Exercices : 15 - Cinématique du point

A. Repérage

1. Le vol de la libellule

Une libellule, assimilée à un point matériel M, vole à vitesse constante v_0 dans le plan horizontal (Oxy) en gardant un œil sur sa proie, qui reste fixe à l'origine O des coordonnées. La vitesse de la libellule fait ainsi un angle constant α avec la direction MO. On note a la valeur initiale de la distance MO.

1. Au bout de combien de temps la libellule rencontrera-t-elle sa proie ?
2. De quel angle aura-t-elle tourné autour de cette dernière ?
3. Quelle était la nature de la trajectoire de la libellule ?
4. Déterminer l'accélération initiale de la libellule.

2. Un insecte sur un élastique

Dans cet exercice, on n'abordera que des questions cinématiques. La rupture de l'élastique n'est pas envisagée. . .

On considère un insecte qui progresse sur un élastique rectiligne, horizontal, tendu et de longueur L au départ. L'insecte part de l'extrémité de l'élastique fixée au départ sur un mur. L'insecte se déplace sur l'élastique à une vitesse $v = 1\,\mathrm{mm}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. On allonge l'élastique en tirant son extrémité libre à la vitesse $V = 1\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ tout en le maintenant bien horizontal.

1. L'insecte parviendra-t-il à l'extrémité de l'élastique ? Si oui, calculer le temps qu'il lui faudra.

En cas de besoin, on résoudra l'équation différentielle $V\dfrac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}X} = v + \dfrac{x_i}{X}V$ en cherchant une solution de la forme $x_i = Xf(X)$.

3. Lecture d'un CD

Le disque compact se présente sous la forme d'un disque de diamètre $120\,\mathrm{mm}$ et d'épaisseur $1,2\,\mathrm{mm}$, sur lequel est gravée l'information binaire, convenablement codée. Cette gravure est constituée de micro-cuvettes, de largeur constante et de longueur variable. La profondeur de ces cuvettes est de l'ordre de quelques dizaines de nanomètres. Lors de la rotation du disque, les structures porteuses d'information binaire défilent dans le plan focal d'un dispositif optique. Ces structures diffractent et réfléchissent le faisceau de lecture. L'analyse des faisceaux en retour permet ainsi de remonter aux informations enregistrées. La piste est codée le long d'une spirale (le rayon est une fonction affine de l'angle polaire) dont le pas radial, noté p, est de $1,6\,\mu\mathrm{m}$ pour les CD, $0,74\,\mu\mathrm{m}$ pour les DVD et $0,3\,\mu\mathrm{m}$ pour le Blu-Ray. Cette réduction de pas de la spirale est due à la diminution des longueurs d'onde respectives de lecture : $780\,\mathrm{nm}$ pour le CD, $650\,\mathrm{nm}$ pour le DVD et $405\,\mathrm{nm}$ pour le Blu-Ray. La lecture des pistes se fait du rayon intérieur r_0 vers le rayon extérieur r_1. La vitesse de défilement de la piste devant le spot, notée V, est constante (la vitesse de rotation des CD audio par rapport au bâti n'est donc pas constante).

1. Exprimer la longueur L de la spirale en fonction des rayons extrêmes et du pas radial p. Faire l'application numérique pour $p = 1,6\,\mu\mathrm{m}$, $r_0 = 25\,\mathrm{mm}$ et $r_1 = 58\,\mathrm{mm}$.
2. Quelle est alors la durée maximale T de lecture audio ? Faire l'application numérique pour $V = 1,2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$?
3. Comment évolue la vitesse de rotation $\omega(r)$ du disque par rapport au bâti ? Tracer l'allure de cette évolution en fonction de la position r du spot et préciser les valeurs ω_0 et ω_1 qui correspondent aux rayons r_0 et r_1. On exprimera ces vitesses en radian par seconde puis en tours par minute.
4. Comment évolue la vitesse radiale $\dot{u}(r)$ du spot ? Préciser les valeurs $\dot{u}_0$ et $\dot{u}_1$ qui correspondent aux rayons r_0 et r_1. On exprimera ces vitesses en micromètres par seconde.

