

# Exercices : 16 - Mécanique du point

— Solutions —

## A. Interaction à force centrale et interaction gravitationnelle

### 1. Vitesse de libération d'une planète

Réponses : l'énergie mécanique est  $E = \frac{1}{2}mv_L^2 - \frac{GMm}{R} = 0$  pour atteindre un mouvement de diffusion permettant d'aller à l'infini de la planète, la masse de la planète est donnée par  $M = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$ , on en déduit  $v_L = \sqrt{\frac{8\pi GR^2\rho}{3}} = 23,4 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ , c'est la réponse c).

### 2. Système planétaire

Réponses : pour une trajectoire circulaire de rayon  $r$ , on démontre facilement que l'énergie mécanique est de la forme  $E = -\frac{GM_p M_E}{2r}$ , cette expression se prolonge pour les trajectoires elliptiques en remplaçant la diamètre  $2r$  par le grand axe  $2a$ . La planète possède alors une énergie  $E = -\frac{GM_p M_E}{2a}$  où  $2a$  est le grand axe de la trajectoire. Une mesure précise du grand axe de chaque trajectoire montre que l'on a  $E_{m_A} = E_{m_B} > E_{m_C}$ , c'est-à-dire la réponse b).

### 3. Mars

Réponses : on utilise la loi de KÉPLER pour des orbites supposées circulaires  $\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$ , dans cette loi il ne figure que la masse du Soleil car elle est très grande devant les masses des planètes, dans le système solaire, on a  $\frac{T^2}{R^3} = \frac{T'^2}{R'^3}$  d'où  $T' = T \left(\frac{R'}{R}\right)^{3/2}$ , la distance Terre-Mars est donnée logiquement pour valeur minimale, la distance Soleil-Mars est la somme des distances Soleil-Terre et Terre-Mars, on a  $R' = 2,28 \times 10^{11} \text{ m}$  et  $R = 1,50 \times 10^{11} \text{ m}$ ,  $T = 1 \text{ an}$  d'où  $T' = 1,88 \text{ ans}$ , cela représente  $9,9 \times 10^5$  minutes, c'est donc la réponse d).

### 4. Satellite en basse altitude

Réponses : la force de gravitation étant une force centrale, le mouvement circulaire sera uniforme, la relation de la Dynamique appliquée au satellite dans le référentiel géocentrique supposée galiléen et sur une trajectoire de rayon  $r_s$  donne  $-m\frac{v^2}{r_s}\vec{e}_r = -m\omega^2 r_s \vec{e}_r = -\frac{GM_T m}{r_s^2}\vec{e}_r$ , on a donc  $v = \sqrt{\frac{GM_T}{r_s}}$ , la période est  $T = \frac{2\pi r_s}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r_s^3}{GM_T}}$ , a) est fausse car plus  $r_s$  est grand, plus  $v$  est petite, la plus grande vitesse est obtenue en basse altitude, la période de rotation est indépendante de la masse  $m$  du satellite car cette masse est petite devant celle de la Terre (elle n'apparaît pas dans la formule, pour une étude rigoureuse, il faut considérer le mobile réduite de masse  $\frac{mM_T}{m+M_T}$ , le résultat fait alors apparaître  $m + M_T$  mais  $m \ll M_T$  ce qui fait que le raisonnement simplifié précédent est valable), l'étude s'effectue dans le référentiel géocentrique indépendant de la rotation sur elle-même, le sens du mouvement de translation circulaire du satellite assimilé à un point n'a aucune influence, la plus grande vitesse s'obtient pour une altitude nulle... nous dirons négligeable devant le rayon de la Terre, on considère donc  $r_s = R$ , on obtient  $T_{min} = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM_T}} = 1 \text{ h } 25 \text{ min}$ , il n'est pas possible d'avoir une période d'une heure et dix minutes, la bonne réponse est donc d).

### 5. Lancement d'un satellite

Réponses : l'énergie potentielle de gravitation est  $E_{pot} = -\frac{GmM_T}{r}$ ,  $GmM_T \left(\frac{1}{R_T} - \frac{1}{R}\right) = \Delta E_{pot}$  représente la variation d'énergie potentielle gravitationnelle entre le départ sur Terre pour  $r = R_T$  et l'arrivée au rayon  $r = R = R_T + h$  donc à l'altitude  $h$  du satellite. Comme l'énergie disponible pour donner au satellite l'énergie potentielle évoquée est un peu supérieure, le satellite dispose de suffisamment d'énergie pour atteindre le rayon  $R$ , il lui reste encore de la vitesse. Comme il reste dans un mouvement supposé vertical, il va dépasser  $R$  et s'arrêter légèrement plus haut pour retomber ensuite sur Terre sous l'effet de la gravitation, c'est la réponse c). Le satellite ne pourra pas se retrouver sur une orbite circulaire car en partant verticalement, c'est-à-dire avec une vitesse sur  $\vec{e}_r$ , et comme il lui est impossible de modifier l'orientation de sa vitesse, il ne pourra jamais avoir une vitesse sur  $\vec{e}_\theta$  indispensable pour un mouvement circulaire.

### 6. Astéroïdes

Réponses : en orbite basse signifie que l'on négligera son altitude devant le rayon  $R$  de Cérès. On considère donc un petit astéroïde en mouvement circulaire de rayon  $R$  sous l'effet de la force gravitationnelle exercée par Cérès de masse  $\frac{1}{3}M$ . L'écriture du principe fondamental de la Dynamique dans le référentiel centré sur Cérès supposé galiléen (puisque la masse du petit astéroïde est négligeable devant celle de Cérès) permet d'écrire que  $m\frac{v^2}{R} = \frac{1}{3}\frac{GMm}{R^2}$ . On en déduit que la vitesse du petit astéroïde est  $v = \sqrt{\frac{GM}{3R}}$ . La période est  $T = \frac{2\pi R}{v}$ . On arrive à  $T = 2\pi\sqrt{\frac{3R^3}{GM}}$ . L'application numérique donne 2,2 heures. Comme le petit astéroïde aura un rayon  $r = R + h$

avec  $h \ll R$ , sa période sera nécessairement supérieure à celle calculée pour  $R$  mais pas beaucoup plus grande. On retiendra donc que la bonne proposition de réponse est b).

**7. Traction par un fil central**

Réponses : On effectue un repérage du point mobile  $M$  par ses coordonnées polaires  $(\ell, \theta)$  de centre  $O$ , dans son plan de mouvement. Le théorème du moment cinétique en  $O$  est très intéressant à appliquer car le mouvement est un mouvement à force centrale  $\vec{T}$  puisque  $\vec{R} + m\vec{g} = \vec{0}$  (pas de décollement de  $M$  du plan) :  $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{O,tension} = \vec{0}$  donc  $\vec{L}_O \cdot \vec{k} = Cte = m\ell^2\omega$  soit  $(a - bt)^2\omega = a^2\omega_0$  d'où  $\omega = \frac{d\theta}{dt} = \frac{a^2\omega_0}{(a-bt)^2}$ . Une autre méthode pour arriver à ce résultat consiste à exploiter la nullité de l'accélération orthoradiale de  $M$  et d'intégrer l'équation à variables séparables correspondante. L'intégration de la vitesse angulaire précédente, compte tenu de  $\theta(t=0) = 0$ , donne  $\theta(t) = \frac{a\omega_0 t}{a-bt}$ . On obtient l'équation polaire de la trajectoire en éliminant  $t$  entre cette relation et  $\ell = a - bt$ . On trouve  $\ell = \frac{a}{1 + \frac{b\theta}{a\omega_0}}$ . Le théorème de la résultante cinétique appliqué au point  $M$  dans le référentiel galiléen où le plan est fixe s'écrit  $m\vec{\gamma}(M) = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{R}$ . On a noté  $\vec{\gamma}$  l'accélération pour ne pas la confondre avec le paramètre  $a$  de l'énoncé. En dérivant deux fois dans la base polaire mobile le vecteur  $\vec{OM}$ , on trouve la partie radiale de l'accélération  $\vec{\gamma}(M) \cdot \vec{u} = -(a - bt)\omega^2$ . Ainsi, l'expression projetée sur  $\vec{u}$  du théorème de la résultante cinétique est, en posant  $\vec{T} = -T\vec{u}$ ,  $-m(a - bt)\omega^2 = -T$  donc  $T = m\ell\omega^2 = m\frac{\ell^4\omega^2}{\ell^3} = \frac{ma^4\omega_0^2}{\ell^3}$ . Le travail fourni par l'opérateur vaut, en prenant garde au signe,  $W = \int_a^{\ell(t)} -T(\ell') d\ell'$ . On remplace l'expression précédente de  $T$  et on intègre. On trouve  $W = \frac{1}{2} m a^2 \omega_0^2 \left( \frac{a^2}{\ell^2} - 1 \right)$ . On aurait aussi pu déterminer cette expression par le théorème de l'énergie cinétique. Puisqu'il n'y a pas de frottements,  $W = \Delta\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m (v^2 - v_0^2)$  soit  $W = \frac{1}{2} m [(b^2 + \ell^2\omega^2) - (b^2 + a^2\omega_0^2)]$ . En utilisant  $\ell^2\omega = a^2\omega_0$ , on retrouve le même résultat final.

