Exercices : 16 - Mécanique du point

A. Interaction à force centrale et interaction gravitationnelle

1. Vitesse de libération d'une planète

On considère une planète de rayon $R = 24\,273\,\mathrm{km}$ et de masse volumique $\rho = 1\,660\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ à partir de laquelle on souhaite envoyer un satellite dans l'espace. Déterminer sa vitesse de libération.

Propositions de réponse

a) $115\,175\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ b) $3,9\times10^{-19}\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ c) $23,4\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ d) $4,7\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ e) $14,08\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

2. Système planétaire

On imagine un système planétaire constitué par une étoile et trois planètes, dont les trajectoires sont représentées à la figure 1. On note E_{mA}, E_{mB} et E_{mC} les énergies mécaniques de chacune des planètes. Que peut-on dire de E_{mA}, E_{mB} et E_{mC} ?

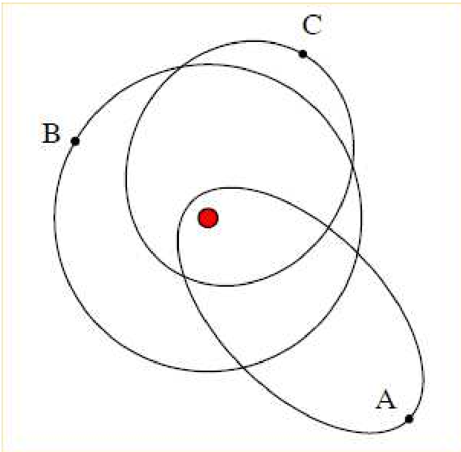


FIGURE 1 – Système planétaire

Proposition de réponses :

a) $E_{mA} > E_{mB} > E_{mC}$ b) $E_{mA} = E_{mB} > E_{mC}$
c) $E_{mA} > E_{mC} > E_{mB}$ d) $E_{mB} > E_{mA} > E_{mC}$

3. Mars

On connaît les grandeurs suivantes : distance Terre-Soleil $1,50\times10^{11}\,\mathrm{m}$, masse de la Terre $5,97\times10^{24}\,\mathrm{kg}$, distance Terre-Mars $7,83\times10^{10}\,\mathrm{m}$, masse de Mars $6,42\times10^{23}\,\mathrm{kg}$, température à la surface du Soleil $5\,870\,\mathrm{K}$. Quelle est la période de rotation de Mars autour du Soleil ?

Propositions de réponse :

a) $2,4\times10^{7}\,\mathrm{s}$ b) $4\,665$ heures c) $3,53$ ans d) $9,9\times10^{5}$ minutes e) 483 jours

4. Satellite en basse altitude

On considère un satellite de masse $m = 500\,\mathrm{kg}$ possédant un mouvement circulaire autour de la Terre. La constante de gravitation universelle est $\mathcal{G} = 6,67\times10^{-11}\,\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}$, la masse de la Terre $M_T = 6\times10^{24}\,\mathrm{kg}$ et le rayon de la Terre $R = 6\,400\,\mathrm{km}$.

Propositions de réponses :

a) Plus le rayon de sa trajectoire est grand, plus sa vitesse est grande.

b) Plus sa masse est élevée, plus il met de temps pour faire le tour de la Terre.

c) S'il tourne d'Est en Ouest, il met plus de temps par rapport aux étoiles pour faire le tour de la Terre.

d) Selon son altitude, le satellite peut mettre 1 heure 25 minutes pour faire le tour de la Terre.

e) Selon son altitude, le satellite peut mettre 1 heure 10 minutes pour faire le tour de la Terre.

5. Lancement d'un satellite

Le changement d'énergie potentielle gravitationnelle pour mettre un satellite en orbite circulaire de rayon R autour de la Terre est :

$$\mathcal{G}mM_T\left(\frac{1}{R_T}-\frac{1}{R}\right)=3,14\times10^6\,\mathrm{J}$$

Durant le lancement, l'énergie disponible est seulement de $3,15\times10^6$ J. Les ingénieurs décident donc de procéder au lancement de façon verticale. Que se passe-t-il ? Sachant que toute l'énergie est disponible pour le satellite mais que ce dernier ne possède pas de moyen de contrôle de sa direction...

Propositions de réponses :

a) Le satellite sera placé en orbite à un rayon plus grand que R.

b) La satellite va échapper au champ de gravitation terrestre.

c) La satellite va dépasser l'orbite de rayon R, mais il va retomber sur la Terre.

d) La satellite va se placer en orbite circulaire de rayon R.

6. Astéroïdes

Dans la ceinture d'astéroïdes principale, Cérès est une planète naine quasi-sphérique de rayon $R = 475\,\mathrm{km}$ dont la masse représente environ le tiers de la masse totale des astéroïdes $M = 3\times10^{21}$ kg. Un astéroïde 100 fois plus léger que Cérès est en orbite basse autour de Cérès. Quelle est sa période de révolution ?

Proposition de réponses :

a) Environ 1/2 heure b) Environ 2 heures c) Environ 22 heures d) Environ 24 heures

7. Traction par un fil central

Sur un plan horizontal, percé d'un trou O, un point matériel M (de masse m) se déplace sans frottements attaché à un fil passant par un trou. On exerce sur l'autre extrémité du fil une traction $T(t)$ telle que $\ell(t) = a - b\,t$.

1. Décrire le mouvement pour une vitesse angulaire initiale ω_0 de $\overrightarrow{OM}$.
2. Calculer, de deux façons, le travail fourni par l'opérateur exerçant la force $T(t)$, entre l'instant initial $t = 0$ et l'instant où $\|\overrightarrow{OM}| = \ell(t)$.

8. Noyau émetteur radioactif α

Un noyau atomique fixe en O, de numéro atomique Z, est disposé à la distance a d'un émetteur E de particules α, toutes émises dans la même direction, faisant l'angle β avec la droite EO, voir la figure 2. La valeur de la vitesse initiale V_0 des particules α est variable. À grande distance du noyau, les particules α ne sont sensibles qu'à la répulsion électrostatique ; à très courte distance, une force attractive supplémentaire, radiale, de module $\dfrac{A}{\rho^5}$, apparaît (ρ désigne la distance de la particule α à O). On appelle m la masse de la particule α, e la charge élémentaire, θ l'angle (Ox, OM) si M désigne la position de la particule α, et on pose $\rho = ar$, $U_0 = V_0/a$, $k = \dfrac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 ma^3}$ et $b = A/ma^6$.

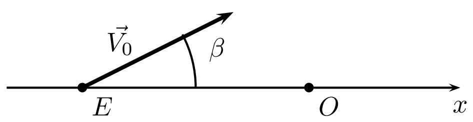


Figure 2 – Émetteur radioactif α

1. Écrire les équations différentielles pour r et θ en fonction de k, b et les conditions initiales en fonction de U_0 et β.
2. Dans quelles unités se mesurent k et b ?
3. Quelle est la nature du mouvement si la particule α ne s'approche jamais beaucoup de O ? Que se passera-t-il si elle s'approche trop de O ?

4. Comment choisir les conditions initiales pour obtenir une trajectoire circulaire ? Cette trajectoire est-elle stable vis-à-vis des conditions initiales ?

9. Trajectoire bornée

Une particule M de masse m est soumise à un champ de force de centre O associé à l'énergie potentielle $U = m\left(\dfrac{a}{r} + \dfrac{b}{r^2}\right)$, a et b étant des constantes non nulles et r la distance au centre attracteur.
Les conditions initiales sont $r = r_0$ et $\vec{v} = \vec{v}_0$. L'angle entre $r = r_0$ et $\vec{v}_0$ est α_0.

1. À quelles conditions portant sur a, b, r_0, $\vec{v}_0$ et α_0 la trajectoire de la particule est-elle circulaire ?
2. À quelles conditions portant sur a, b, r_0, $\vec{v}_0$ et α_0 est-il possible que la trajectoire de la particule reste bornée ?

10. Mouvements d'une comète

La Terre décrit autour du soleil une orbite circulaire de rayon a (appelé unité astronomique) à la vitesse constante $u = 30\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. En 1843, une comète quasi-parabolique est passée très près du soleil, la distance minimale de la comète au soleil (périhélie) étant $d = \epsilon a = 5,53 \times 10^{-3}\ a$. Par la suite, des mesures fines ont amené les astronomes à prédire une distance maximale au soleil (aphélie) égale à $D = \gamma a = 130\ a$.

1. Déterminer et commenter la vitesse maximale de la comète. Déterminer aussi la vitesse minimale de la comète sur son orbite.
2. En quelle année peut-on espérer revoir la comète ?
3. Pour l'étude détaillée du mouvement de la comète, on doit prendre en compte des perturbations dues à la résultante des forces exercées par les autres planètes du système solaire. On montre qu'on les ramène à un supplément (faible) de force attractive, de la forme $f = k \times r^{-4}$, où k est une constante et r la distance de la comète au centre du Soleil. Quel est, qualitativement ou quantitativement, l'effet de cette force sur la trajectoire de la comète ?

