lambda}{\rho c}$ .
  - (b) On utilise le résultat fourni en  $z = e$  et on en déduit que  $u(t) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\pi \exp -\frac{n^2 \pi^2 Dt}{e^2}$  en n'oubliant pas que  $\cos n\pi = (-1)^n$ . Si l'on ne garde que le terme du fondamental, à savoir  $n = 1$ , on obtient l'expression approchée  $u(t) \simeq 1 - 2 \exp -\frac{\pi^2 Dt}{e^2}$ . On peut rapidement éliminer les termes en  $n^2$  de l'exponentielle car leur temps caractéristique évolue en  $n^2$ . Dès le rang  $n = 2$ , il est 4 fois plus petit, puis 9 fois plus petit. Comme  $\exp -4 \simeq 0,02$  et  $\exp -9 \simeq 0,0001 \dots$
  - (c) Voir le corrigé du script *Python*.

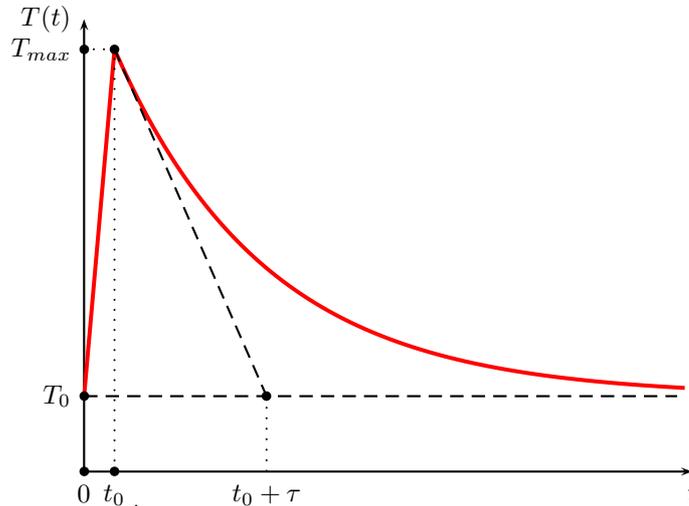


FIGURE 1 – Évolution de la température lors d'un flash laser très bref

- (d) On a  $u = \frac{1}{2}$  lorsque  $\exp -\frac{\pi^2 D t_{1/2}}{e^2} = \frac{1}{4}$ . On obtient donc :  $t_{1/2} = \frac{2 \ln 2 e^2}{\pi^2 D}$ . On constate bien que mesurer  $t_{1/2}$  permet d'avoir une mesure du coefficient de diffusion thermique encore appelé diffusivité thermique.
- (a) On mesure  $t_{1/2} = 0,248$  s, cela permet d'obtenir  $D = 5,7 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .
- (b) Le temps caractéristique de la diffusion est  $\tau_{diff} = \frac{e^2}{\pi^2 D} \simeq 0,2$  s. Pour la convection, c'est  $\tau$  exprimé au début du problème à savoir  $\tau = \frac{\rho c r e}{2h(r+e)}$ . Pour faire le calcul, il faut déterminer  $r$  grâce à  $S = 2\pi r(r+e)$  avec  $e = 1$  cm. On résout l'équation du second degré pour arriver à  $r = 3,5$  cm, on remarque au passage que l'épaisseur  $e$  n'est pas petite devant le rayon comme on aurait pu le penser puisque la pièce avait été qualifiée de fine. Le calcul donne  $\tau \simeq 1900$  s. Comme  $\tau \gg \tau_{diff}$ , il était tout à fait logique de négliger la convection devant la diffusion dans la méthode de PARKER.
- (c) Puisque l'on néglige les pertes par convection, on peut dire que la montée de température  $\Delta T_\infty \simeq 0,3$  K est celle de toute la pièce étudiée sous l'effet de l'apport d'énergie. On a donc une énergie apportée par un flash laser  $E_{app} = \rho c \pi r^2 e \Delta T_\infty \simeq 30$  J. Cette valeur n'est pas très impressionnante mais il faut remarquer qu'elle a été donnée par le laser en 4 ms, la puissance du laser d'environ 7,5 kW. Il est préférable de ne pas se trouver en face du laser à la place de la pièce de Dural!
- (d) On peut penser qu'il sera difficile d'obtenir une puissance bien uniforme sur un disque de rayon  $r = 3,5$  cm pour le laser. On n'a pas pris en compte de diffusion thermique en direction radiale. De plus, de l'énergie sera forcément donnée à la structure qui tient la pièce à illuminer. On peut aussi être surpris de voir que les durées sont évaluées à 1 ms près alors que la durée d'éclairage est de 4 ms comme nous venons de le dire. Il serait plus raisonnable de donner une réponse à 0,01 s près.