**8. Noyau émetteur radioactif  $\alpha$**

Réponses :  $r^2\dot{\theta} = U_0 \sin \beta$ ,  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r^2} - \frac{b}{r^5}$ ,  $r_0 = 1$  et  $\dot{\theta}_0 = U_0 \sin \beta$ ,  $k$  et  $b$  en  $s^{-2}$ , mouvement de diffusion hyperbolique, particule piégée si elle passe trop près de  $O$ , cercle  $r_c = 1$  si  $\beta_c = \frac{\pi}{2}$  et  $U_0 = \sqrt{b - k}$  avec  $b > k$ , cercle de rayon  $r_c \neq 1$  si  $\beta_c = \frac{\pi}{2}$  et  $U_0 = \sqrt{\frac{b}{r_c^2} - kr_c}$  si  $b > kr_c^3$ , non dès que  $\beta \neq \frac{\pi}{2}$  le mouvement n'est plus circulaire, d'une façon générale, on pose  $r = r_c(1 + \epsilon)$ , on calcule avec des développements limités à l'ordre 1 en  $\epsilon$ , la relation de la dynamique donne  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{k}{r^2} - \frac{b}{r^5}$  pour le mouvement circulaire  $-r_c\dot{\theta}_c^2 = \frac{k}{r_c^2} - \frac{b}{r_c^5}$ , la conservation du moment cinétique conduit à l'équivalent de la constante des aires  $C_s = r_c^2\dot{\theta}_c = r^2\dot{\theta}$ , on obtient l'équation différentielle  $\ddot{\epsilon} - \left(\frac{2b}{r_c^6} + \frac{k}{r_c^3}\right)\epsilon = 0$  qui montre que la solution n'est pas bornée et donc le mouvement circulaire instable.

**9. Trajectoire bornée**

Réponses :  $\vec{v}_0 \perp \vec{r}_0$  et  $v_0 = \sqrt{-\left(\frac{a}{r_0} + \frac{2b}{r_0^3}\right)}$  avec  $ar_0 + 2b < 0$ ,  $\frac{1}{m}E_{pot,eff} = \frac{a}{r} + \frac{b'}{r^2}$  avec  $b' = b + \frac{r_0^2 v_0^2 \sin^2 \alpha_0}{2}$ , si  $a < 0$  et  $b' > 0$  alors mouvements bornés possibles, idem pour  $a < 0$  et  $b' < 0$  ainsi que  $a > 0$  et  $b' < 0$ .

**10. Mouvements d'une comète**

Réponses :  $u^2 = \frac{Gm_s}{a}$ ,  $v_{max} = \sqrt{\frac{2Gm_s}{\epsilon a}} = \sqrt{\frac{2}{\epsilon}}u = 530 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_{min} = \sqrt{\frac{2}{\gamma}}u = 3,7 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ ;  $T_c = T_{Terre} \left(\frac{\epsilon + \gamma}{2}\right)^{3/2} = 524 \text{ ans}$ ; au périhélie la force supplémentaire est la plus élevée, périhélie plus proche que celui calculé se décalant progressivement.

**11. Le voyage vers Mars**

Réponses :  $T_M = 1,53^{3/2}T_T = 1,9 \text{ ans}$ ,  $v_i = v_0\sqrt{\frac{2n}{n+1}} = 1,1v_0$ , durée :  $\frac{1}{2}\left(\frac{1+n}{2}\right)^{3/2} = 0,7 \text{ ans}$ , il faut accélérer car  $-\frac{GM_S m}{(1+n)a_0} < -\frac{GM_S m}{2na_0}$ .

**12. Oscillations d'une particule chargée**

Réponses : on fait un raisonnement énergétique  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 - \frac{qQ}{2\pi\epsilon_0\sqrt{y^2+R^2}}$ . Avec  $y \ll R$ , on effectue un développement limité de  $(1 + \frac{y^2}{R^2})^{1/2} = 1 - \frac{y^2}{2R^2}$ , l'énergie mécanique se met sous la forme  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 R^3}y^2 - \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 R}$ . On peut écrire l'énergie par analogie avec celle d'un système de type ressort  $E_m = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2}ky^2 + Cte$ , on identifie la constante de raideur du ressort  $k = \frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 R^3} = m\omega_0^2$  et donc  $\omega_0 = \sqrt{\frac{Qq}{2\pi\epsilon_0 R^3}}$ , c'est la réponse d).

### 13. Cataclysmes

Réponses :  $-\frac{\mathcal{G}M_s m}{r_0^2} \vec{e}_r = -m \frac{v_0^2}{r_0} \vec{e}_r$  d'où  $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_s}{r_0}} = 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$ .  $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$  d'où  $\frac{T_0^2}{r_0^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_s}$ .  $E_c = \frac{\mathcal{G}M_s m}{2r_0} = -E_m = -2E_p$ . On a  $E'_c = \frac{\mathcal{G}M_s m}{8r_0}$  et  $E'_m = -\frac{7\mathcal{G}M_s m}{8r_0} < 0$ , c'est une trajectoire liée d'aphélie  $r_a = r_0$  et de périhélie tel que  $2a = r_a + r_p$  où  $a$  est le demi-grand axe de l'ellipse que l'on obtient grâce à  $E'_m = -\frac{\mathcal{G}M_s m}{2a}$ , on en déduit que  $r_p = r_0/7$ . Il n'y a qu'une force dirigée vers le Soleil, sans vitesse initiale, la Terre va directement en direction du Soleil. La conservation de l'énergie mécanique conduit à  $r^2 - \frac{2\mathcal{G}M_s}{r} = -\frac{2\mathcal{G}M_s}{r_0}$ . On en déduit, avec  $r = ur_0$ ,  $\frac{du}{\sqrt{1/u-1}} = -\sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_s}{r_0^3}} dt$  d'où  $t_c = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r_0^3}{2\mathcal{G}M_s}} \simeq 65 \text{ jours}$ .

### 14. Un modèle d'interaction forte

Réponses :

#### 1. Analyse de résultats de la simulation

- (a) On sait qu'une énergie est en  $\text{J} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . Dans ces conditions, on peut écrire  $ET^2 = ML^2$  et donc  $T = \sqrt{\frac{ML^2}{E}} = 10^{-22} \text{ s}$ . Cette unité est très petite mais les phénomènes qui se produisent à l'échelle du noyau sont très brefs. Pour la vitesse, on aura  $V = \frac{L}{T} = 10^7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . Cette vitesse n'est pas relativiste ( $V < c/10$ ) même si elle est élevée.
- (b) On obtient pour la force une force attractive et forme gaussienne et pour le potentiel, une forme de puits plat avec une évolution rapide autour de la frontière du noyau  $r = r_0$ , voir la figure 1.

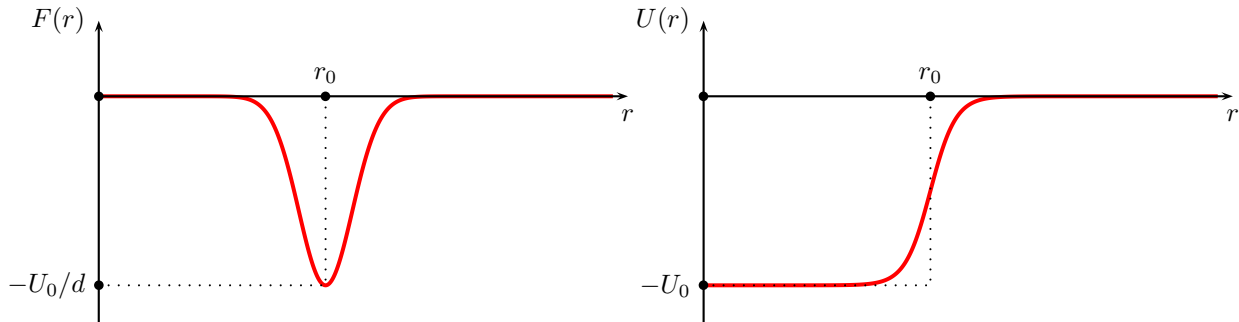


FIGURE 1 – Représentation de la force et de l'énergie potentielle

- (c)  $U_0$  est la profondeur du puits de potentiel,  $r_0$  est le rayon du noyau et  $d$  une distance caractéristique d'évolution de l'interaction forte. On sait qu'elle agit à courte distance,  $d$  est selon toute vraisemblance inférieure à  $r_0$ . Au bout de quelques  $d$  de part et d'autre de  $r_0$ , la force est négligeable.
- (d) Nous avons en quelque sorte répondu précédemment à la question. Puisque l'unité de vitesse est  $V = \frac{c}{30}$ , on a a priori des neutrons non relativistes même si la marge n'est pas très importante.