11. Le voyage vers Mars

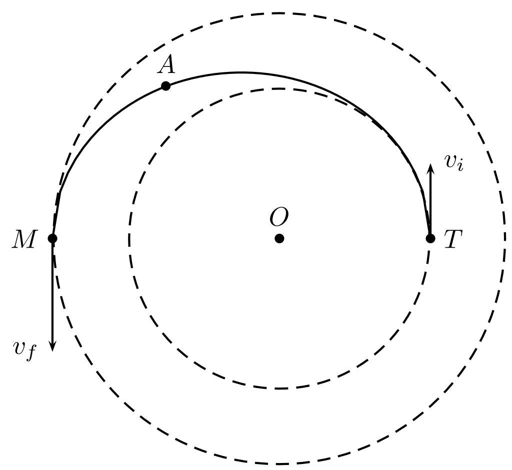


FIGURE 3 – Le voyage vers Mars

Les trajectoires de la Terre T et de Mars M sont circulaires autour du centre fixe O du système solaire. La vitesse de la Terre sur son orbite, de rayon a_0, est $v_0 = 30\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$. La trajectoire de Mars est circulaire de rayon $a_1 = na_0$ où $n = 1,53$. Un engin spatial A doit passer de la trajectoire terrestre (en T) à la trajectoire martienne (en M) par un vol balistique, sous la seule action du champ de gravitation solaire, de sorte que sa trajectoire soit tangente en T à la trajectoire terrestre et tangente en M à la trajectoire martienne : c'est la trajectoire de transfert de Hohmann. Pour cela, on doit accélérer l'engin au voisinage de la Terre de la vitesse v_0 à la vitesse v_i.

1. Quelle est la durée de l'année martienne ?
2. Exprimer v_i en fonction de v_0 et de n.
3. Quelle est la durée du transfert ?
4. Une fois arrivé au voisinage de Mars, faut-il accélérer ou ralentir l'engin A pour qu'il puisse se poser sur Mars ?

12. Oscillations d'une particule chargée

Deux particules ponctuelles de charge identique $Q > 0$ sont placées de part et d'autre de l'axe Ox, à une distance R du point O. Elles sont fixes. Une particule ponctuelle de masse m et de charge $-q$ (avec $q > 0$) est placée en O. Cette dernière subit des oscillations le long de l'axe Oy. On ne considère que les oscillations de faibles amplitudes. Quelle est la pulsation de ces oscillations ?

Proposition de réponses :

a) $\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 mR^2}$ b) $\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 mR^2}$ c) $\left(\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 mR^2}\right)^{1/2}$ d) $\left(\frac{Qq}{2\pi\varepsilon_0 mR^3}\right)^{1/2}$

13. Cataclysmes

On étudie le mouvement de la Terre autour du Soleil de masse $M_s = 2 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$. On considère que la Terre de masse $m = 6 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ effectue un mouvement circulaire de rayon $r_0 = 1,5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$. On note $\mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}}$ la constante de gravitation universelle.

1. Quelle est l'expression de la vitesse v_0, dans le référentiel héliocentrique, de la Terre sur son orbite. Déterminer sa valeur numérique.
2. On note T_0 la période de la Terre autour du Soleil. Établir la loi reliant T_0 et r_0 connue sous le nom de troisième loi de Képler.
3. Établir les expressions des énergies cinétique, potentielle, mécanique de la Terre.
4. À la suite d'un choc frontal avec un gros astéroïde, la vitesse de la Terre passe brutalement de v_0 à $v_0/2$. Quelle est la nouvelle énergie mécanique de la Terre ? On commentera son signe.
5. Décrire la nouvelle trajectoire en évoquant, en particulier, ses points particuliers.
6. Un nouveau choc cataclysmique annule la vitesse de la Terre alors qu'elle se trouvait à l'aphélie de sa trajectoire précédente. Montrer que la Terre va s'écraser sur le Soleil. Estimer la durée de chute vers le Soleil. On donne l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1}{1/u-1}}\mathrm{d}u = \frac{\pi}{2}$.

14. Un modèle d'interaction forte

Ce sujet discute d'un modèle d'interaction forte, une force attractive s'exerçant seulement à courte distance entre nucléons (protons et neutrons). De nombreuses questions pourront être traitées en utilisant le script *Python* associé au fichier *2017-004-InteractionForte*. On étudie en particulier l'interaction d'un neutron projectile de masse m dont la trajectoire rencontre celle d'un noyau fixe, sphérique de rayon r_0. La trajectoire initiale du neutron est rectiligne uniforme de vitesse v_0 et de paramètre d'impact y_0, voir la figure 4.

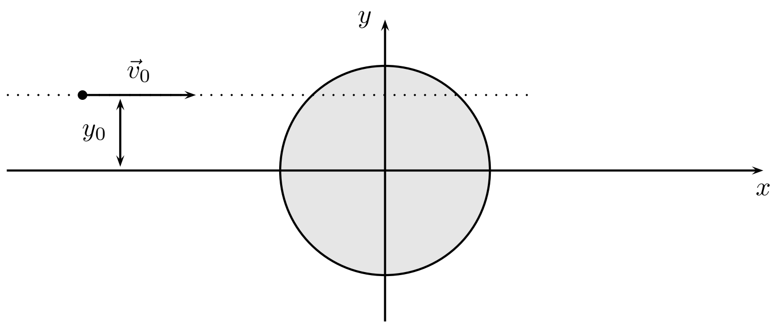


Figure 4 – Neutron abordant un noyau

1. *Analyse de résultats de la simulation*
   (a) Les données numériques du script proposé utilisent pour unités de longueur, d'énergie et de masse respectivement le femtomètre ($1\,\mathrm{fm} = 10^{-15}\,\mathrm{m}$), le mégaélectron volt ($e = 1,6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$) et la masse d'un nucléon ($m_n = 1,67 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$). Quelles sont les unités de durée et de vitesse correspondante ?
   (b) La force exercée par le noyau sur le neutron est centrale, attractive, d'expression (en coordonnées sphériques) $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ où
   $$F(r) = -\frac{U_0}{d}\,\exp\left(-\left(\frac{r-r_0}{d}\right)^2\right)$$
   Tracer et interpréter les courbes donnant $F(r)$ et l'énergie potentielle $U(r)$ associée.

(c) Proposer les interprétations physiques des grandeurs U_0, r_0 et d.

(d) Les neutrons étudiés dans cette simulation sont-ils relativistes ?

2. *Étude classique des trajectoires neutroniques*

(a) On étudie ici, en mécanique classique, les propriétés générales du mouvement d'un neutron soumis à la force $\vec{F}$ ci-dessus. Montrer l'existence de deux constantes du mouvement. Peut-on former un état lié du neutron et du noyau ?

(b) En supposant $r_0 \gg d$, montrer que la trajectoire est formée de la réunion de segments de droite.

(c) Établir l'expression de l'angle de déviation θ, angle entre les trajectoire initiale et finale) en fonction du paramètre y_0 ; tracer la courbe associée et comparer à la simulation.

B. Référentiels galiléens

15. Contact homme - sol

Un homme est au repos debout sur un plan incliné d'angle α. Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui sont exacte(s) et celle(s) qui sont fausse(s).

1. La résultante des actions exercées par l'homme sur le sol est égale à son poids.
2. La résultante des actions exercées par l'homme sur le sol dépend de α.
3. La résultante des actions exercées par l'homme sur le sol dépend de la surface de ses chaussures.

Un homme marche sur un plan horizontal. Parmi les affirmations suivantes, indiquer celle(s) qui sont exacte(s) et celle(s) qui sont fausse(s).

1. La résultante des actions exercées par l'homme sur le sol est égale à son poids.
2. La composante verticale des actions exercées par l'homme sur le sol est égale à son poids.
3. La composante verticale des actions exercées par l'homme sur le sol varie au cours du temps et sa valeur moyenne est égale à son poids.

16. Deux solides liés

On considère un système constitué de deux masses m et $2m$ reliées par un fil sans masse inextensible. Elles sont posées sur un plan incliné faisant un angle α avec l'horizontale. Le coefficient de frottement entre m et le plan est f. Celui entre $2m$ et le plan est $2f$.

1. Déterminer l'accélération de l'ensemble dans l'hypothèse où le fil reste tendu au cours du mouvement ultérieur.
2. Donner l'expression de la tension du fil toujours dans l'hypothèse où celui-ci reste tendu.
3. Caractériser le mouvement de l'ensemble.

17. Entraînement par frottement

Une barre de masse m_1 est placée sur une planche de masse m_2, et l'ensemble repose sans frottement sur un plan horizontal, voir la figure 5. Le facteur de frottement entre la barre et la planche est μ. On exerce sur la planche une force horizontale F dont l'intensité croît linéairement avec le temps : $F = \alpha t$, α étant une constante.

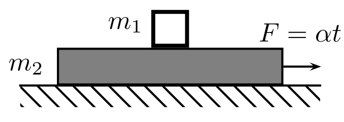


FIGURE 5 – Entraînement par frottement

1. Écrire les équations différentielles du mouvement de la barre et de la planche.
2. Quelles sont les accélérations de la barre et de la planche dans la phase de non-glissement. Déterminer l'instant t_0 à partir duquel la planche glisse sous la barre.
3. Quelles sont les accélérations de la barre et de la planche dans la phase de glissement ?

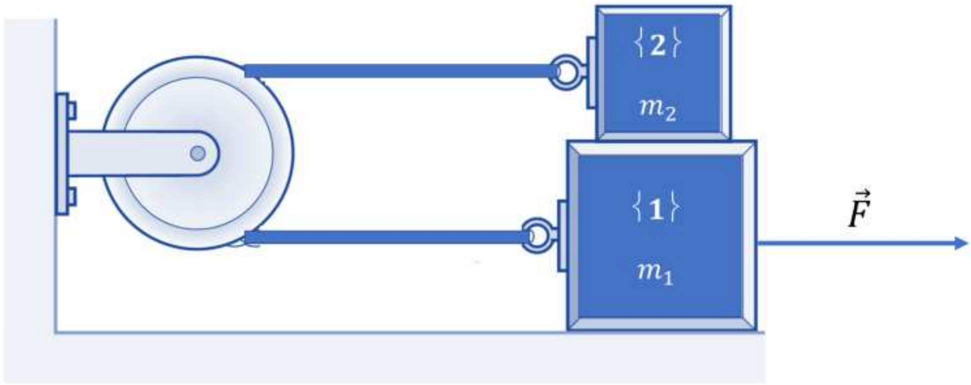


FIGURE 6 – Les deux solides et le système de poulie

18. Frottements... Frottements

On considère deux blocs posés l'un sur l'autre de masses respectives m_1 et m_2. Ils sont accrochés à une corde supposée inextensible et sans masse et reliés par un système de poulie, supposée idéale. Voir le schéma de la figure 6. On note $\mu = \mu_s \simeq \mu_d$ le coefficient de frottement solide (statique et dynamique). On considère que μ est identique pour le contact du solide 1 avec le support et dans le cas du contact entre le solide 1 et le solide 2. On exerce une force $\vec{F}$ sur le solide 1 qui se met en mouvement par rapport au bâti.