## C. Diffusion de matière

### 22. Diffusion de neutrons dans une tige

Réponses :  $n$  en  $\text{m}^{-3}$  et  $D$  en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ , – car diffusion des zones les plus concentrées vers les moins concentrées,  $j(x, t)S - j(x + dx, t)S = \frac{\partial n}{\partial t} S dx$ ,  $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t}$ ,  $n(x) = n_0 + \frac{n_L - n_0}{L} x$ ,  $j = D \frac{n_0 - n_L}{L}$ ,  $j(x, t)S - j(x + dx, t)S + \frac{kn}{\tau} S dx - \frac{n}{\tau} S dx = \frac{\partial n}{\partial t} S dx$  d'où  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + (k - 1) \frac{n}{\tau}$ ,  $\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{k-1}{D\tau} n = 0$ ,  $k = 0$ ,  $n(x) = j_0 \sqrt{\frac{\tau}{D}} \exp -\frac{x}{\sqrt{D\tau}}$ ,  $\delta = 2\sqrt{D\tau} \ln 10$ ,  $\delta_{eau} = 0,80$  m et  $\delta_{carbone} = 4,12$  m l'eau est plus efficace,  $k > 1$  d'où  $n(x) = n_0 \sin \sqrt{\frac{k-1}{D\tau}} x$ ,  $L = p\pi \sqrt{\frac{D\tau}{k-1}}$  avec  $n \in \mathbb{N}$ ,  $L_c = \pi \sqrt{\frac{D\tau}{k-1}}$ .

### 23. Colonie de bactéries

Réponses :  $\frac{\partial^2 n}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial n}{\partial t}$ ,  $D$  en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $D \simeq v^2 T = 10 \times 10^{-10} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\Delta t = \frac{L^2}{D} = 10^8$  s donc trois ans, c'est trop long, la diffusion n'est pas le seul mécanisme,  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{n}{\tau}$ , solutions sinusoidales, solutions stationnaires sans sens physique car la division entraîne forcément une augmentation du nombre de particules, solutions indépendantes de  $x$   $n(t) = n_0 \exp \frac{t}{\tau}$  diverge cohérent avec l'observation précédente,  $N_{moy} \simeq na$ , probabilité en  $\frac{na}{\tau}$ ,  $\frac{\partial n}{\partial t} = D \frac{\partial^2 n}{\partial x^2} + \frac{n}{\tau} - \frac{a}{\tau} n^2$ ,  $d_1 = \frac{1}{\tau} = 8,3 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$ ,  $d_2 = \frac{a}{\tau} = 8,3 \times 10^{-9} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , solutions stationnaires et uniformes  $n_1 = 0$  aucune bactérie,  $n_2 = \frac{1}{a}$  la mortalité est exactement compensée par la division, source de bactérie en  $-\infty$  qui meurent toutes avant d'arriver en  $+\infty$ ,  $\xi = x - ct$ ,  $f' = \frac{df}{d\xi}$  et  $f'' = \frac{d^2 f}{d\xi^2}$ ,

$D \frac{d^2 f}{d\xi^2} = -\frac{1}{c} \frac{df}{d\xi} - \frac{1}{\tau} f + \frac{a}{\tau} f^2$ ,  $E_{pot} = \frac{1}{2\tau} f^2 - \frac{a}{3\tau} f^3$ ,  $\Delta E_c + \Delta E_{pot} = W_{frott}$  avec  $\Delta E_c = \frac{1}{2} D (f'^2_{n_2} - f'^2_{n_1}) = 0$  d'où  $c = 6\tau a^2 \int f'^2(\xi) d\xi$ , plus vite car avec la solution  $f(x - ct)$  la propagation s'effectue dans le sens  $x$  croissant avec des durées proportionnelles aux distances.

## D. Soleil - Terre

### 24. Dilution du rayonnement solaire

Réponses :  $7,5 \times 10^{16} \text{ W}$  et  $4 \times 10^{26} \text{ W}$ ;  $\Omega = \frac{\pi R_T^2}{d^2}$ ,  $2 \times 10^{17} \text{ W}$ , situation de quasi équilibre (imprécision des calculs).