#### 2. Étude classique des trajectoires neutroniques

- (a) La force dérive d'une énergie potentielle  $U(r)$ , il y a donc conservation de l'énergie mécanique :  $\frac{1}{2}mv^2 + U(r) = \frac{1}{2}mv_0^2$ . La force est centrale  $\vec{F} = F(r)\vec{e}_r$ , son moment est donc nul :  $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ . Le moment cinétique est donc constant  $\vec{L} = \vec{OM} \wedge m\vec{v}$ . Comme la masse est constante, on obtient, avec  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ , la constante des aires  $C = r^2\dot{\theta}$ . Pour la calculer, on utilise les conditions initiales lorsque le neutron est éloigné du noyau.  $\vec{C} = \vec{e}_z(x_0\vec{e}_x + y_0\vec{e}_y) \wedge v_0\vec{e}_x = -y_0v_0\vec{e}_z$ . La seconde constante du mouvement est donc :  $r^2\dot{\theta} = -y_0v_0$ . Comme l'énergie cinétique est  $E_c = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2)$ , on peut utiliser l'expression de la constante des aires pour faire évoluer la partie orthoradiale de l'énergie cinétique. On obtient  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{my_0^2v_0^2}{2r^2} + U(r) = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Cela nous permet de définir l'énergie potentielle effective  $E_{p,ef} = \frac{my_0^2v_0^2}{2r^2} + U(r)$ . Si cette valeur présente un minimum, alors il y aura possibilité d'avoir un état lié du neutron dans le puits de potentiel correspondant à ce minimum. Si ce minimum n'existe pas, alors il n'y aura que des états de diffusion. En calculant la dérivée en  $r$  de  $E_{p,ef}$  et en annulant cette dérivée, on obtient l'équation  $\frac{dmy_0^2v_0^2}{U_0} \frac{1}{r^3} = \exp\left(-\left(\frac{r-r_0}{d}\right)^2\right)$ . En fonction des valeurs des conditions initiales et de  $U_0$ , le minimum existe. Pour cela il faut que  $\frac{dmy_0^2v_0^2}{U_0} \frac{1}{r^3} \leq 1$ . Le graphique de la figure 2 montre une situation où l'on obtient un minimum et donc un puits de potentiel susceptible de piéger un neutron.

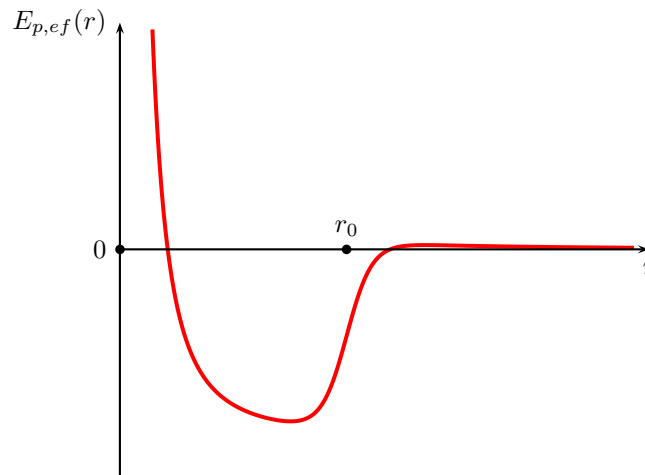


FIGURE 2 – Un cas d'énergie potentielle effective  $E_{p,ef}(r)$  avec puits de potentiel

(b) Si on a  $r_0 \gg d$ , la force qui s'exerce se limite quasiment à  $r = r_0$ , en dehors de cette valeur du rayon, elle est nulle. On a donc une force bornée  $\vec{F}(r = r_0) = -\frac{U_0}{d}\vec{e}_r$ . Cette force est centrale, elle modifie très ponctuellement la quantité de mouvement. Comme pour  $r \neq r_0$ , la force est nulle, le mouvement est rectiligne et uniforme. On a donc nécessairement des segments de droite mais il y a un changement d'orientation à chaque fois que  $r = r_0$  puisque  $\vec{F}$  va agir. Lorsque le neutron arrive sur le noyau, la force qu'il subit est orientée en direction du centre du noyau sur  $-\vec{e}_r$ . Elle ne modifie pas la composante de la vitesse sur  $\vec{e}_\theta$ , c'est-à-dire la composante de la vitesse sur la tangente à la sphère de rayon  $r_0$ . Le neutron change de vitesse entre  $r_0^+$  et  $r_0^-$  puisqu'il entre dans un potentiel  $-U_0$  alors qu'il se trouvait avant dans une zone de potentiel  $U(r) = 0$ . Sa vitesse dans le noyau est  $v_1$  telle que  $\frac{1}{2}mv_1^2 - U_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ . On en déduit que  $v_1 = v_0\sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_0^2}}$ .

(c) On va raisonner par rapport à la normale à la sphère au niveau du point d'entrée du neutron dans le noyau. Soit  $i_0$  l'angle entre la vitesse et  $-\vec{e}_r$ , angle par rapport à la normale comme en Optique... L'angle après avoir franchi l'équivalent d'un dioptre est  $i_1$ . On doit donc avoir la relation  $v_0 \sin i_0 = v_1 \sin i_1$ . Comme  $v_1 > v_0$ , alors  $i_1 < i_0$ , le neutron se rapproche de la normale, la déviation qu'il subit est  $i_0 - i_1$ . Arrivé de l'autre côté du noyau, il possède encore l'incidence  $i_1$  par symétrie consécutive au modèle sphérique du noyau. Il ressort dans le milieu d'énergie potentielle nulle et retrouve la vitesse  $v_0$ . La loi de réfraction, si l'on peut dire, est de nouveau  $v_1 \sin i_1 = v_0 \sin i_0$ . Il ressort après avoir subi à nouveau une déviation dans le même sens que le précédent de  $i_0 - i_1$ . On a donc  $\theta = 2(i_0 - i_1)$ . Nous savons que  $\sin i_0 = \frac{y_0}{r_0}$ , on peut en déduire que  $\sin i_1 = \frac{y_0}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_0^2}}}$ . La formule

demandée pour l'angle de déviation est :  $\theta = 2(\arcsin \frac{y_0}{r_0} - \arcsin \frac{y_0}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2U_0}{mv_0^2}}})$ . Cette formule ne peut

être étudiée que par informatique à l'aide du fichier *Python*.

## B. Référentiels galiléens

### 15. Contact homme - sol

Réponses : 1 vraie, 3 vraie le centre d'inertie fait un mouvement vertical oscillant d'amplitude de l'ordre de 1 cm.

### 16. Deux solides liés

Réponses :  $T_1 = fmg \cos \alpha$ ,  $T_2 = 4fmg \cos \alpha$ ,  $a = g \sin \alpha - \frac{5}{3}fg \cos \alpha$ ; relation de la dynamique à 2  $2ma = 2mg \sin \alpha - T_2 + T$ ,  $T = \frac{2}{3}fmg \cos \alpha$ , mouvement rectiligne uniformément accéléré.

### 17. Entraînement par frottement

Réponses :  $m_1 a_1 = T$ ,  $m_2 a_2 = F - T$ ,  $T < \mu m_1 g$ , si glissement  $T = \mu m_1 g$ , avant le glissement  $a_1 = a_2$  d'où  $a = \frac{\alpha t}{m_1 + m_2}$ ,  $t_0 = \frac{\mu g(m_1 + m_2)}{\alpha}$ ,  $a_1 = \mu g$ ,  $a_2 = \frac{\alpha t - \mu m_1 g}{m_2}$ .

### 18. Frottements... Frottements

Réponses : on raisonne à  $a > 0$  avec  $\vec{a}_1 = a\vec{e}_x$  et  $\vec{a}_2 = -a\vec{e}_x$ . On effectue un bilan des forces sur chaque solide, on dit que la poulie transmet la tension de la corde que l'on note  $F_1 > 0$  pour celle exercée sur 1 et  $F_2 > 0$  pour celle exercée sur 2 avec  $F_1 = F_2$ . La relation de la Dynamique pour le solide 1 est  $F - F_1 - T_1 - T_2 = m_1 a$  et  $m_1 g + N_2 = N_1$  avec  $T_1 = \mu N_1$  et  $T_2 = \mu N_2$  du fait du glissement. La relation de la Dynamique à 2, on a  $m_2 a = F_2 - T_2$  et  $N_2 = m_2 g$ . On a donc les deux relations  $m_2 a = F_2 - \mu m_2 g$  et  $m_1 a = F - F_1 - \mu(m_1 + 2m_2)g$ . En les additionnant, on trouve  $a = \frac{F - 2\mu m_2 g}{m_1 + m_2} - \mu g$ . La bonne réponse est d).