1. Quelle est l'expression de la norme de l'accélération notée a du solide 1 ?

Proposition de réponses :

a) $a = \frac{F-2\mu m_2 g}{m_1} - \mu g$ b) $a = \frac{F}{m_1+m_2} - 2\mu g$ c) $a = \frac{F}{m_1+m_2} - \mu g$ d) $a = \frac{F-2\mu m_2 g}{m_1+m_2} - \mu g$

19. Pendule en mouvement circulaire

Un point matériel M de masse m est accroché à une ficelle de longueur L, dont on néglige l'élasticité (qui reste toujours tendue). M se déplace suivant un cercle de rayon R, à la vitesse angulaire constante ω. La ficelle fait un angle $\theta/2$ constant par rapport à la verticale, voir la figure 7. Quelle est l'expression de la norme de la tension T de la corde ?

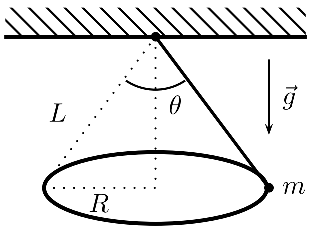


FIGURE 7 – Pendule en mouvement circulaire

Propositions de réponses :

a) $mg\dfrac{R}{L}$ b) $mg(\cos\dfrac{\theta}{2} + \omega^2 R)$ c) $m(\omega^2 R^2 + g^2)^{1/2}$ d) $m(\omega^4 R^2 + g^2)^{1/2}$

20. Notion d'adhérence

On considère un parallélépipède de longueur $2b$ et de hauteur $2a$. Sa largeur n'intervient pas dans le problème. Ce bloc repose par l'intermédiaire de deux patins sur un plan incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontal. Les deux patins sont assimilés à des contacts ponctuels situés aux deux extrémités du solide en A et B, voir le schéma de la figure 8. On note $q = a/b$ le rapport des deux longueurs de l'objet, f le coefficient de frottement entre le plan incliné et le solide. Les deux forces de contact sont notées $\vec{R}_A = T_A\vec{e}_x + N_A\vec{e}_z$ et $\vec{R}_B = T_B\vec{e}_x + N_B\vec{e}_z$.

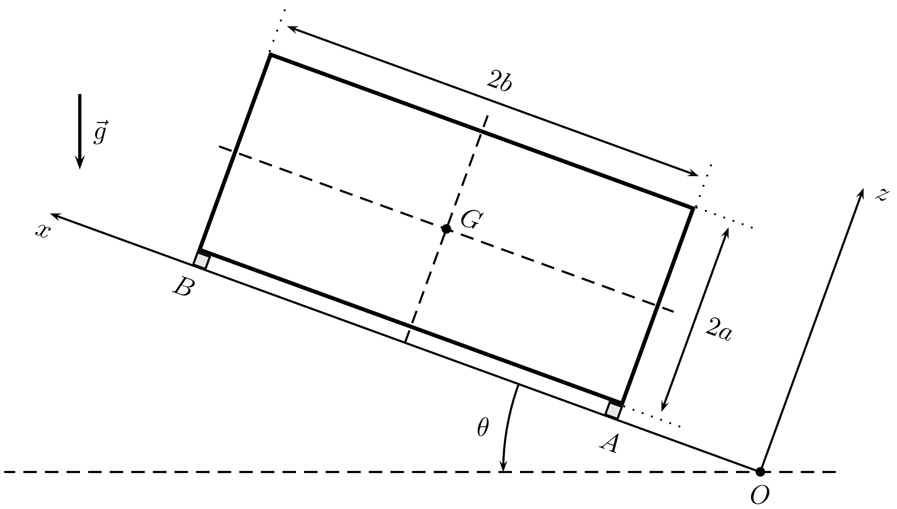


FIGURE 8 – Solide immobile sur un plan incliné

1. Le solide est supposé immobile sur le plan incliné. Exprimer N_A, N_B et la somme $T_A + T_B$ en fonction de m, g, θ et q. Constater que le système n'est pas entièrement déterminé.
2. Établir la condition que doit satisfaire $\tan\theta$ pour que l'on puisse avoir un solide immobile sur le plan incliné. On suppose, pour la suite, que $f < 1/q$. Que signifie cette condition ?
3. On note $Z_A = T_A/N_A$ et $Z_B = T_B/N_B$ les adhérences des contacts en A et B. Établir que les adhérences vérifient l'équation $Z_A\alpha(q,\theta) + Z_B\beta(q,\theta) = 2\tan\theta$. Préciser les signes de $\alpha(q,\theta)$ et de $\beta(q,\theta)$.
4. Représenter dans le plan (O, Z_A, Z_B), le lieu $\mathcal{D}$ décrit par l'équation $Z_A\alpha(q,\theta) + Z_B\beta(q,\theta) = 2\tan\theta$. On effectuera ce tracé pour $\tan\theta = 1/2$ et $q = 1/4$.
5. Sur le tracé précédent, caractériser le domaine $\mathcal{A}$ délimitant l'ensemble des états d'adhérence possibles. Préciser la portion de $\mathcal{D}$ correspondante. Pour effectuer le tracé, on choisira $f = 1$. Préciser de quelle façon se traduit, sur ce graphique, l'indétermination évoquée au départ.
6. Sur le graphique, illustrer la situation limite du glissement. Préciser la relation fixant la valeur de $\tan\theta$.

21. Suspension

Une boule de poids $100\,\mathrm{N}$ est suspendue par l'intermédiaire de deux cordes A et B comme cela est visible sur le schéma de la figure 9. Que peut-on dire sur la tension de chaque corde ?

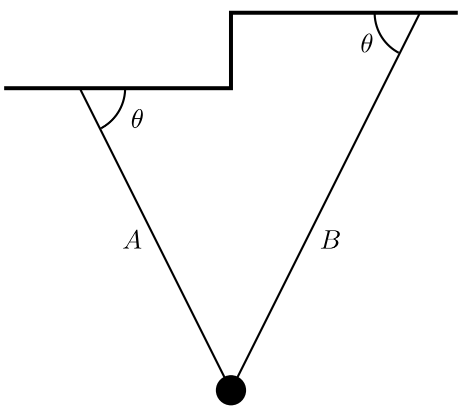


FIGURE 9 – Boule suspendue

Proposition de réponses :

a) La tension des deux cordes est identique et vaut 50 N.

b) La tension des deux cordes est identique et vaut moins de 50 N.

c) La tension des deux cordes est identique et vaut plus de 50 N.

d) La tension de la corde A est plus élevée que la tension de la corde B.

e) La tension de la corde A est moins élevée que la tension de la corde B.

22. Système de poulies

On considère le système mécanique représenté à la figure 10. Les poulies sont supposées parfaites. On exerce une force $\vec{F}$ sur la corde supposée idéale. Quelle doit être la valeur de la norme F de cette force pour que le système soit à l'équilibre mécanique ?

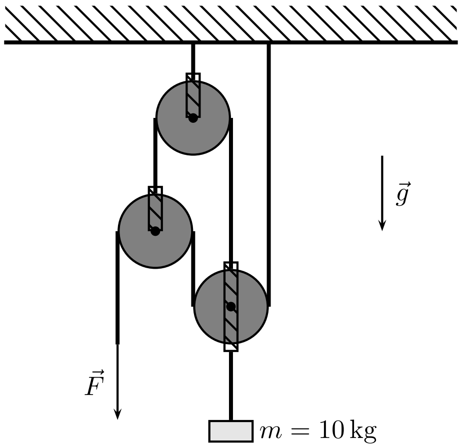


Figure 10 – Système de poulies

Proposition de réponses :

a) $F = 19,6\,\mathrm{N}$ b) $F = 24,5\,\mathrm{N}$ c) $F = 32,7\,\mathrm{N}$ d) $F = 98,1\,\mathrm{N}$

23. Voiture en virage

Une voiture se déplace sur une piste qui présente un virage de rayon de courbure R. Dans ce virage, la vitesse et l'accélération de la voiture sont fournies sur le schéma de la figure 11. Quel est le rayon de courbure de la route au niveau du virage ?

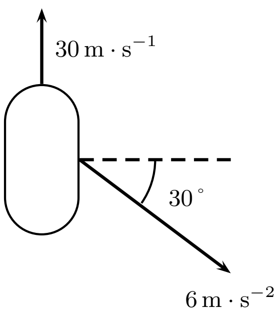


Figure 11 – Voiture dans un virage

Proposition de réponses :

a) $5,8\,\mathrm{m}$ b) $10\,\mathrm{m}$ c) $170\,\mathrm{m}$ d) $300\,\mathrm{m}$

24. Construction

Un enfant construit une tour faite de blocs en plastique qui s'accrochent les uns aux autres. Sa tour, un peu particulière, est constituée de 4 blocs vers la gauche, les autres étant systématiquement décalés vers la droite, voir la figure 12. Quel est le nombre maximum de blocs (en incluant les 4 blocs vers la gauche) que l'enfant peut positionner pour que sa tour ne s'effondre pas sur le sol ?