4. Trois chiens se courent après

Trois chiens qui courent avec une norme de leur vitesse constante v se poursuivent l'un l'autre. Le premier chien C_1 court après le deuxième chien C_2 qui court après le troisième chien C_3 qui court aussi après le premier. À l'instant initial, les chiens sont à la distance D les uns des autres, aux trois sommets d'un triangle équilatéral.

1. Que peut-on dire de la longueur L parcourue par chaque chien quand ils se rattraperont ?

Proposition de réponse :

a) L dépend de v b) L ne dépend pas de D

c) $L = \dfrac{2D}{3}$ d) Ils ne se rattraperont jamais.

5. Trajectoire en polaire

Un point matériel décrit une courbe plane d'équation polaire $r = r_0(1+\cos\theta)/2$. On rappelle que les coordonnées polaires sont aussi appelées coordonnées cylindriques. La trajectoire est parcourue à la vitesse angulaire $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ constante depuis l'instant $t = 0$ où $\theta = 0$.

1. Que représente r_0 ? Montrer que la trajectoire est symétrique par rapport à l'axe de repérage de l'angle θ qui est l'axe Ox.
2. Exprimer le déplacement élémentaire en coordonnées polaires. En déduire l'expression de la longueur élémentaire d'une portion de courbe $\mathrm{d}s$ telle que $\mathrm{d}s^2 = (\mathrm{d}r)^2 + (r\mathrm{d}\theta)^2$. Déterminer $s(\theta)$ sachant que $s(0) = 0$ et que $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\theta} > 0$. Quelle est la longueur de la trajectoire pour $\theta \in [0, \pi]$?
3. Déterminer les composantes de la vitesse du point étudié dans la base polaire.
4. Déterminer les composantes, dans la base polaire, du vecteur tangent à la trajectoire que l'on note $\vec{u}_t$. En déduire l'angle θ_t qui existe entre $\vec{u}_t$ et le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ de la base des coordonnées polaires. On définit un vecteur unitaire dit normal à la trajectoire noté $\vec{u}_n$. Il est perpendiculaire à $\vec{u}_t$ et dirigé vers l'intérieur de la trajectoire. Représenter la trajectoire et les vecteurs $\vec{u}_t$ et $\vec{u}_n$ en un point quelconque de celle-ci.
5. Déterminer les composantes de l'accélération du point étudié dans la base polaire. L'accélération peut s'écrire dans la base $(\vec{u}_t, \vec{u}_n)$. Donner l'expression de celle-ci dans cette base selon $\vec{a} = a_n\vec{u}_n + a_t\vec{u}_t$. Sachant que le rayon de courbure R_c de la trajectoire est défini par $v^2 = R_c a_n$, déterminer R_c.

6. Durée minimale

On considère un nageur assimilé à un point A situé dans l'eau d'un lac calme. Ce nageur a pour objectif de rejoindre dans un temps minimal une baigneuse qui bronze sur la plage située en un point B, voir la figure 1. Ce nageur ne peut suivre que des trajectoires rectilignes. On considère que le nageur progresse dans l'eau à une vitesse v constante et à une vitesse $V > v$ aussi constante sur la plage.

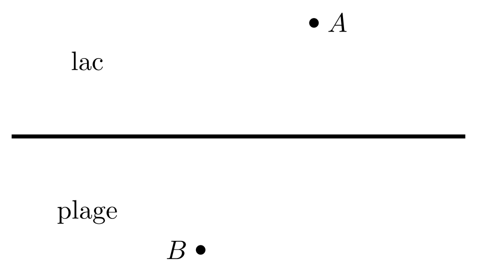


FIGURE 1 – Le nageur et la baigneuse...