### 19. Pendule en mouvement circulaire

Réponses : le mouvement est circulaire et uniforme, l'accélération du pendule est  $\vec{a} = -\omega^2 R \vec{e}_r$ . La relation de la Dynamique appliquée dans le référentiel du laboratoire, considéré comme galiléen, au pendule permet d'écrire que  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$ . On en déduit que  $\vec{T} = m(\vec{a} - \vec{g})$ . On peut écrire que  $T^2 = m^2(a^2 + g^2 - 2\vec{a} \cdot \vec{g})$ . Du fait de la perpendicularité de  $\vec{a}$  et de  $\vec{g}$ , on peut donc conclure que  $T = m\sqrt{\omega^4 R^2 + g^2}$  qui est la réponse d).

### 20. Notion d'adhérence

Réponses : la somme des forces est nulle  $m\vec{g} + \vec{N}_A + \vec{T}_A + \vec{N}_B + \vec{T}_B = \vec{0}$ , on obtient  $N_A + N_B = mg \cos \theta$  et  $T_A + T_B = mg \sin \theta$ , la somme des moments est nulle, écrite en  $G$  on a  $-(T_A + T_B)a - N_B b + N_A b = 0$  d'où  $T_A + T_B = mg \sin \theta$ ,  $N_A = \frac{mg}{2}(\cos \theta + q \sin \theta)$  et  $N_B = \frac{mg}{2}(\cos \theta - q \sin \theta)$ , pas de glissement si  $T_A < f N_A$  et  $T_B < f N_B$ , en sommant on obtient  $T_A + T_B < f(N_A + N_B)$  d'où la relation  $mg \sin \theta < f mg \cos \theta$  donc  $\tan \theta < f$ ,  $N_B$  peut s'annuler pour éviter il faut  $\cos \theta > q \sin \theta$  d'où  $\tan \theta < \frac{1}{q}$ , si on suppose que  $f < \frac{1}{q}$  alors on obtient  $\tan \theta < f < \frac{1}{q}$  ce qui donne automatiquement  $\tan \theta < \frac{1}{q}$ , l'équilibre est donc tout à fait possible,  $Z_A(1 + q \tan \theta) + Z_B(1 - q \tan \theta) = 2 \tan \theta$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  positifs, voir la figure 3, droite d'équation  $Z_B = \frac{2 \tan \theta}{1 - q \tan \theta} - \frac{1 + q \tan \theta}{1 - q \tan \theta} Z_A$ , ici  $Z_B = \frac{8}{7} - \frac{9}{7} Z_A$ , état d'adhérence pour  $T_A = f N_A$ , c'est-à-dire  $Z_A = f$ , idem pour  $Z_B$ , donc  $\mathcal{A}$  est un carré de côté  $f$ , ici  $f = 1$ , l'indétermination sur  $T_A$  et  $T_B$  qui se traduit par une indétermination sur  $Z_A$  et  $Z_B$  est perceptible par l'existence d'un domaine étendu pour les adhérences, si les composantes tangentielles étaient fixées, on aurait un point pour représenter leurs valeurs et non pas un segment, s'il y a glissement, on a alors  $\tan \theta = f$ , l'équation devient  $Z_B = \frac{8}{3} - \frac{5}{3} Z_A$ . Cette droite passe par le point  $Z_A = 1$  et  $Z_B = 1$  comme on peut le voir sur le graphique de la figure 3.

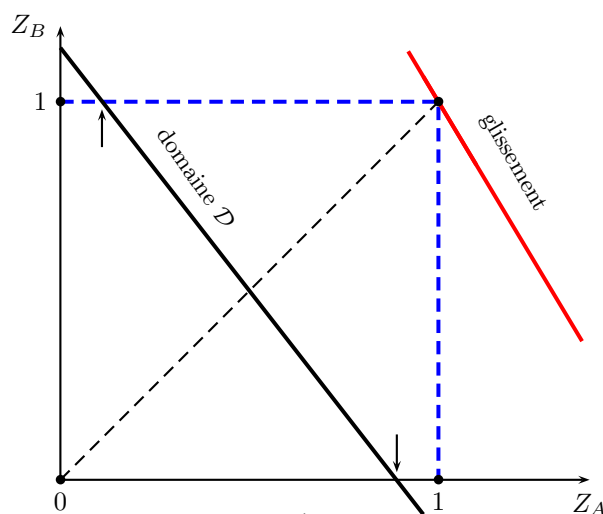


FIGURE 3 – États d'adhérence

### 21. Suspension

Réponses : il y a équilibre dans un référentiel galiléen (laboratoire terrestre)  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$ , en projection sur l'horizontale  $T_1 \cos \theta = T_2 \cos \theta$  d'où  $T_1 = T_2$  les tensions de chaque côté sont identiques, en projection sur la verticale  $mg = T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta$  d'où  $T = T_1 = T_2 = \frac{mg}{2 \sin \theta} \geq 50 \text{ N}$ , c'est la réponse c).

## 22. Système de poulies

Réponses : les poulies sont parfaites, elles transmettent la tension du câble. Par conséquent, elles subissent en vertu de la loi des actions réciproques des forces de même intensité sur les deux côtés où le câble vient en contact. Par exemple, la poulie la plus à gauche subit deux forces  $F$  vers le bas à gauche et à droite, elle sera à l'équilibre si la force exercée par le câble qui la tient exerce une force  $2F$  vers le haut. Ce même câble est accroché à la poulie la plus en bas à droite sur la figure, il exerce donc sur cette poulie une force  $2F$ . De plus, cette poulie subit une force  $F$  à gauche orientée vers le haut de la part du câble qui passe dans sa gorge, il y a bien sûr la même force orientée vers le haut à droite. Finalement, la poulie subit une force  $4F$  vers le haut et une force ayant pour norme le poids de  $m$  orientée vers le bas. À l'équilibre, on a donc  $4F = mg$  d'où  $F = \frac{mg}{4} = 24,5 \text{ N}$ . C'est la réponse b).

## 23. Voiture en virage

Réponses : l'accélération de la voiture est donnée par  $\vec{a} = \frac{v^2}{R}\vec{e}_n + \frac{dv}{dt}\vec{e}_t$ . On a  $a_n = a \cos(30^\circ)$ . On a donc la relation  $a \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{v^2}{R}$ ? On peut en déduire le rayon de courbure de la trajectoire  $R = \frac{2v^2}{a\sqrt{3}} = 173 \text{ m}$ . La réponse est c).

## 24. Construction

Réponses : on prend un axe  $Ox$  orienté vers la droite et on pose l'origine  $O$  sur la droite du premier bloc posé sur le support. On note  $2\ell$  la longueur d'un bloc. On va raisonner sur l'abscisse  $x_G$  du centre d'inertie de l'ensemble. Celle-ci doit nécessairement se situer de telle sorte que  $-2\ell \leq x_G \leq 0$ . Si cela n'était pas le cas la composante normale exercée par le support ne pourrait se placer sur la même droite d'action que le poids de l'ensemble et il y aurait alors un moment résultant ce qui provoquerait le basculement de la structure. Commençons par déterminer l'abscisse  $x_{G_4}$  de l'ensemble des 4 blocs décalés vers la gauche. On a par définition du barycentre  $4mx_{G_4} = -m\ell - m(2\ell) - m(3\ell) - m(4\ell)$ . On trouve que  $x_{G_4} = -\frac{5\ell}{2}$  ce que l'on pouvait prévoir de façon intuitive. Rajoutons maintenant  $N$  blocs dont les centres d'inertie seront placés aux abscisses  $(p-3)\ell$ . La position du barycentre de l'ensemble est donc donnée par la relation  $4m(-\frac{5\ell}{2}) + \sum_{p=0}^{N-1} m(p-3)\ell = (N+4)mx_G = 0$  puisque nous avons choisi l'abscisse nulle de l'axe  $Ox$  sur la droite du bloc le plus bas. On en déduit donc, après simplification, que  $\sum_{p=0}^{N-1} (p-3) = 10$ . Les premiers termes de la somme vont se compenser  $\sum_{p=0}^6 (p-3) = 0$ . Le terme suivant vaut 4, celui d'après 5, on voit que l'on atteint 9 et qu'ensuite, on va dépasser la valeur limite de 10. On constate donc que  $\sum_{p=0}^8 (p-3) = 9$ . Il a fallu de  $p=0$  jusqu'à  $p=8$  rajouter 9 blocs vers la droite. En comptant les 4 vers la gauche, on a donc 13 blocs. C'est la réponse d).