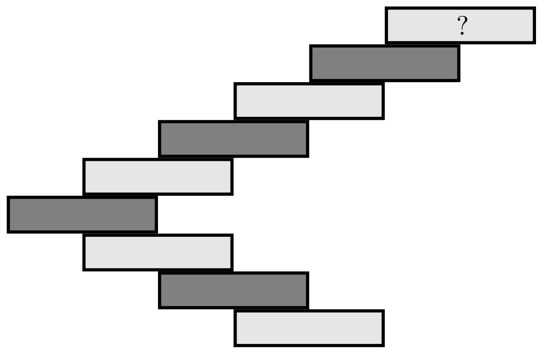


FIGURE 12 – Construction d'une tour

Proposition de réponses :

a) 8 b) 9 c) 13 d) 16

25. Corde suspendue

Une corde de masse m est suspendue à deux crochets fixés à la même hauteur, voir le schéma de la figure 13. À ces points d'attache, elle forme un angle θ avec l'horizontale. Quelle est la tension de la corde à son point le plus bas ?

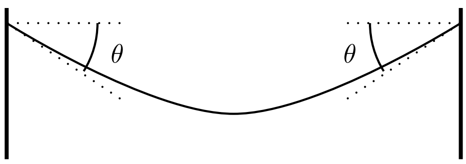


FIGURE 13 – Corde suspendue

Propositions de réponses :

a) 0 b) $\dfrac{mg}{2}$ c) $\dfrac{mg}{2\tan\theta}$ d) $mg\cos\theta$ e) $\dfrac{mg}{\sin\theta}$

26. Poussée sur deux blocs

On considère deux blocs de masses respectives $2m$ noté 1 et m noté 2, qui sont en contact. Ils sont placés sur une surface plane horizontale. On considère que les forces de frottement entre ces blocs et la surface sont négligeables. On exerce une force extérieure $\vec{F}$ (de norme F) sur ces blocs, suivant deux configurations présentées sur la figure 14.

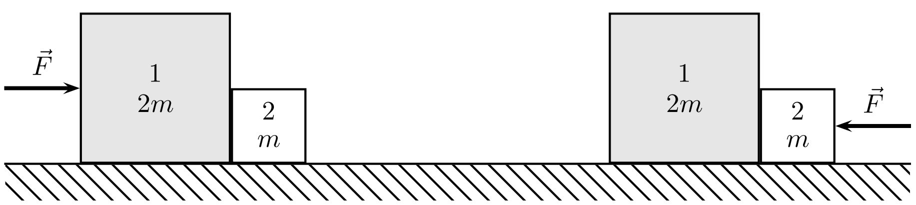


FIGURE 14 – Les deux blocs

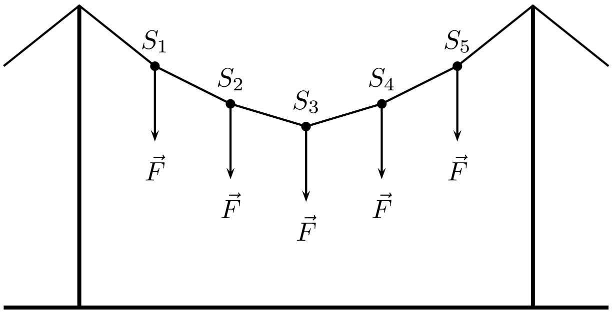
1. Quelle est la norme (notée F_{12}) de la force exercée par le bloc 1 sur le bloc 2 dans chacune des deux configurations proposées ?

Proposition de réponse :

a) $F_{12} = \frac{F}{3}$ (à gauche) et $F_{12} = \frac{F}{3}$ (à droite) b) $F_{12} = \frac{F}{3}$ (à gauche) et $F_{12} = \frac{2F}{3}$ (à droite)
c) $F_{12} = \frac{2F}{3}$ (à gauche) et $F_{12} = \frac{F}{3}$ (à droite) d) $F_{12} = \frac{2F}{3}$ (à gauche) et $F_{12} = \frac{2F}{3}$ (à droite)

27. Câble porteur d'un ligne TGV

On considère le câble porteur d'une ligne à grande vitesse. Ce câble tient le câble électrique sur laquelle glisse la caténaire qui permet d'alimenter le train. Le câble électrique est suspendu par N suspentes accrochée à intervalle régulier répartie entre deux poteaux de soutien. On suppose N impair, voir la figure 15, où $N = 5$. Du fait, en particulier du poids du fil électrique, le câble porteur subit une force $\vec{F}$ à chaque point d'accrochage des suspentes. On suppose que les forces $\vec{F}$ ne sont dues qu'au poids du fil électrique en négligeant les conséquences du contact entre le fil électrique et la caténaire lorsque le TGV passe.



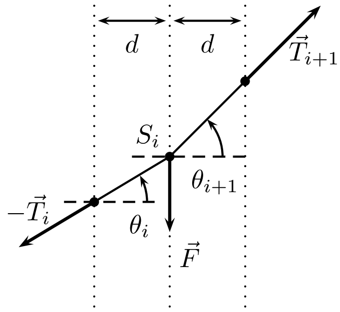


Figure 15 – Câble d'une porteur d'une ligne LGV

1. On note d la distance entre deux suspentes, on a donc $L = (N + 1)d$ où L est la distance entre deux poteaux de soutien. Déterminer F sachant que le fil électrique possède un diamètre $D = 3\,\text{cm}$, une masse volumique $\rho = 9 \times 10^3\,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$ et une longueur $L = 50\,\text{m}$. On indique qu'il y a $N = 9$ suspentes. On prendra $g = 10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.
2. On considère un nœud S_i où est attachée la suspente i, voir le schéma de la figure 15. Établir les deux équations algébriques traduisant l'équilibre du nœud S_i.
3. Nous nous plaçons désormais dans le cas tel que $\forall i$, $|\theta_i| \ll 1$. Exprimer l'angle θ_i en fonction de θ_1, i et de $f = F/T$. La grandeur $T > 0$ désigne la tension à laquelle le câble est soumis.
4. Déterminer l'angle θ_1, puis exprimer θ_i en fonction de f, du nombre N et du paramètre de situation i.
5. Exprimer la déflexion maximale $\Delta \geq 0$ du câble porteur en fonction de d, f et de N. On n'envisage que le cas où N est impair.
6. Calculer la valeur de la déflexion maximale Δ pour $T = 10^4\,\text{N}$.

28. Calcul d'un travail

Un corps de masse $m = 50\,\text{kg}$ est tiré à vitesse constante de A jusqu'en B sur un plan incliné, voir le schéma de la figure 16. Le coefficient de frottement dynamique vaut $0,40$. On prendra $g = 10\,\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$. Quel est le travail effectué pendant ce déplacement ?

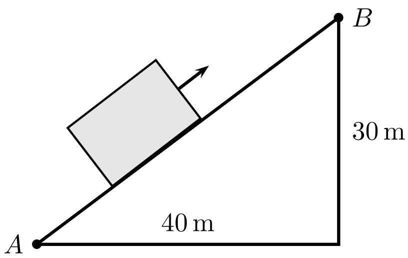


Figure 16 – Travail sur un plan incliné

Propositions de réponses :

a) $10\,\mathrm{kJ}$ b) $15\,\mathrm{kJ}$ c) $23\,\mathrm{kJ}$ d) $25\,\mathrm{kJ}$ e) $28\,\mathrm{kJ}$

29. Jouet

On s'intéresse à une voiture miniature de masse $m = 4\,\mathrm{kg}$ qui se déplace selon une direction donnée par l'axe Ox horizontal. Le graphique de la figure 17 représente la force F_x horizontale à laquelle est soumis le jouet en fonction de sa position sur l'axe Ox. Au point $x = 0$, le vecteur vitesse de la voiture est de valeur algébrique $-3,0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$. Quelle est la vitesse maximum approximative de ce jouet ?

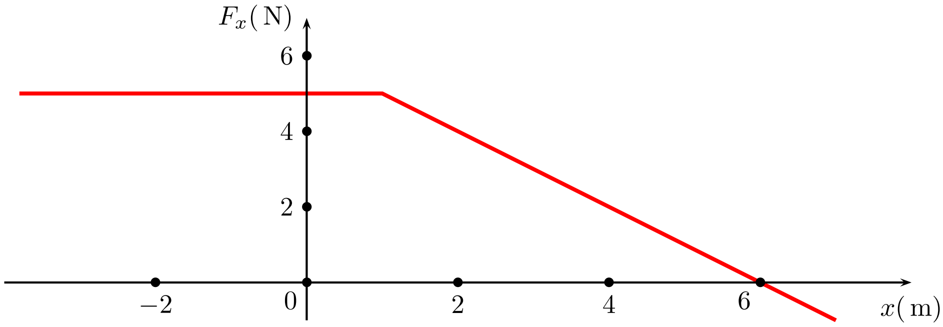


FIGURE 17 – Force exercée sur le jouet en fonction de sa position

Propositions de réponses :

a) $1,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ b) $2,7\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ c) $4,0\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ d) $4,2\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$

30. Petite bille au sommet d'une sphère

Une petite bille pleine homogène, de masse m et de rayon r négligeable est disposée au sommet d'une sphère fixe de rayon R. Une légère impulsion donne à la bille une vitesse initiale v_0, très faible, de sorte qu'elle commence à glisser (cf. figure 18). Sur cette figure la taille de la bille est très fortement exagérée. On considérera que la bille est un point matériel qui ne fait que glisser sur la sphère, le frottement de glissement entre la bille et la sphère possède le coefficient f.