### 25. Bilan radiatif de la Terre

Réponses :  $E_0 = \sigma T_S^4 \left(\frac{R_S}{D}\right)^2$ ,  $T_S = 5730 \text{ K}$ ,  $u = E_0 \frac{\pi R_T^2}{4\pi R_T^2} = \frac{E_0}{4} = 338 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $\lambda_m T = 2895 \mu\text{m} \cdot \text{K}$  d'où  $T = 6110 \text{ K}$  écart de 7%, sans effet de serre  $(1 - A)u = \sigma T_P^4$  et  $T_P = 250 \text{ K}$ , effet de serre avec équilibre sommet atmosphère  $u = Au + \varphi_r + \alpha\varphi_e$  et équilibre au sol  $(1 - A)u + \varphi_1 = \varphi_e$ ,  $\varphi_e = u(1 - A) \left(\frac{T_0}{T_P}\right)^4 = 1,15u$ ,  $\varphi_r = 0,37u$ ,  $\varphi_1 = 0,49u$ ,  $E_{eau} = m\Delta H_{vap}$ ,  $P_S = \frac{E_{eau}}{\Delta t} = 137 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ,  $P_S = 0,42u$ .

## E. Objets terrestres en régime indépendant du temps

### 26. Fahrenheit 451

Réponses : Image de rayon  $r = \frac{R_S}{d} f' \simeq 0,023 \text{ cm}$ ;  $E_0 \frac{\rho^2}{r^2} = 1,9 \times 10^6 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ;  $T \simeq 2400 \text{ K}$ , oui.

### 27. Effet de serre

Réponses :  $\varphi_S + \varphi_V = \varphi_P$  et  $\varphi_P = 2\varphi_V$  d'où  $\sigma T^4 = 2\varphi_S$  et  $\sigma T_1^4 = \varphi_S$ ,  $\varphi_S + \varphi_{V1} = \varphi_P$ ,  $\varphi_P + \varphi_{V2} = 2\varphi_{V1}$  et  $2\varphi_{V2} = \varphi_{V1}$  d'où  $\sigma T^4 = 3\varphi_S$ , ensuite  $\sigma T^4 = (n + 1)\varphi_S$ , cela diverge,  $\sigma T^4 = (1 - r)^n (n + 1)\varphi_S$  optimale pour  $n_m = -\frac{1}{\ln(1-r)} - 1$ ,  $n_m \simeq 11$ .

### 28. Utilisation thermique de l'énergie solaire

Réponses :  $J = \sigma T_0^4$ ,  $T_0 = 71^\circ\text{C}$ ,  $\lambda_m = 9,4 \mu\text{m}$  dans l'IR,  $2J = \sigma T_1^4$ ,  $T_1 = 136^\circ\text{C}$ ,  $J + j_2 = j_{conv} + j_1$  et  $2j_2 = j_1$ , de plus  $j_1 = \sigma T_p^4$  avec  $T_p = 333 \text{ K}$ ,  $\mathcal{D}_m c_{eau} (t_2 - t_3) = j_{conv} S$ ,  $S = 2,6 \text{ m}^2$ ,  $\eta = \frac{j_{conv}}{J} = 56\%$ .

### 29. Maintenir l'eau au frais ...

Réponses :  $z$  hauteur d'eau,  $dm = \rho \Sigma dz$ ,  $\Sigma = \pi r^2$ ,  $r^2 + (z - R)^2 = R^2$ ,  $dm = \rho \pi (2Rz - z^2) dz < 0$ ,  $S = 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 2\pi R z$ ,  $dm = -K S dt$ ,  $2KR dt = -\rho (2R - z) dz$ ,  $K = \frac{\rho R}{4T} = 3,9 \times 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $Sh(T_a - T) + S\sigma(T_a^4 - T^4) = K S L_v$ , linéarisation  $h_{\text{éq}} = h + 4\sigma T_a^3$ ,  $h_{\text{éq}}(T_a - T) = K L_v$ ,  $t = 18,6^\circ\text{C}$ .

## F. Objets terrestres en régime variable

### 30. Sphère dans un four

Réponses :  $S = 4\pi R^2$ ,  $P_r = \sigma T_1^4 4\pi R^2$ ,  $P_d = \sigma T^4 4\pi R^2$ ,  $\delta Q = -\sigma S 4T_1^3 (T - T_1) dt$ ,  $m c \frac{dT}{dt} + \sigma S 4T_1^3 T = \sigma S 4T_1^4$ ,  $T = (T_0 - T_1) \exp -\frac{t}{\tau} + T_1$ ,  $\tau = \frac{mc}{\sigma S 4T_1^3}$ ,  $m = \mu \frac{4}{3} \pi R^3$  et  $S = 4\pi R^2$  d'où  $\tau \simeq 1 \text{ h}$ .