## 25. Corde suspendue

Réponses : on étudie l'équilibre de toute la corde  $\vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} = \vec{0}$ , en projection sur l'horizontale  $T_1 \cos \theta - T_2 \cos \theta = 0$  d'où  $T_1 = T_2 = T$ , en projection sur la verticale  $-mg + T_1 \sin \theta + T_2 \sin \theta = 0$  d'où  $T = \frac{mg}{2 \sin \theta}$ , on étudie maintenant seulement une moitié de la corde entre le point bas où la corde est horizontale (minimum de la courbe formée par la corde), la tension  $\vec{T}_3$  est donc horizontale, l'équilibre est donné par  $\vec{T}_3 + \frac{\vec{T}_1}{2} + \frac{m\vec{g}}{2} = \vec{0}$ , en projection sur la verticale, on retrouve heureusement  $T_1 \sin \theta = \frac{mg}{2}$ , sur l'horizontale  $T_3 = T_1 \cos \theta$  d'où  $T_3 = \frac{mg}{2 \tan \theta}$ , c'est la réponse c).

## 26. Poussée sur deux blocs

Réponses : pour la situation à gauche, on écrit la relation de la Dynamique au solide 1 :  $2ma = F - F_{12}$ . Celle pour le solide 2 est  $ma = F_{12}$ . On a donc  $3ma = F$  ce qui revient à écrire la relation de la Dynamique sur le système 1 + 2. Précisons que l'on travaille dans le référentiel galiléen terrestre. On peut donc trouver que pour la situation de gauche, on a  $F_{12} = \frac{F}{3}$ . Pour la configuration de droite, on fait de même  $ma = F - F_{12}$  et  $2ma = F_{12}$ . On a toujours  $3ma = F$ . On en déduit que  $F_{12} = \frac{2F}{3}$ . C'est la réponse b).

## 27. Câble porteur d'un ligne TGV

Réponses : Les forces  $N\vec{F}$  correspondent au poids  $m\vec{g}$ ,  $NF = L\frac{\pi}{4}D^2\rho g$ ,  $F = (1 + \frac{1}{N})\frac{\pi D^2}{4}\rho g \simeq 350 \text{ N}$ ,  $T_{i+1} \cos \theta_{i+1} = T_i \cos \theta_i$  et  $T_{i+1} \sin \theta_{i+1} = F + T_i \sin \theta_i$ ,  $T\theta_{i+1} = F + T\theta_i$  et  $\theta_{i+1} = f + \theta_i$ , suite arithmétique  $\theta_i = (i-1)f + \theta_1$ , étude du câble entre deux poteaux  $\vec{T}_1 + \vec{T}' + N\vec{F} = \vec{0}$ , par symétrie de la situation par rapport au milieu du câble, les angles sont les mêmes en valeur absolue pour les forces  $\vec{T}_1$  et  $\vec{T}'$ , l'angle au niveau de  $S_1$  est  $\theta_1 < 0$ , par contre de l'autre côté, on a  $\theta' = -\theta_1 > 0$ ,  $T_1 = T' = T$  et  $-\theta_1 T = NF + \theta_1 T$  avec  $\sin \theta_1 \simeq \theta_1$ ,  $\theta_1 = -\frac{N}{2}f$ ,  $\theta_i = (i-1 - \frac{N}{2})f$ , la déflexion pour un segment est  $d \tan \theta_i \simeq d\theta_i$ , la déflexion totale  $\Delta$  s'obtient par addition de toutes les déflexions du point 1 jusqu'au point milieu du câble qui est obtenu pour l'abscisse  $i = \frac{N+1}{2}$ , on a  $\Delta = \frac{(N+1)^2}{8}fd \simeq 2,2 \text{ m}$ .

### 28. Calcul d'un travail

Réponses : la force de frottement est  $T = fN$  puisqu'il y a glissement, on a  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F}$  où  $\vec{F}$  est la force de traction de l'objet. Il y a  $\vec{a} = \vec{0}$ , la projection sur le plan incliné (orientée vers le haut) est  $F = mg \sin \alpha + fN$  où  $\alpha$  est l'angle du plan incliné par rapport à l'horizontale, sur la perpendiculaire au plan incliné on a  $0 = N - mg \cos \alpha$ , d'où  $F = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ , la force qui travaille est donc  $mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)$ , on note  $\ell = AB$ , le travail est  $W = mg(\sin \alpha + f \cos \alpha)\ell$ , or  $\ell \sin \alpha = 30$  m et  $\ell \cos \alpha = 40$  m, on trouve  $W = 23$  kJ, c'est la réponse c).

### 29. Jouet

Réponses : le mobile passe en  $x = 0$  avec une vitesse orientée dans le sens  $x$  décroissant, il subit une force  $F_x$  positive qui va le ralentir. La force étant constante, elle va l'arrêter à une position  $x_a$  telle que le travail résistant de  $F_x$  soit l'opposé de l'énergie cinétique du jouet lorsqu'il est en  $x = 0$ . Cette énergie cinétique est  $E_{c0} = \frac{1}{2}mv_0^2 = 18$  J. Il faut donc un travail résistant de  $-18$  J pour arrêter la voiture. Comme  $W = \int_0^{x_a} F_x dx$ , c'est la surface sous la courbe qui est un rectangle. On trouve facilement que  $-\frac{1}{2}mv_0^2 = F_x x_a$ . On trouve  $x_a = -3,6$  m. Une fois cette abscisse atteinte, le jouet repart dans le sens  $x$  croissant et le travail de la force  $F_x$  est moteur. Le mobile regagne donc l'énergie cinétique perdue. Ceci est normal car la force  $F_x$  dérive d'une énergie potentielle, on a converti tout simplement de l'énergie cinétique en énergie potentielle puis fait le contraire. On pouvait donc assez rapidement indiquer que le jouet repasserait en  $x = 0$  avec une vitesse de  $+3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et une énergie cinétique de 18 J. La force  $F_x$  reste positive et donc motrice jusqu'à l'abscisse  $x = 6$  m. Elle accélère toujours le jouet. Pour trouver l'énergie cinétique gagnée, il faut calculer l'aire sous la courbe (travail de  $F_x$ ) qui se décompose en un rectangle et un triangle :  $5 + \frac{5 \times 5}{2} = 17,5$  J. L'énergie cinétique finale est donc  $18 + 17,5 = 35,5$  J. Elle a quasiment doublée. En raisonnant sur un doublement, la vitesse a, alors, été multipliée par  $\sqrt{2}$ . Comme elle était de  $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , elle sera de  $3,0\sqrt{2} \simeq 4,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . La bonne réponse est la réponse d).

### 30. Petite bille au sommet d'une sphère

Réponses : la relation de la dynamique donne  $mR\ddot{\theta} = -fN + mg \sin \theta$  et  $mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - N$  d'où  $\ddot{\theta} = \frac{g}{R}[\sin \theta - f \cos \theta] + f\dot{\theta}^2$ ; on suppose donc que  $f = 0$  d'où  $\ddot{\theta} = \frac{g}{R} \sin \theta$ , on en déduit  $\dot{\theta}^2 = \frac{g}{R} \sin \theta \theta$  après intégration  $\dot{\theta}^2 = 2[\frac{g}{R}(1 - \cos \theta) + \frac{v_0^2}{2R^2}]$  puisqu'à la date  $t = 0$ ,  $\dot{\theta}_0 = \frac{v_0}{R}$ ; la force  $N$  s'annule si la bille décolle de la surface de la sphère  $N = mg(3 \cos \theta - 2) - m\frac{v_0^2}{R}$  d'où  $\cos \theta_{lim} = \frac{1}{3}(2 + \frac{v_0^2}{Rg})$ .

### 31. Entraînement d'un carton par un tapis roulant

Réponses :  $\vec{v}_g = (\dot{x} - U)\vec{e}_x$ , à  $t = 0$  on a  $\vec{v}_g = -U\vec{e}_x$  tant qu'il y a glissement  $T = fN$  la force  $T$  est dirigée vers le haut puisque la vitesse de glissement est vers le bas;  $N = mg \cos \alpha$  et  $m\ddot{x} = T - mg \sin \alpha$  d'où  $\ddot{x} = g(f \cos \alpha - \sin \alpha)$ , on obtient  $\dot{x} = g(f \cos \alpha - \sin \alpha)t$ , le glissement cesse à la date  $t_1 = \frac{U}{g(f \cos \alpha - \sin \alpha)}$ ; le mouvement ultérieur du carton est rectiligne uniforme à la vitesse  $U\vec{e}_x$ .