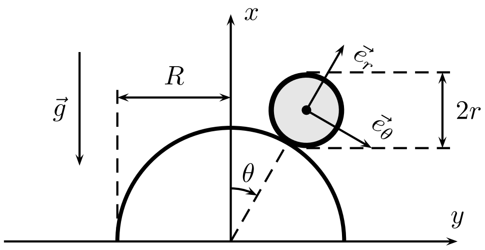


FIGURE 18 – Bille au sommet d'une sphère

1. Montrer que l'angle θ vérifie une équation différentielle non linéaire du second ordre.
2. On suppose dorénavant que le glissement entre la petite bille et la sphère s'effectue sans frottement. Quelle est alors l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ ? En déduire une expression de $\dot{\theta}^2$ en fonction de θ et des constantes du problème.
3. La bille peut-elle décoller de la surface de la sphère ?

31. Entraînement d'un carton par un tapis roulant

À l'instant $t = 0$, on pose un carton de masse m sur un tapis roulant qui défile à la vitesse U constante sur un plan incliné d'un angle α pour le monter à l'étage d'un entrepôt. Le coefficient de frottement entre le tapis et le cylindre est $f > \tan\alpha$.

1. Paramètrer le mouvement du carton et exprimer la vitesse de glissement. Justifier qu'il y a glissement au moins au départ et préciser le sens du glissement.
2. Déterminer le mouvement tant qu'il y a glissement. En déduire la date t_1 où le glissement cesse.
3. Quel est le mouvement ultérieur du carton ?

32. Oscillateur de Timochenko

Deux cylindres parallèles, de même rayon R, dont les axes fixes et horizontaux sont disposés à la distance $l > 2R$ l'un de l'autre dans un même plan horizontal, sont animés d'un mouvement de rotation uniforme à la même vitesse angulaire ω en sens inverse l'un de l'autre (cf. figure 19).
Une planche homogène, de masse m, de faible épaisseur, de grande longueur, glisse sur les deux cylindres avec le même coefficient de frottement f. On appelle x la position du centre d'inertie de la planche repérée par rapport à l'origine O du repère.
On désigne par $g = 9,8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ l'accélération de la pesanteur. On donne aussi $f = 0,5$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $l = 5\,\mathrm{m}$, $R\omega = 1\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.

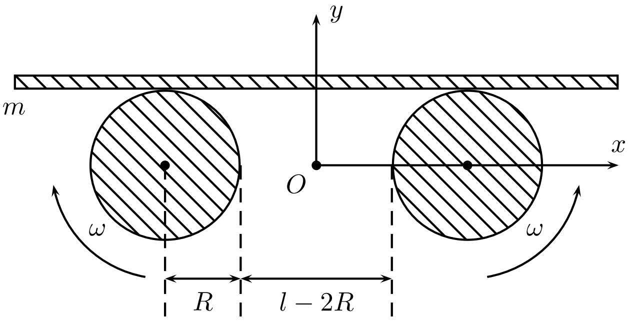


FIGURE 19 – Oscillateur de Timochenko

1. Exprimer les réactions normales et tangentielles exercées sur la planche aux deux points de contact en fonction de x, g, m, l et f.
2. La planche est abandonnée sans vitesse initiale.
   (a) Établir l'équation différentielle du mouvement de la planche.
   (b) Quelle est l'équation horaire du mouvement de la planche.
   (c) Quelle est la période des oscillations ?
   (d) Qui fournit l'énergie nécessaire au mouvement de la planche ?

33. Identification d'un système

On considère le dispositif mécanique horizontal représenté à la figure 20. Il est constitué de deux masses identiques attachées entre elles et avec deux parois par des ressorts. Le ressort central est différent des deux autres (raideur k' au lieu de k). Il existe des frottements de type fluide de nature à amortir les oscillations des masses relativement faibles (force $-\lambda\vec{v}$ de même coefficient λ sur chaque masse). Un dispositif, non représenté, permet d'exercer une force sinusoïdale (fréquence f, amplitude F_1) supplémentaire sur la masse de gauche. On relève dans le même temps l'amplitude $A_1(f)$ des oscillations forcées de cette masse (voir les graphiques de la figure 20 pour les représentations linéaire et logarithmique).

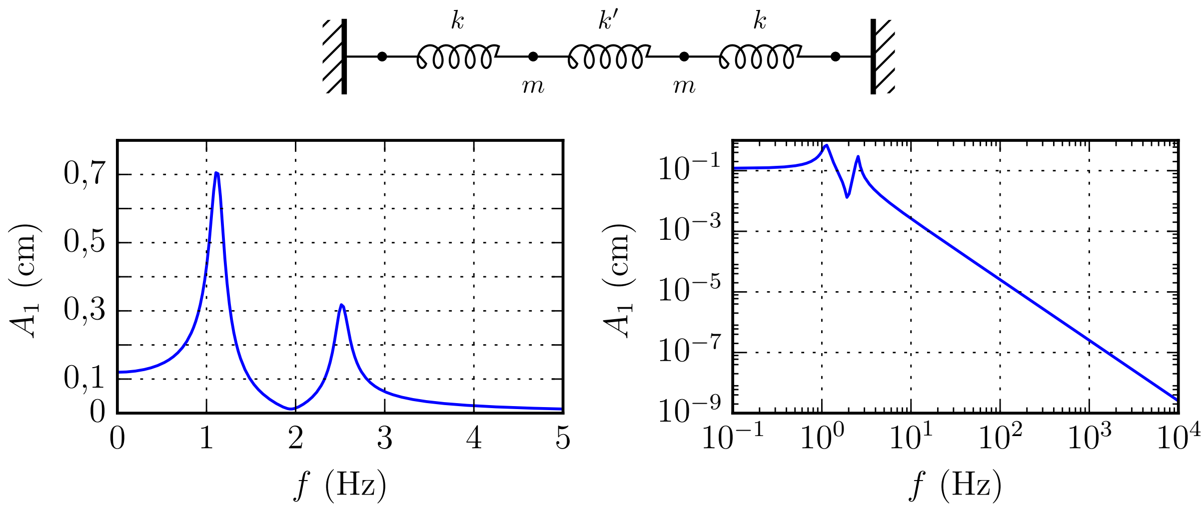


FIGURE 20 – Système des 3 ressorts couplés - Courbes de réponse en amplitude

1. Commenter les courbes $A_1(f)$ présentées. Donner un exemple d'application pratique exploitant la zone entre les deux pics.
2. Estimer les valeurs de k/m, k'/m, F_1/m et λ/m.
3. Expliquer pourquoi la masse m n'est pas estimable avec ces tracés.

34. Rebonds d'une balle

Une balle est lancée sur le sol sur lequel elle rebondit indéfiniment. Du fait des frottements et de la déformation de la balle, sa vitesse diminue après chaque rebond d'un facteur $\eta_x < 1$ en ce qui concerne la vitesse horizontale et η_y en ce qui concerne la vitesse verticale de la balle juste après le choc. Ainsi, la vitesse verticale de la balle juste après le $(n+1)^{\text{ème}}$ rebond est liée à celle juste après le $n^{\text{ème}}$ par $v_{y,n+1} = \eta_y\, v_{y,n}$ (idem selon l'axe Ox). Dans sa succession de rebonds, la balle franchit une distance totale L^*, pendant une durée t^* (ces grandeurs sont mesurées entre le premier rebond, et le point où le rebond devient imperceptible, le nombre total de rebonds est pour autant infini. Les rebonds sont représentés sur la figure 21.

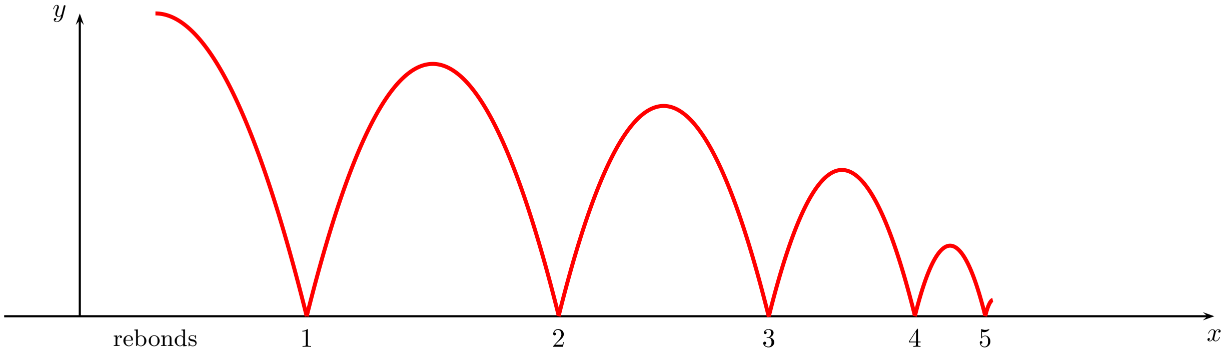


FIGURE 21 – Les rebonds d'une balle sur le sol

1. Exprimer L^* et t^* en fonction des données et de v_{1x} et v_{1y}.
2. En déduire l'angle α que fait la trajectoire de la balle avec l'horizontale, après le premier rebond, en fonction de η_x, η_y et des constantes physiques nécessaires.
3. Effectuer l'application numérique avec $\eta_x = \eta_y = 0,9$, $L^* = 1\,\text{m}$ et $t^* = 4\,\text{s}$.