1. Paramètrer le problème afin de pouvoir en faire ensuite une étude. On mettra, en particulier, en évidence le point de la limite lac-plage par lequel passera le nageur.
2. Évaluer les temps de parcours dans l'eau et sur la plage du nageur.
3. À quelle condition le temps de parcours est-il minimal ?
4. Relier la loi obtenue à une loi de l'optique géométrique.

7. Mouvement cycloïdal

Une roue de rayon a et de centre C se déplace dans un plan vertical Oxz, de sorte que la vitesse de son centre C vérifie $x_C = v_0 t$ où $v_0 > 0$ est une constante. Un point M de la roue, situé à la distance r de C, tourne avec celle-ci à la vitesse angulaire constante ω. On suppose qu'à la date $t = 0$, M se situe sur l'axe Oz au-dessus de C.

1. Déterminer les coordonnées cartésiennes de la position et de la vitesse de M, en fonction de r, v_0, ω et t.
2. On note a le rayon de la roue et on impose $v_0 = \omega a$. Expliquer pourquoi cette condition correspond à l'absence de tout dérapage de la roue sur le plan horizontal Oxy sur lequel elle roule.
3. Pour r quelconque, déterminer les équations paramétriques de la trajectoire de M. Proposer un tracé des trajectoires dans le cas où $r < a$, $r = a$ et dans le cas fictif où $r > a$. Commenter.

8. Mouvement sur une trajectoire particulière

Un mobile M est en mouvement dans le plan Oxy sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation polaire $r = 2R\cos\theta$ pour $r > 0$ uniquement. Les coordonnées polaires sont encore appelées coordonnées cylindriques. Au cours de ce mouvement, l'angle θ varie de sorte que :

$$\dot{\theta} = \frac{\Omega}{\cos^2\theta}$$

R et Ω sont des constantes positives.

1. Déterminer la nature de la courbe $\mathcal{C}$. Établir son équation cartésienne. Tracer la courbe correspondante.
2. Déterminer la vitesse du mobile, en coordonnées polaires, en fonction de Ω, R et θ. Montrer que l'accélération est en permanence dirigée vers le point O.
3. Quelle est la durée nécessaire pour un parcours complet de cette trajectoire ?

9. Une hélice

Un point matériel a pour trajectoire la courbe d'équation polaire :

$$r = R\cos\theta \qquad \text{et} \qquad z = 0$$

où R est une constante positive, en coordonnées cylindro-polaires (r, θ, z). L'expression de r est définie pour $r > 0$.

1. Quelle est la base associée aux coordonnées polaires ? Quelle est la nature de la trajectoire du point étudié ?
2. On suppose la trajectoire parcourue avec une vitesse de norme v constante. Évaluer vitesse et accélération en chaque point de la trajectoire, dans la base cylindro-polaire.
3. On suppose maintenant la trajectoire parcourue à vitesse angulaire $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$ constante. Évaluer vitesse et accélération à chaque instant, avec $\theta(t = 0) = 0$, dans la base cartésienne.
4. On suppose maintenant que l'équation de la trajectoire est :

   $$r = R\cos\theta \qquad \text{et} \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta$$

   où R et h sont des constantes positives et qu'elle est parcourue avec une vitesse v constante. Déterminer la vitesse et l'accélération dans la base cylindrique ou dans la base cartésienne.

10. Mouvement le long d'une came

Dans un dispositif de mécanique comme par exemple un moteur thermique, un point matériel M est astreint à se déplacer, dans le plan Oxy d'un référentiel $\mathcal{R} = Oxyz$, le long du pourtour d'une came fixe dans le référentiel $\mathcal{R}$. L'équation polaire de la trajectoire suivie par M est :

$$r = b - c\cos\theta$$

avec b et c des constantes positives et $c < b$. Par rapport au référentiel $\mathcal{R}$, le point M possède une vitesse angulaire ω constante.