### 32. Oscillateur de Timochenko

Réponses :  $m\ddot{x} = -T_1 + T_2$ ,  $N_1 + N_2 = mg$ , pas de rotation donc pas de moment des forces par rapport à un axe passant par  $G$  centre d'inertie de la planche,  $(\frac{l}{2} - x)N_1 = (\frac{l}{2} + x)N_2$ ,  $N_1 = \frac{l+2x}{2l}mg$ ,  $N_2 = \frac{l-2x}{2l}mg$ ,  $T_1 = \frac{l+2x}{2l}fmg$ ,  $T_2 = \frac{l-2x}{2l}fmg$ ;  $\ddot{x} + \frac{2fg}{l}x = 0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2fg}{l}}$ ,  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{2fg}} = 4,5$  s,  $x = x_0 \cos \omega_0 t$ , les moteurs assurant  $\omega$  fournissent de l'énergie.

### 33. Identification d'un système

Réponses : Les courbes montrent deux résonances aux fréquences  $f'$  et  $f''$  et une anti-résonance à une fréquence  $f_{ar}$ , avec les valeurs numériques (accessibles avec le tracé linéaire)  $f' \simeq 1,1$  Hz,  $f_{ar} \simeq 1,9$  Hz et  $f'' \simeq 2,5$  Hz. La présence des deux pics de résonance vient du forçage d'un système linéaire présentant deux fréquences propres. Lorsque la force sinusoïdale excitatrice est ajustée à l'une de ces fréquences propres, il y a effet de résonance. Chaque résonance est bornée par l'existence des frottements. Notons qu'en l'absence de frottements, il n'y aurait quand même pas divergence de l'amplitude  $A_1(f)$  car des non linéarités apparaissent en pratique. La zone d'anti-résonance entre les deux pics de résonance, au voisinage de  $f_{ar}$ , est particulièrement intéressante pour réaliser des étouffeurs de vibrations. Par exemple, lors d'un séisme, on peut souhaiter limiter l'amplitude des oscillations d'un pont donc on lui rajoute des systèmes anti-sismiques calibrés de façon adéquate se comportant comme des oscillateurs. Par couplage, le pont ne vibrera pas trop (analogue à la masse en anti-résonance) et les systèmes anti-sismiques vibreront (analogue grossièrement à l'autre masse). Afin d'exploiter les courbes, il faut déterminer l'équation de la courbe  $A_1(f)$ . On commence par définir la cinématique du problème en posant un axe  $(Ox)$  horizontal (orienté de gauche à droite; je vous laisse faire la figure obligatoire). On repère chaque masse par son déplacement par rapport à sa position d'équilibre :  $\xi_1$  pour celle de gauche et  $\xi_2$  pour celle de

droite. Autrement dit,  $\xi_1 = 0$  et  $\xi_2 = 0$  en l'absence de la force excitatrice  $\vec{F}_1$  et à l'équilibre. On traduit ensuite la dynamique du problème. Par application du théorème du centre d'inertie dans le référentiel galiléen d'étude où les parois sont fixes, en projection sur l'axe horizontal, à chacune des masses considérée séparément, il vient  $m\ddot{\xi}_1 = -k\xi_1 - k'(\xi_1 - \xi_2) - \lambda\dot{\xi}_1 + F_1 \cos \omega t$  et  $m\ddot{\xi}_2 = -k\xi_2 - k'(\xi_2 - \xi_1) - \lambda\dot{\xi}_2$ . On a choisi l'origine des temps de sorte à pouvoir traduire ainsi la force  $\vec{F}_1$  avec  $F_1 > 0$  et on a noté  $\omega = 2\pi f$  la pulsation. Puisque l'on s'intéresse au régime forcé (ce qui sous-entend que les frottements ont quand même pu faire disparaître le régime libre), on passe en notation complexe en  $\exp j\omega t$  :  $-m\omega^2 \underline{\xi}_1 = -k \underline{\xi}_1 - k'(\underline{\xi}_1 - \underline{\xi}_2) - j\omega \lambda \underline{\xi}_1 + F_1 \exp j\omega t$  et  $-m\omega^2 \underline{\xi}_2 = -k \underline{\xi}_2 - k'(\underline{\xi}_2 - \underline{\xi}_1) - j\omega \lambda \underline{\xi}_2$ . On parvient sans difficulté à isoler  $\underline{\xi}_1$  de ce système : les courbes  $A_1(f)$  de l'énoncé ne doivent donc être rien d'autre que les représentations linéaire et logarithmique du module de  $\underline{\xi}_1$  en fonction de la fréquence  $f = \omega/(2\pi)$ . Il ne reste qu'à exploiter ces courbes en relation avec ça. Commençons par exploiter les résonances. Comme les frottements sont faibles, il est raisonnable d'approcher les valeurs des fréquences de résonance  $f'$  et  $f''$  par celles pour  $\lambda = 0$  et qui annulent le dénominateur de  $\underline{\xi}_1$ . Elles sont donc telles que  $(k + k' - m\omega^2)^2 \simeq k'^2$  soit  $k + k' - m\omega^2 = \pm k'$  d'où  $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m}}$  et  $\omega'' = \sqrt{\frac{k+2k'}{m}}$ . Ainsi,  $\frac{k}{m} = 4\pi^2 f'^2 = 49,5 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$  et  $\frac{k'}{m} = 2\pi^2 (f''^2 - f'^2) = 101 \text{ rad}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ . On peut valider cette approche avec  $\lambda = 0$  en considérant la fréquence d'anti-résonance qui annule le numérateur de  $\underline{\xi}_1$  et ces deux valeurs numériques de  $k/m$  et  $k'/m$  :  $f_{ar} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k+k'}{m}} \simeq 1,95 \text{ Hz}$ . C'est parfaitement cohérent avec le relevé précédent ! On peut accéder à la valeur de  $F_1/m$  en envisageant, par exemple, l'asymptote aux valeurs de  $\omega$  élevées manifestement affine sur la représentation logarithmique. En haute fréquence,  $\underline{\xi}_1 \simeq -\frac{F_1}{m\omega^2} \exp j\omega t$  donc, en pensant bien à passer en variable  $f$ , l'asymptote en représentation logarithmique est bien affine, de pente  $-2$  (en raisonnant avec les logarithmes décimaux des valeurs écrites sur les axes) et d'ordonnée pour  $f = 10^0 \text{ Hz}$  valant  $\frac{F_1}{4\pi^2 m} = 0,25 \text{ cm}$  donc  $\frac{F_1}{m} \simeq 0,10 \text{ m}$ . On peut contrôler ce résultat en vérifiant la valeur de l'amplitude  $A_1$  à fréquence nulle ( $A_1(0) \simeq 0,12 \text{ cm}$  sur le graphique de gauche) :  $A_1(0) = \frac{k+k'}{(k+k')^2 - k'^2} F_1$  soit  $A_1(0) = \frac{k/m+k'/m}{(k/m+k'/m)^2 - (k'/m)^2} \frac{F_1}{m} \simeq 0,12 \text{ cm}$  avec les valeurs numériques de  $k/m$ ,  $k'/m$  et  $F_1/m$  évaluées précédemment. Cela colle ! Pour accéder à  $\lambda/m$ , on peut par exemple exploiter l'amplitude  $A_{1,\max} \simeq 0,70 \text{ cm}$  à la première résonance, telle que  $A_{1,\max} = \left| \frac{k+k'-m\omega'^2 + j\omega'\lambda}{(k+k'-m\omega'^2 + j\omega'\lambda)^2 - k'^2} \right| F_1$  soit  $A_{1,\max} = \left| \frac{1+j\omega'\lambda/k'}{(k'+j\omega'\lambda)^2 - k'^2} \right| F_1$ . Les frottements étant faibles,  $\omega'\lambda \ll k'$  et on parvient à  $A_{1,\max} \simeq \frac{F_1/m}{2\omega'\lambda/m}$  donc  $\frac{\lambda}{m} = \frac{F_1/m}{2A_{1,\max} \sqrt{k'/m}} \simeq 1,0 \text{ s}^{-1}$ . Vous pouvez vérifier sans difficulté qu'une telle valeur permet de retrouver les amplitudes à l'anti-résonance et à la seconde résonance. La masse  $m$  n'est pas estimable car les équations différentielles des mouvements, divisées par  $m$ , montrent que ce sont les facteurs  $k/m$ ,  $k'/m$ ,  $\lambda/m$  et  $F_1/m$  qui pilotent l'évolution des déplacements des masses !