35. Pantographe d'un train

On modélise le pantographe d'un train par un système masse-ressort-amortisseur. Ce pantographe est destiné à maintenir le contact électrique entre la ligne électrique et le train. La ligne électrique présente une altitude qui est supposée évoluer sinusoïdalement selon la loi $z(x) = a \sin Kx$, voir le schéma de la figure 22. Le pantographe est assimilé au point A de masse M, l'abscisse de A est z commune avec la position du fil électrique lorsque le contact est établi. La raideur du ressort est k, on posera $\omega^2 = K/M$. L'amortissement est de type fluide modélisé par une force $-c\dot{z}\vec{e}_z$. On suppose que le train évolue à vitesse constante V en ligne droite, on posera $\Omega = KV$. Lorsque le contact électrique est établi avec la ligne, le pantographe subit de la part de celle-ci une force $\vec{R} = R\vec{e}_z$ avec $R > 0$. On notera que sur le schéma, l'axe Oz est orienté vers le bas. On note $z_0 = -h$, la position d'équilibre du pantographe lorsqu'il n'est soumis qu'à la pesanteur.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par la variable z position du point A lorsqu'il y a contact.
2. On néglige le terme d'amortissement ($c = 0$). Exprimer la composante $R(t)$ de la force de contact du fil électrique sur le pantographe lorsque le point A suit la déformée $z(x)$ du fil électrique.
3. Établir la condition que doit vérifier le rapport $\xi = \Omega^2/\omega^2$ garantissant que le contact reste maintenu. On fera apparaître un rapport critique ξ_c, fonction de h/a. Analyser ce résultat.
4. Lorsque l'on suppose $c \neq 0$, la condition de non-perte de contact est $(1-\xi)^2 + \varepsilon\xi^2 \leq \dfrac{h^2}{a^2}$ où $\varepsilon = \dfrac{c^2}{M^2\omega^2}$. Commenter ce résultat.

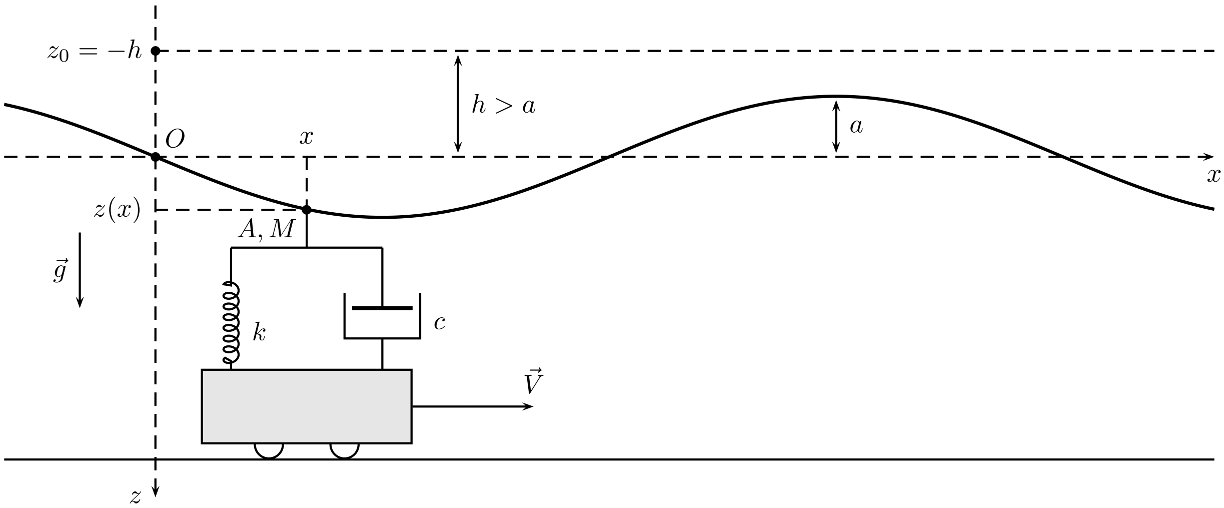


FIGURE 22 – Pantographe d'un train et ligne électrique

36. Évolution de la vitesse d'un mobile

On considère un objet de masse $m = 5\,\mathrm{kg}$ subissant une seule force, variant en fonction du temps selon le graphique présenté à la figure 23. Cette force a le même sens et la même direction que la vitesse initiale de l'objet, égale à $1,0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Quelle est la vitesse de l'objet à la date $t = 7\,\mathrm{s}$?

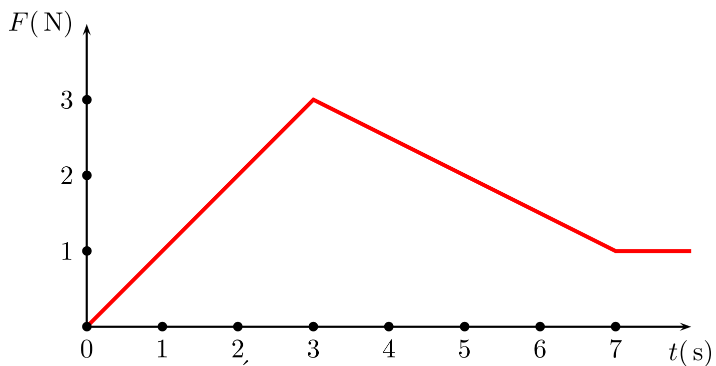


FIGURE 23 – Évolution de la force au cours du temps

Proposition de réponses :

a) $2,5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ b) $12\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ c) $15\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ d) $3,5\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

37. Tube lanceur de billes

On considère un tube creux, formant un demi-cercle de rayon R, qui correspond au schéma de la figure 24. Une bille est lâchée depuis le haut du tube. Les frottements sont négligés. Le bas du tube est situé à une altitude H par rapport au sol, où retombe finalement la bille. On note D la distance parcourue par la bille selon un axe horizontal.

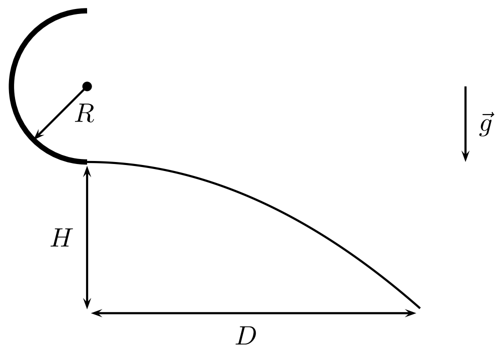


FIGURE 24 – Tube lanceur de billes

Quel graphique de la figure 25 représentant RH en fonction de D^2 est-il correct ?

Propositions de réponses :

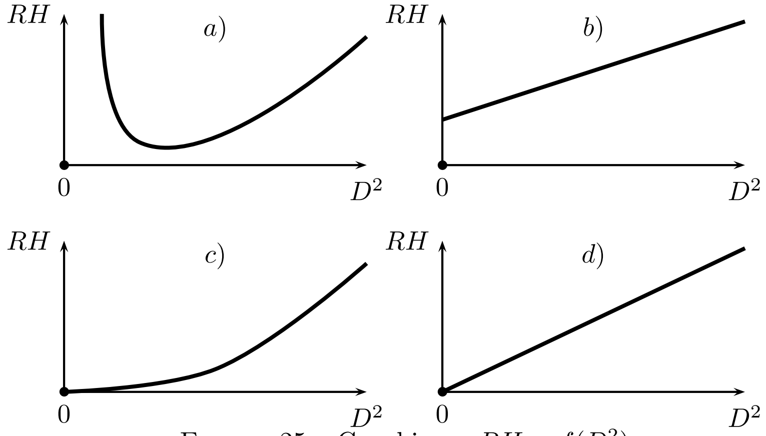


FIGURE 25 – Graphiques $RH = f(D^2)$

38. Guimbarde

Une guimbarde est un instrument de musique constitué d'une lame de métal que le musicien fait vibrer devant sa bouche ouverte. La figure 26 montre l'enregistrement du son produit par la guimbarde, de fréquence 200 Hz. Quel est approximativement le facteur de qualité du système ?

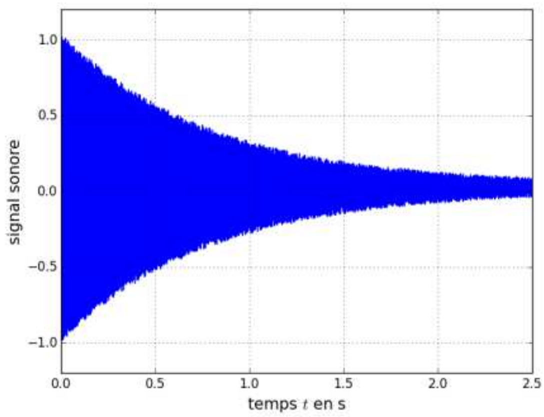


FIGURE 26 – Son produit par la guimbarde

Proposition de réponses :

a) 125 b) 1 000 c) 10 d) 500

39. Oscillateur sur profil cylindrique

Un élastique est assimilé à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0. Il est fixé à une extrémité à un point fixe O et à l'autre extrémité à un point matériel M de masse m. Le point M circule sans frottement sur un quart de cercle de centre C, de rayon a, disposé dans un plan vertical. C et O sont sur la même horizontale, voir la figure 27. Sur une partie OA de sa longueur, l'élastique est disposé sur le plan horizontal passant par O et C. Sur l'autre partie AM, il est aussi rectiligne. On suppose que $OA = l_0$ et on appelle θ l'angle entre CA et CM.

1. Établir une intégrale première du mouvement.
2. Déterminer la valeur de l'angle θ à l'équilibre.
3. Discuter de la stabilité de cet équilibre et déterminer la fréquence des petites oscillations de M autour de l'équilibre stable.

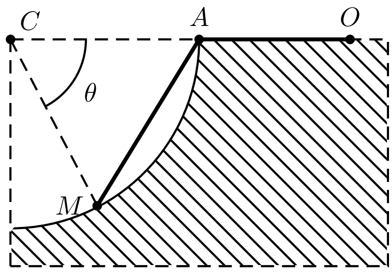


FIGURE 27 – Oscillateur sur profil cylindrique

40. Mouvement d'un point dans un cône

Soit un cône d'axe vertical Oz, de demi-angle au sommet α. Un point matériel M de masse m repose sans frottement sur la surface interne du cône. La position du point M est repérée par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe (Oz). Les conditions initiales sont quelconques mais connues. Si besoin est, on appellera $\mathcal{E}_0$ l'énergie initiale, v_0 le module de la vitesse initiale et z_0 la valeur initiale de la cote du point. Voir le schéma de la figure 28.