1. Représenter la trajectoire du point M.
2. Exprimer, en coordonnées (r, θ), la vitesse $\vec{v}$ du point M.
3. Exprimer, en coordonnées (r, θ) toujours, l'accélération $\vec{a}$ du point M.

4. Calculer la norme de la vitesse v et celle de l'accélération a pour $\omega = 30\,\text{tours}\,\text{s}^{-1}$, lorsque le point M atteint l'axe Oy sachant que $b = 2\,\text{cm}$ et $c = 1\,\text{cm}$.

B. Lois de composition des vitesses et des accélérations

11. Un nageur

On se réfère à la figure 2. Un nageur parti du point A se déplace à la vitesse constante $\vec{V}$ par rapport à l'eau d'une rivière dont les eaux sont animées d'un courant de vitesse $\vec{v}$ avec $v < V$. La nageur effectue les trajets aller-retour ABA en un temps t_1 et ACA en un temps t_2. On donne $AB = d$ et $AC = 2d$.

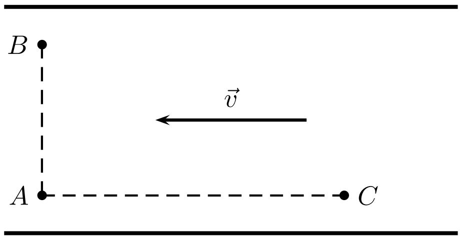


Figure 2 – Nageur et rivière

1. Exprimer le rapport t_2/t_1 en fonction du rapport v/V.
2. Sachant que $t_2 = 4t_1 = 16\,\text{mn}$, déterminer la direction de la vitesse $\vec{V}$ du nageur qui se déplace à contre courant pour atteindre C et le temps t_0 qu'il aurait mis pour parcourir l'aller-retour dans un lac calme.

12. Promener son chien

Un homme part se promener en marchant à une vitesse de $2\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Une heure après, un autre homme part avec un chien pour le rejoindre, en marchant à une vitesse de $4\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Le chien étant agité, il fait des aller-retours entre les deux hommes, à une vitesse de $10\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ jusqu'à ce que les deux hommes se rejoignent. Quelle distance D le chien a-t-il parcouru ?

Proposition de réponses :

a) $D = 2\,\text{km}$ b) $D = 8\,\text{km}$ c) $D = 10\,\text{km}$ d) $D = 20\,\text{km}$

13. Parachutiste

Un parachutiste P, assimilé à un point matériel, tombe verticalement à la vitesse limite v par rapport au référentiel terrestre $\mathcal{R}$. À la date $t = 0$, il est situé à l'altitude h au dessus du point O, origine d'un repère Oxy de $\mathcal{R}$. À cette même date $t = 0$, un train passe en O. On note $O'x'y'$ le repère attaché au train qui constitue de le référentiel $\mathcal{R}'$, O et O' sont confondus à la date $t = 0$.

1. Le train a une vitesse uniforme V horizontale. Établir l'expression de l'accélération de P puis de la vitesse de P dans le référentiel $\mathcal{R}'$. Déterminer la trajectoire de P par rapport à un voyageur assis dans le train.
2. Le train aborde à la même vitesse V une rampe formant l'angle α avec l'horizontale. Reprendre les questions précédentes.
3. Le train démarre de O avec un mouvement rectiligne horizontal d'accélération constante a. Déterminer la trajectoire de P par rapport à un voyageur assis dans le train.
4. On donne $V = 54\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$ pour le premier cas, $\alpha = 30°$ pour le second et $a = 1\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ pour le troisième cas. Sachant que pour le voyageur, le parachute atteint le sol dans une direction par rapport à l'horizontale inclinée d'un angle de $\theta_1 = 30°$ dans le premier cas, θ_2 dans le second et $\theta_3 = 45°$ dans le troisième, déterminer les valeurs de v, h et θ_2.