**34. Rebonds d'une balle**

Réponses : l'application de la relation de la Dynamique dans le référentiel terrestre donne  $\ddot{y} = -g$  et  $\ddot{x} = 0$  d'où pour le premier rebond  $\dot{y} = v_{1y} - gt$  et  $\dot{x} = v_{1x}$ , au sommet de la première parabole, on a  $t_s = \frac{v_{1y}}{g}$ , la durée correspondant à la portée est donc  $2\frac{v_{1y}}{g}$ , la distance parcourue est donc obtenue par  $L_1 = v_{1x}2t_s = v_{1x}\frac{2v_{1y}}{g}$ , la distance parcourue par la balle sur le premier rebond est donc  $L_1 = \frac{2v_{1x}v_{1y}}{g}$ , pour le second rebond il suffit d'atténuer les vitesses des facteurs  $\eta_x$  et  $\eta_y$ , on arrive à  $L_2 = \frac{2v_{1x}v_{1y}}{g}\eta_x\eta_y$ , la distance totale est  $L^* = \frac{2v_{1x}v_{1y}}{g}(1 + \eta_x\eta_y + (\eta_x\eta_y)^2 + \dots)$ , on affine à la somme des termes d'une suite géométrique qui converge puisque sa raison vérifie  $\eta_x\eta_y < 1$ , on obtient  $L^* = \frac{2v_{1x}v_{1y}}{g} \frac{1}{1-\eta_x\eta_y}$ , la durée correspond à la somme des durées  $t^* = \frac{2v_{1y}}{g}(1 + \eta_y + \eta_y^2 + \dots)$ , on trouve  $t^* = \frac{2v_{1y}}{g} \frac{1}{1-\eta_y}$  ; on trouve  $v_{1x} = \frac{L^*}{t^*} \frac{1-\eta_x\eta_y}{1-\eta_y}$  et  $v_{1y} = \frac{gt^*}{2}(1 - \eta_y)$ ,  $v_{1x} = 2,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $v_{1y} = 0,48 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\tan \alpha_i = \frac{v_{iy}}{v_{ix}}$  est indépendant de  $i$  puisque  $\eta_x = \eta_y$ , on trouve  $\alpha_i = 77^\circ$ .

**35. Pantographe d'un train**

Réponses :  $M$  est soumise à son poids  $Mg\vec{e}_z$ , la force du ressort  $k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z$ , la force des frottements visqueux  $-c\dot{z}\vec{e}_z$  et enfin à la force  $R\vec{e}_z$ ,  $M\ddot{z} = Mg + k(\ell - \ell_0) - c\dot{z} + R$ , à l'équilibre sans contact avec le fil électrique, on a  $0 = Mg + k(\ell_{eq} - \ell_0)$ , la longueur à l'équilibre du ressort est donc  $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$ , en soustrayant ces deux équations, on arrive à  $M\ddot{z} = k(\ell - \ell_{eq}) - c\dot{z} + R$ , on a  $\ell + z + h = \ell_{eq}$  d'où  $\ell - \ell_{eq} = -(z + h)$ ,  $\ddot{z} + \frac{c}{M}\dot{z} + \omega^2 z = -\omega^2 h + \frac{R}{M}$ ,  $z(t) = a \sin Kvt = a \sin \Omega t$  et  $\ddot{z} = -a\Omega^2 \sin \Omega t$  d'où  $R = M\omega^2 \left[ h + a(1 - \frac{\Omega^2}{\omega^2}) \sin \Omega t \right]$ ,  $a < h$  rend sans intérêt le cas  $\xi < 1$ , on suppose  $\xi > 1$ , le moment critique correspond à  $\sin \Omega t = 1$ , la condition est  $\xi_c = 1 + \frac{h}{a}$ , si  $\xi > \xi_c$  le contact est perdu, dans le cas précédent le cas critique correspond à  $(1 - \xi)^2 = \frac{h^2}{a^2}$ , on constate que  $\varepsilon\xi^2 > 0$ , la valeur critique sera atteinte plus tôt.



### 36. Évolution de la vitesse d'un mobile

Réponses : on a  $m \frac{dv}{dt} = F(t)$  qui donne en intégrant  $v_1 - v_0 = \frac{1}{m} \int_0^{t_1=7\text{s}} F(t) dt$ . L'intégrale correspond à l'aire sous la courbe  $\int_0^{t_1=7\text{s}} F(t) dt = 12,5 \text{ N} \cdot \text{s}$ . Après application numérique, on trouve  $v_1 = 3,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , c'est la réponse d).

### 37. Tube lanceur de billes

Réponses : la vitesse de la bille au bas du tube est horizontale, elle s'obtient en écrivant la conservation de l'énergie mécanique  $\frac{1}{2}mv_0^2 = mg2R$ , on a  $v_0^2 = 4gR$ . Ensuite, l'accélération de la bille est  $\ddot{z} = -g$ , donc on a  $z = -\frac{1}{2}gt^2$  et  $x = v_0 t$  d'où une équation de la trajectoire  $z = -\frac{g}{2v_0^2}x^2$ . On en déduit que  $H = \frac{g}{2v_0^2}D^2$  d'où la relation  $RH = \frac{1}{8}D^2$ , le graphique est donc une droite passant par l'origine pour  $RH = f(D^2)$ , c'est la réponse d).

### 38. Guimbarde

Réponses : un oscillateur amorti possède une équation canonique  $\ddot{p} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{p} + \omega_0^2 p = 0$  si  $p$  est la surpression liée à l'onde sonore produite par la guimbarde. L'équation caractéristique est donc  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ . Les racines de cette équation sont  $r = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$ . Les solutions sont donc de la forme  $p = p_m \exp -\frac{\omega_0 t}{2Q} \cos(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}t + \varphi)$ . Si l'on prend la tangente à la courbe enveloppe de l'amplitude maximale, cette tangente coupe l'asymptote qui est l'axe des abscisses à la date  $t = \tau$  qui est le temps caractéristique de  $\exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}$ . On a donc  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{Q}{\pi f_0}$ . On en déduit l'expression du facteur de qualité  $Q = \pi f_0 \tau$ . Sur le graphique, on lit  $\tau \simeq 1 \text{ s}$ , on en déduit que  $Q \simeq 638$ . On retiendra donc la réponse d).

### 39. Oscillateur sur profil cylindrique

Réponses :  $\frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 - mga \sin \theta + 2ka^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} = Cte$ ;  $\tan \theta_{\text{éq}} = \frac{mg}{ka}$ ;  $\ddot{\epsilon} + \frac{2kg}{\sqrt{k^2 a^2 + m^2 g^2}} \epsilon = 0$ .

### 40. Mouvement d'un point dans un cône

Réponses : Les forces appliquées au point matériel sont son poids et la réaction du support qui coupe l'axe  $Oz$ . On peut donc écrire avec profit le théorème du moment cinétique projeté sur l'axe  $Oz$  dans le référentiel galiléen d'étude :  $\frac{dL_{Oz}}{dt} = 0$ . On en déduit que  $L_{Oz}$  est une constante du mouvement qui constitue une intégrale première du mouvement (ne fait intervenir que des dérivées premières au maximum des paramètres cinématiques). Puisque, en coordonnées cylindriques,  $\vec{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$  alors  $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$ . Ainsi,  $L_{Oz} = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_z$  donne  $r^2\dot{\theta} = \frac{L_{Oz}}{m} = Cte$ . Cette relation impose notamment que le signe de  $\dot{\theta}$  reste toujours le même pour des conditions initiales données : la rotation du point matériel dans le cône se fait toujours dans le même sens. Le mouvement ayant lieu sans travail d'action non conservative (pas de frottements notamment), l'énergie mécanique se conserve :  $\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 + mgz = Cte'$  soit  $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2) + mgz = \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgz_0$ . On remplace  $r$  par  $z \tan \alpha$ ,  $\dot{r}$  par  $\dot{z} \tan \alpha$  et  $\dot{\theta}$  par  $\frac{L_{Oz}}{m r^2}$ .

Alors, on en déduit l'équation demandée avec  $f(z) = (\frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha})^2 \frac{1}{z^2} + 2gz$ . Dans l'équation intégrale première de la question précédente, le terme  $(1 + \tan^2 \alpha) \dot{z}^2$  est positif ou nul. Alors, le mouvement n'est possible que si  $f(z) \leq 2\frac{\mathcal{E}_0}{m}$ . Pour mieux visualiser cette condition, on doit tracer  $f(z)$  en notant que  $f(z)$  est extrémale en  $z = z_1 = \left[ \frac{1}{g} \frac{L_{Oz}^2}{m \tan^2 \alpha} \right]^{1/3}$  (expression obtenue après traduction de  $f'(z_1) = 0$ ). Voir le tracé de la figure 4.