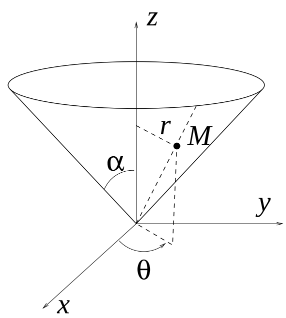


FIGURE 28 – Point en mouvement dans un cône

1. Écrire une intégrale première du mouvement en considérant le moment cinétique.
2. Déterminer l'équation du mouvement sous forme d'intégrale première du mouvement en utilisant l'énergie mécanique. On mettra cette équation sous la forme :

$$(1 + \tan^2 \alpha) \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2 + f(z) = \frac{2\,\mathcal{E}_0}{m}$$

3. Montrer que le mouvement du point a lieu entre deux plans de cote $z = z_m$ et $z = z_M \geq z_m$ suivant les valeurs de l'énergie initiale.
4. Déterminer la valeur de $\mathcal{E}_0$ pour laquelle le mouvement est circulaire. Quel est le rayon du cercle en fonction de v_0, g et α ? Retrouver ce résultat avec la relation fondamentale de la dynamique.

41. Voiture ralentie par l'air

Un véhicule, assimilé à un point matériel de masse $m = 1\,100\,\mathrm{kg}$, atteint une vitesse maximale $v_m = 160\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$, selon une trajectoire rectiligne selon l'axe Ox. Il est propulsé par un moteur de puissance $P = 92\,\mathrm{kW}$. Les frottements sont assimilés à une force de module $f_a = mh_x v^2$.

1. Exprimer h_x en fonction de P, m et v_m.
2. Établir la relation :

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = P\left[1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^3\right]$$

3. En déduire une relation entre v et x.
4. Déterminer la position x_1 telle que $v \simeq v_m$ à 1% près.
5. À l'instant $t' = 0$, on coupe le moteur, trouver la relation $v = f(t')$.
6. En déduire que la distance parcourue est :

$$x = \frac{1}{h_x} \ln\left(1 + h_x v_m t'\right)$$

42. Un sablier sur une balance

On considère un sablier comprenant une structure en verre de masse m_a et contenant une masse m de sable. Ce sablier est posé sur une balance modélisée par un plateau de masse m_p et d'un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Voir le schéma de la figure 29. On note g l'accélération de la pesanteur ; des vis permettent de placer le plateau de la balance de façon parfaitement horizontale.

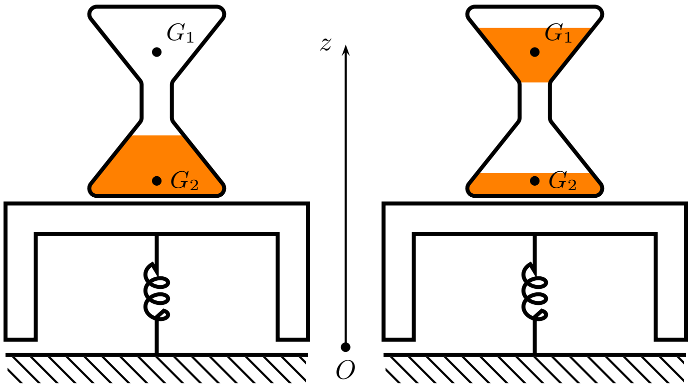


FIGURE 29 – Sablier sur une balance

1. Déterminer l'expression de la longueur à l'équilibre du ressort ℓ_{eq} lorsqu'aucun objet n'est posé sur le plateau de la balance.
2. On pose le sablier avec le sable situé dans la partie basse. L'afficheur numérique de la balance donne l'indication I proportionnelle à la longueur $\ell_{eq} - \ell_m$ où ℓ_m représente la longueur du ressort à l'équilibre lorsqu'un objet est posé sur le plateau de la balance. On a $I = A(\ell_{eq} - \ell_m)$. Montrer que l'afficheur numérique donne une indication I proportionnelle à la masse de l'objet posé sur le plateau et qu'il est donc possible de lui faire afficher directement la masse de l'objet. En quoi consiste le tarage ?
3. On retourne le sablier, le sable se situe donc dans la partie supérieur et se met à couler. Pour simplifier, on considère que le centre d'inertie de la masse de sable situé dans la partie supérieure est toujours à la position G_1 et que le centre d'inertie de la masse de sable situé dans la partie inférieure du sablier est toujours situé en G_2. On donne $G_1G_2 = h$. On note la masse sable arrivé dans la partie inférieure $m_2 = m\alpha(t)$. Donner l'expression de l'indication I fournie par la balance entre autres en fonction de α.
4. Commenter le résultat obtenu à la question précédente.

43. Oscillations d'une branche

Le bois est un matériau à la fois résistant et souple : on peut le déformer sans le casser, il est élastique. On modélise une branche rectiligne horizontale, que l'on suppose encastrée dans le tronc d'un arbre, comme une poutre de section rectangulaire de largeur b, de hauteur h et de longueur L. La masse volumique du bois est $\rho = 800\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. La section de la poutre a une aire $S = bh$. E est le module d'YOUNG, il se retrouve dans l'expression de la force de rappel qui ramène la branche dans sa position d'équilibre, voir le schéma de la figure 30. Pour le bois, on prendra $E = 10\,\mathrm{GPa}$. L'expression de la force est :

$$\vec{F} = -K y_f \vec{e}_y \quad \text{avec} \quad K = \frac{Ebh^3}{4L^3}$$

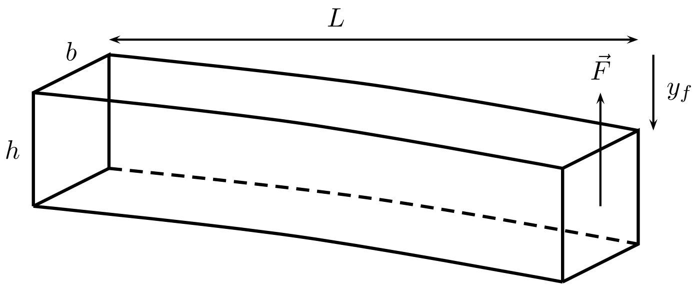


FIGURE 30 – Branche oscillante

Le poids de la branche ne sera pas pris en compte, on suppose que la branche ne plie pas à l'équilibre sous l'effet de son poids, on raisonne sur une poutre horizontale à l'équilibre.

1. La constante de raideur K du ressort équivalent à la branche est défini du point de vue de son déplacement vertical à l'extrémité de la branche. Calculer sa valeur pour $L = 2\,\mathrm{m}$, $b = h = 3\,\mathrm{cm}$. Quelle est l'énergie potentielle élastique associée ?
2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit y_f. En déduire l'expression et la valeur de la fréquence propre f_0 des oscillations de la branche.
3. On tient maintenant compte d'effets dissipatifs dans le bois. Ils sont modélisés par une force $\vec{f} = -\lambda \dfrac{\mathrm{d}y_f}{dt}\vec{e}_y$. Présenter l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y_f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, y_f = 0$$

4. On s'intéresse au régime critique des oscillations amorties. Qu'est-ce qui distingue le régime critique des deux autres régimes d'amortissement ? Retrouver la valeur du facteur de qualité Q en régime critique. Écrire la solution analytique, en faisant intervenir deux constantes d'intégration. Qu'est-ce qui détermine ces constantes ?
5. Les rafales de vent modélisées par une représentation sinusoïdale mettent la branche en oscillation. L'équation différentielle donnant y_f devient :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_f}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y_f}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\, y_f = A\cos\omega t$$

Donner l'unité de A. Donner l'expression de l'amplitude de la solution en régime forcé en fonction de A, ω, ω_0 et Q. Peut-on voir un phénomène de résonance apparaître ? Le facteur de qualité a la valeur déterminée pour le régime critique.

44. Cerceau qui décolle

Un cerceau de masse M repose sur le sol verticalement. On lâche deux bagues identiques, de masse m depuis une hauteur h. Ces deux bagues peuvent se déplacer sans frottement le long du cerceau. Voir le schéma de la figure 31.

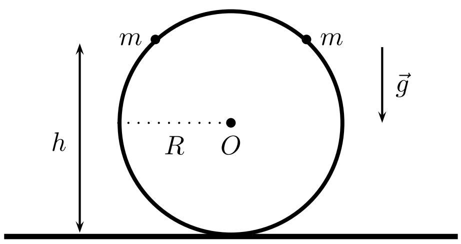


Figure 31 – Cerceau et bagues

1. Déterminer l'expression de la composante normale de la force de contact N du support sur le cerceau en fonction de M, m, g, $\cos\theta$ et $\cos\theta_0$.
2. Discuter la possibilité d'un décollage du cerceau.
3. Donner l'expression de la durée qui s'est écoulée jusqu'au décollage du cerceau dans le cas où $\theta_0 \ll \pi$ de telle sorte que $\cos\theta_0 \simeq 1$. On donne la primitive suivante :

$$\int \frac{\mathrm{d}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} = \ln\,\tan\frac{\theta}{4}$$

45. Mouvement d'une chaîne sur une table

Le référentiel terrestre est supposé galiléen. Une chaîne AB homogène, sans raideur, de longueur d et de masse m, est posée sur le bord d'une table horizontale, sans vitesse initiale, son extrémité B se trouvant à une distance b du bord de la table. On néglige tout frottement interne à la chaîne d'une part, et entre la table et la chaîne d'autre part. On étudie la chute de la chaîne avant que son extrémité B n'atteigne le sol. Voir le schéma de la figure 32.

1. Déterminer l'équation différentielle que vérifie l'abscisse x de l'extrémité B de la chaîne sur l'axe vertical (Ox) à un instant t (on supposera $x < d$).