### 31. Constante de temps d'un thermomètre

Réponses :  $300 \text{ K}$  et  $315 \text{ K}$ ;  $c \frac{dT}{dt} + S\sigma T^4 = S(\sigma T_0^4 + \phi) = S\sigma T_f^4$ ,  $c \frac{d\Delta T}{dt} + S\sigma 4T_f^3 \Delta T = 0$ ,  $c = 40 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$ .

### 32. Utilisation thermique de l'énergie solaire

Réponses : Pas d'accumulation d'énergie dans l'absorbeur, l'absorbeur élimine  $\Phi$  uniquement par convection;  $\Phi = h'(T_a(x) - T_e) + h(T_a(x) - T(x, t))$ ,  $\mu \epsilon c_{eau} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = -ve\mu c_{eau} \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + h(T_a(x) - T(x, t))$ ;  $ve\mu c_{eau} \frac{dT}{dx} + \frac{hh'}{h+h'} T = \frac{\Phi + h'T_e}{h+h'}$ ,  $T(x) = T_{max} + (T_0 - T_{max}) \exp -\frac{x}{\delta}$ ,  $T_{max} = \frac{\Phi + h'T_e}{hh'}$ ,  $\delta = ve\mu c_{eau} \frac{h+h'}{hh'}$ .

## G. Thermodynamique du rayonnement

### 33. Étoiles de luminosité identique

Réponses : la loi de STEFAN indique la puissance surfacique est donnée par  $j_{ray} = \sigma T^4$  en  $W \cdot m^{-2}$ . La puissance émise par la surface de l'étoile est donc  $P = \sigma T^4 4\pi R^2$ . Si l'on raisonne à puissance constante, on doit donc avoir  $R^2 T^4 = Cte$ . On en déduit que  $R_B = R_A \left(\frac{T_A}{T_B}\right)^2$ . Comme la température sur  $B$  est deux fois plus élevées que sur  $A$ , on en déduit que  $R_B = R_A/4$ . Réponse d).

### 34. Méthode de Boltzmann

Réponses : Lors d'un choc la quantité de mouvement varie de  $2q$ , la force subie par une surface  $dS$  est :  $dF = \frac{d^2p}{dt}$  avec  $d^2p = \frac{1}{6}ncdSdt(2q)$  où  $n = \frac{N}{V}$  est la densité volumique de particules,  $dF = \frac{ngc}{3}dS$  d'où  $p = \frac{ngc}{3} = \frac{n\epsilon}{3} = \frac{1}{3}\bar{u}$ ,  $p = \frac{n'RT}{V}$  et  $U = n'\frac{3}{2}RT$ ,  $p_{GP} = \frac{2}{3}\bar{u}$ ,  $\delta W = -\frac{\bar{u}}{3}dV$ ,  $dU = Vd\bar{u} + \bar{u}dV$ ,  $\delta Q = \frac{4}{3}\bar{u}dV + Vd\bar{u}$ ,  $dS = \frac{4\bar{u}}{3T}dV + \frac{V}{T}d\bar{u}$ ,  $d\bar{u} = \frac{d\bar{u}}{dT}dT$ , égalité des dérivées secondes croisées  $\frac{4}{3}\left[\frac{T\frac{d\bar{u}}{dT} - \bar{u}}{T^2}\right] = \frac{1}{T}\frac{d\bar{u}}{dT}$ ,  $\frac{d\bar{u}}{dT} - 4\frac{\bar{u}}{T} = 0$ ,  $\bar{u} = KT^4$ ,  $dF = -pdV - SdT$ ,  $\left.\frac{\partial p}{\partial T}\right|_V = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T$ ,  $\frac{1}{3}\frac{d\bar{u}}{dT} = \frac{4}{3}\frac{\bar{u}}{T}$  même résultat pour  $\bar{u}(T)$ ,  $\delta Q = 0$ ,  $4\frac{dV}{V} + 3\frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = 0$ ,  $T^3V = K'$ , la température diminue en  $V^{-1/3}$  lorsque le volume augmente, l'univers se refroidit,  $V$  évoluant en  $R^3$  où  $R$  est le rayon de l'univers, on a  $RT = K''$ .