14. Rotation

Un manège tourne à une vitesse angulaire constante ω_0. On utilise un référentiel $\mathcal{R}$ lié au manège et un référentiel $\mathcal{R}_0$ cartésien lié au sol, référentiels confondus à $t = 0$. Le référentiel $\mathcal{R}$ est constitué de $(O, \vec{e}_x{}', \vec{e}_y{}', \vec{e}_z)$, le référentiel $\mathcal{R}_0$ de $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Le propriétaire P parcourt la plate-forme pour ramasser les tickets. Partant du centre à l'instant $t = 0$, il suit un rayon de la plate-forme avec un mouvement uniforme de vitesse v_r. Pour simplifier, on choisira le rayon parcouru porté par $\vec{e}_x{}'$.

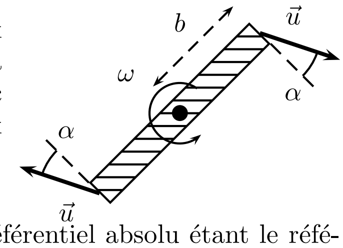
1. Donner la position de P à l'instant t sur la base de projection $\mathcal{R}$, puis sur la base $\mathcal{R}_0$.
2. Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de P dans $\mathcal{R}_0$, soit $r(\theta)$, et la dessiner. Les coordonnées polaires (r, θ) sont celles liées à P par rapport à $\mathcal{R}_0$.

3. Déterminer directement les composantes de la vitesse et de l'accélération de P par rapport à $\mathcal{R}_0$ dans la base de projection $\mathcal{R}$.
4. Retrouver ces résultats par application des lois de composition.

   P parcourt maintenant un cercle de rayon r_0 concentrique à la plate-forme à une vitesse linéaire constante $r_0\omega$.
5. Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de P dans $\mathcal{R}_0$.
6. Déterminer directement les composantes de la vitesse et de l'accélération de P par rapport à $\mathcal{R}_0$ dans la base de projection polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ liée à P que l'on dessinera.
7. Vérifier les lois de composition entre $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}_0$.
8. Discuter physiquement le cas particulier $\omega = -\omega_0$.

15. Arroseur de jardin

Un tourniquet hydraulique destiné à l'arrosage des jardins est constitué de deux bras symétriques, de longueur b, qui tournent autour d'un axe vertical avec la vitesse angulaire constante ω. L'eau est éjectée par les extrémités des bras avec une vitesse par rapport au bras égale à $\vec{u}$ et faisant un angle α avec la normale aux bras. La vitesse $\vec{u}$ est considérée comme constante.



1. Exprimer les vitesses relative, d'entraînement et absolue pour l'eau. Le référentiel absolu étant le référentiel terrestre.
2. Même question pour les accélérations.

16. Horloge

On associe à une horloge un repère fixe OXY qui sera considéré comme référentiel absolu. On associe à l'aiguille des secondes un repère Oxy qui sera considéré comme relatif. La longueur de l'aiguille des secondes est $L = 30\,\text{cm}$. Un insecte parcourt d'un mouvement uniforme l'aiguille des secondes, qui a elle-même un mouvement uniforme non saccadé. Au départ, l'insecte est au centre O de l'horloge qui marque 0 seconde. Au bout d'une minute ($T = 1\,\text{mn}$), l'insecte arrive à l'extrémité de l'aiguille.

1. Déterminer en fonction de L, T et du temps t la vitesse et l'accélération relative de M ainsi que sa position sur l'aiguille.
2. Déterminer de même la vitesse et l'accélération d'entraînement.
3. Déterminer l'accélération de Coriolis.
4. Calculer le module de toutes ces grandeurs aux dates $t = 0\,\text{s}$, $t = 15\,\text{s}$, $t = 30\,\text{s}$, $t = 45\,\text{s}$ et $t = 1\,\text{mn}$.
5. Représenter sur un schéma la trajectoire de M et le vecteur vitesse absolue pour ces 5 dates.
6. Même question pour le vecteur accélération absolue.