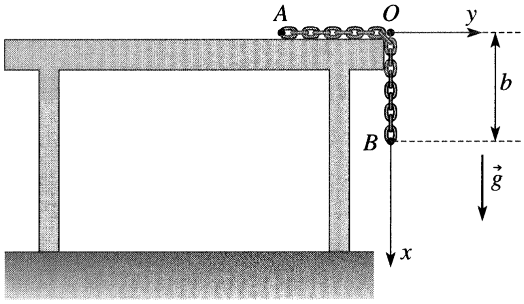


FIGURE 32 – Chaîne qui tombe sur le bord d'une table

2. En déduire la loi $x(t)$.
3. Déterminer à un instant t la force $\vec{R}$ qu'exerce la table sur la chaîne.

C. Référentiels non galiléens

46. Plateau oscillant

Une bille de verre de masse m et de rayon r est placée sur un plateau en bois oscillant verticalement avec une amplitude A et une pulsation ω grâce à un pot vibrant, voir le schéma de la figure 33. À quelle condition la bille en verre décolle-t-elle du plateau oscillant ?

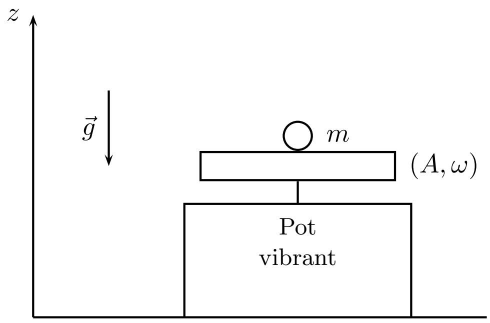


FIGURE 33 – Le plateau vibrant et la bille de verre

Proposition de réponses :

a) Cela dépend de la masse de la bille. b) Cela dépend du rayon de la bille.
c) Cela dépend du coefficient de frottement entre la bille et le plateau.
d) Toutes les réponses proposées sont incorrectes.

47. Pendule embarqué

On considère un véhicule que nous supposerons glisser sans frottement sur un plan horizontal dans un premier temps puis sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale dans un second temps. Au plafond de ce véhicule est accroché, un pendule pesant de masse m, voir le schéma de la figure 34. À l'intérieur du véhicule, aucun opérateur n'a pas mis en mouvement le pendule.

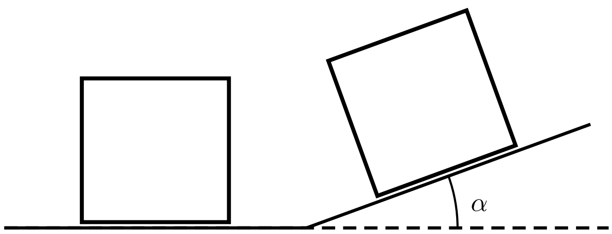


FIGURE 34 – Pendule embarqué

1. Quelle est la direction du pendule lorsque le véhicule glisse sur le plan horizontal ?
2. Même question lorsque le véhicule monte le plan incliné toujours en glissant sans frottement.

48. Oscillateur dans un véhicule

On considère un mobile de masse m relié à deux ressorts idéaux de raideur k_1 et k_2, et pouvant se déplacer horizontalement sans frottement dans un véhicule en mouvement uniformément accéléré par rapport au référentiel terrestre, a désignant la norme de son vecteur accélération. Voir la figure 35. Quelle formule vérifie la fréquence des oscillations du mobile ?

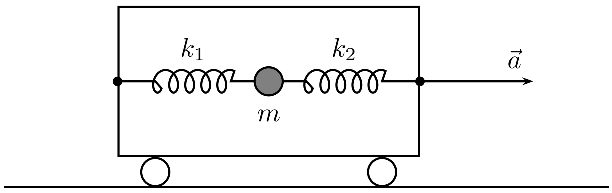


FIGURE 35 – Oscillateur dans un véhicule accéléré uniformément

Proposition de réponses :

a) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}$ b) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}}$

c) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1k_2}{(k_1+k_2)m}+a}$ d) $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}+a}$

49. Freinage brutal d'une voiture

Une voiture roule à la vitesse constante $v_0 = 50\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ en ville lorsque brutalement un enfant qui était sur le trottoir se précipite sur la route pour récupérer le ballon qui vient de lui échapper. L'enfant était sur le trottoir à droite au-delà de la voiture. La voiture s'arrête en une durée $\delta t = 1\,\mathrm{s}$. On suppose que la décélération de la voiture est constante au cours du freinage.

1. Déterminer la distance minimale pour laquelle l'enfant n'est pas heurté par la voiture.
2. Déterminer la norme de la force d'inertie que subit le conducteur dont la masse est $m = 70\,\mathrm{kg}$.

50. Démarrage d'un camion

Un camion démarre sur une route horizontale avec une accélération constante γ. Sur la plate-forme de longueur ℓ est placé un carton homogène de longueur a et de masse m. Le coefficient de frottement de glissement entre le carton et la plate-forme est f.

1. Établir l'équation du mouvement du carton dans le cas où il y a glissement.
2. À quelle condition sur l'accélération γ a-t-on glissement jusqu'à ce que le carton tombe du camion ?
3. À quelle date le carton tombe-t-il du plateau-remorque ?
4. Déterminer la distance parcourue par le camion avant que le carton tombe à l'arrière du camion, dans l'hypothèse où le carton glisse.

51. Un élastique qui se dilate

On considère un élastique circulaire contenu dans un plan horizontal en permanence, sans que l'on se préoccupe de la façon dont il reste dans ce plan. Cet élastique possède un rayon r_0 lorsqu'il n'est ni étendu, ni comprimé. Sa masse est m et la constante de raideur liée à son élasticité est k. Cet élastique est mis en rotation autour de son axe de symétrie vertical (axe Oz) à la vitesse de rotation ω. Après un régime transitoire assez bref, l'élastique adopte une configuration différente de celle qu'il possédait lorsqu'il était au repos.

1. Décrire qualitativement le phénomène qui se produit.
2. Caractériser quantitativement son nouvel état en fonction de r_0, ω, m et k.
3. Retrouver le résultat établi à la question précédente par une méthode différente de celle employée avant.

52. Déviation vers l'Est

Un point matériel de masse m est lâché sans vitesse initiale d'une altitude h depuis un lieu de latitude λ de la surface de la Terre. On propose de travailler avec la base cartésienne $Mxyz$ de vecteurs unitaires $\vec{e}_x$ orienté vers l'Est, $\vec{e}_y$ orienté vers le Nord et $\vec{e}_z$ orienté fuyant depuis le centre de la Terre qui sera supposée sphérique. Pour simplifier, le poids du corps sera considéré comme dirigé par $-\vec{e}_z$, on négligera tout type de frottements.

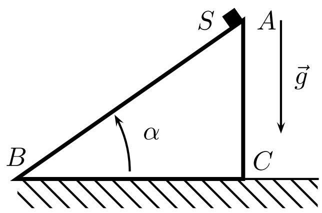
1. Faire un bilan des forces exercées sur la masse m.
2. Écrire la relation fondamentale de la dynamique et la projeter sur les trois vecteurs de la base choisie.

   On cherche à résoudre ce système d'équation de manière perturbative.

3. Selon quelle direction la vitesse est-elle non nulle en l'absence de rotation terrestre ? Quelle est l'équation donnant l'évolution de la coordonnée correspondante, toujours dans l'approximation de l'absence de rotation terrestre ?
4. On s'intéresse aux accélérations projetées sur les deux autres directions. Expliquer pourquoi l'une de ces deux projections est nettement supérieure à l'autre.
5. Calculer alors cette accélération, puis la vitesse associée.
6. En déduire qu'au moment de toucher le sol, la masse a légèrement dévié vers l'Est.
7. Faire l'application numérique pour $h = 158\,\mathrm{m}$, $\lambda = 50\,^\circ$, et $g = 9,8\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.
8. En 1833, Ferdinand Reich a mesuré une déviation vers l'Est de 28 mm pour une masse tombant dans un puits de mine sur la hauteur h. Qu'en pensez-vous ?

53. Glissement et référentiel non galiléen

Le petit solide S de masse m peut glisser sans frottement sur la face inclinée AB de longueur L de l'équerre de masse M. Cette équerre peut elle-même glisser sans frottement sur le plan horizontal. On abandonne le système sans vitesse initiale, S étant en A.
En négligeant la dimension de S devant celle de AB, déterminer le temps que met S pour atteindre le point B.



54. Tube en rotation

Un tube coudé plonge dans un liquide de masse volumique μ. Il tourne à la vitesse angulaire constante ω autour de l'axe vertical $z'z$. En régime établi, le niveau du liquide se situe dans la branche verticale du tube, à une distance y de celui de la cuve. Voir le schéma de la figure 36.

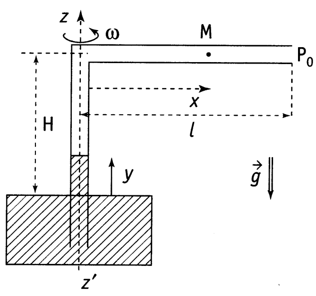


Figure 36 – Tube en rotation

1. Calculer au point M, la pression $P(x)$ de l'air en fonction de P_0, ω, l, x et de la masse volumique ρ_0 de l'air (conditions P_0, T_0) dans les deux cas suivants :
   — En supposant $\rho_{air} = \mathrm{Cte} = \rho_0$.
   — En prenant en compte les variations avec P de la densité ρ de l'air dans le tube et en supposant la température T_0 uniforme ; P_0 est la pression de l'air ambiant à l'altitude de la branche horizontale.
2. Déterminer la dénivellation y du liquide. On donne $\omega = 314\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$, $H \simeq l = 0,10\,\mathrm{m}$, $\mu = 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$, $\rho_0 = 1,2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$ et $g = 9,81\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$.