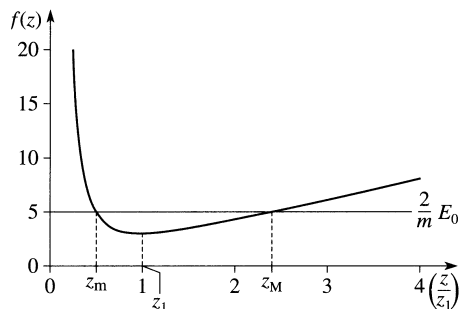


FIGURE 4 – Point en mouvement dans un cône

On note que le mouvement a lieu entre les deux plans  $z = z_m$  et  $z = z_M$  vérifiant  $f(z) = 2\mathcal{E}_0/m$ . On remarque que si  $2\frac{\mathcal{E}_0}{m} = f(z_1)$ ,  $z = z_1$  reste constant et le mouvement est circulaire de rayon  $r_0$ . Cela correspond à

$\mathcal{E}_0 = \frac{3}{2} m \left[ g \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right]^{2/3}$  et  $r_0 = z_1 \tan \alpha = \left[ \frac{1}{g} \frac{L_{Oz}}{m \tan \alpha} \right]^{1/3} \tan \alpha$ . On peut simplifier cette expression en notant que pour le mouvement circulaire,  $L_{Oz} = m r_0 v_0$ , d'où  $r_0 = \frac{v_0^2}{g} \tan \alpha$ . On peut retrouver ce rayon  $r_0$  en partant de la relation fondamentale de la dynamique pour un mouvement circulaire :  $m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R}$  avec  $\vec{a} = -r_0 \dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r_0 \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ . En projection sur  $\vec{e}_z$  et sur  $\vec{e}_r$ , on tire respectivement (en notant  $R$  le module de la réaction)  $0 = R \sin \alpha - m g$  et  $-m r_0 \dot{\theta}^2 = -R \cos \alpha$ . Il ne reste qu'à éliminer  $R$  pour obtenir à nouveau l'expression de  $r_0$ .

**41. Voiture ralentie par l'air**

Réponses : À la vitesse maximale, la puissance du moteur compense la puissance de la force de résistance due à l'air :  $P = m h_x v_m^3$  d'où  $h_x = \frac{P}{m v_m^3} = 9,6 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$ . La relation de la dynamique multipliée par la vitesse  $v$  donne  $m v \frac{dv}{dt} = P - m h_x v^3$  d'où la relation demandée après factorisation par  $P$ . On multiplie encore par  $v$  :  $m v^2 \frac{dv}{dt} = P \frac{dx}{dt} \left( 1 - \left( \frac{v}{v_m} \right)^3 \right)$ , on obtient l'équation différentielle  $dx = \frac{m}{P} \frac{v^2 dv}{1 - \left( \frac{v}{v_m} \right)^3}$ . Par intégration, on obtient  $x = -\frac{m v_m^3}{3P} \ln \left( 1 - \left( \frac{v}{v_m} \right)^3 \right)$ . On pose  $\varepsilon \ll 1$  tel que  $v = v_m(1 - \varepsilon)$ , on trouve  $x_1 = -\frac{1}{3h_x} \ln 3\varepsilon = 1,2 \text{ km}$ . Si on coupe le moteur, on a  $\frac{dv}{dt} = -h_x v^2$  d'où  $\frac{1}{v} - \frac{1}{v_m} = h_x t$  et donc  $v = \frac{v_m}{1 + v_m h_x t} = \frac{dx}{dt}$ , ce qui donne par intégration  $x = \frac{1}{h_x} \ln(1 + h_x v_m t)$ .

**42. Un sablier sur une balance**

Réponses :  $\ell_{eq} = \ell_0 - \frac{m_p g}{k}$ ,  $\ell_m = \ell_0 - \frac{(m_p + m_a + m)g}{k}$  d'où  $I = \frac{A g}{k} (m_a + m)$ , le tarage consiste à faire en sorte que  $I = 0$  lorsque  $m_a + m_p$  est nulle, soit  $G$  le centre d'inertie du sablier et du sable  $(m_a + m) \vec{OG} = m_a \vec{OG}_a + m(1 - \alpha(t)) \vec{OG}_1 + m\alpha(t) \vec{OG}_2$ ,  $(m_a + m) \vec{OG} = m_a \vec{OG}_a + m \vec{OG}_1 + m\alpha(t) \vec{G}_1 \vec{G}_2$  et donc  $\vec{a}_G = -\frac{m}{m_a + m} h \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \vec{e}_z$ ,  $I = \frac{A g}{k} \left[ (m_a + m) - m \frac{h}{g} \frac{d^2 \alpha}{dt^2} \right]$ , si l'écoulement du sable est tel que le centre d'inertie du sable a un mouvement accéléré du haut vers le bas, alors l'indication de la balance n'est plus proportionnelle à la masse  $(m_a + m)$ , mais dans un sablier l'écoulement est relativement régulier, on peut donc penser qu'on sera assez proche de la situation où  $\frac{d^2 \alpha}{dt^2} \simeq 0$  et l'indication de la balance sera la même pendant l'écoulement que lorsque tout le sable se situe en bas du sablier.

**43. Oscillations d'une branche**

Réponses :  $K = 253 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $E_{pot} = \frac{1}{2} K y_f^2$ , l'énergie cinétique sera  $E_c = \int_0^L \frac{1}{2} m \frac{dx}{L} \left( \frac{x}{L} \dot{y}_f \right)^2$  en supposant la forme de la branche linéaire et non courbée, on a donc  $E_c = \frac{1}{6} M \left( \frac{dy_f}{dt} \right)^2$ , l'énergie mécanique est constante, en la dérivant on obtient l'équation différentielle du mouvement  $\ddot{y}_f + \frac{3K}{M} y_f = 0$ , la fréquence propre est  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3K}{M}}$  avec  $M = \rho h b L = 1,44 \text{ kg}$  d'où  $f_0 = 3,6 \text{ Hz}$ , avec les phénomènes dissipatifs, l'énergie mécanique vérifie  $\frac{dE_m}{dt} = -\lambda \dot{y}_f \vec{e}_y \cdot \dot{y}_f \vec{e}_y$ , l'équation différentielle prend la forme proposée avec toujours  $\omega_0 = \sqrt{\frac{3K}{M}}$  et  $Q = \frac{\sqrt{3KM}}{\lambda}$ , le régime critique est obtenu pour  $\Delta = 0$  donc pour  $Q = \frac{1}{2}$ , la solution est alors  $y_f = (At + B) \exp -\frac{\omega_0 t}{2Q}$ ,  $A$  et  $B$  déterminées par les conditions initiales, c'est le régime qui permet le retour le plus rapide à la position d'équilibre, on passe en complexes et on écrit  $[(\omega_0^2 - \omega^2) + j \frac{\omega \omega_0}{Q}] y_f = A$  d'où une amplitude  $y_{f,m} = \frac{|A|}{\sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$ , il y a résonance  $P(\omega) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}$  passe par un minimum, or  $Q = \frac{1}{2}$  d'où  $P(\omega) = (\omega^2 + \omega_0^2)^2$ ,  $P(\omega)$  est une fonction monotone croissante de  $\omega$ , il n'y a pas de résonance.

**44. Cerceau qui décolle**

Réponses : on repère le point de départ par l'angle  $\theta_0$  évalué par rapport à l'axe vertical  $Oz$  orienté vers le haut. On a  $h = R(1 + \cos \theta_0)$ . On étudie le mouvement de chaque masse soumise à leur poids  $m \vec{g}$  et à la réaction  $\vec{N}_A = N_A \vec{e}_r$  du cerceau dans le référentiel terrestre galiléen qui est aussi celui du cerceau tant qu'il ne décolle pas. On a  $m(-R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + R\dot{\theta} \vec{e}_\theta) = m \vec{g} + \vec{N}_A$ . On obtient  $R\dot{\theta} = g \sin \theta$  et  $N = m(g \cos \theta - R\dot{\theta}^2)$ . En intégrant la première équation - après multiplication par  $\dot{\theta}$  - on obtient  $R\dot{\theta}^2 = 2g(\cos \theta_0 - \cos \theta)$ . On a  $N = mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0)$ . On étudie le cerceau. Le cerceau subit son poids  $M \vec{g}$ , les actions du sol  $\vec{N}_s$  et celles des deux masses  $-\vec{N}_A$  et  $-\vec{N}_B$ . La relation de la dynamique est alors  $M \vec{a}_G = M \vec{g} + \vec{N}_s - \vec{N}_A - \vec{N}_B$ . On projette la relation de la dynamique sur l'axe  $Oz$  pour le cerceau en utilisant la symétrie de la situation des deux masses  $m$ . On obtient  $M \ddot{z}_G = -Mg + N_s - (\vec{N}_A + \vec{N}_B) \cdot \vec{e}_z$ . On trouve  $M \ddot{z}_G = -Mg + N_s - 2mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \cos \theta$ . Le cerceau reste immobile jusqu'à ce le décollage du support se produise, on a  $\ddot{z}_G = 0$ . Tant que  $N_s > 0$ , le cerceau reste au contact du sol, il faut donc arriver à la condition  $N_s = 0$  avec l'expression  $N_s = Mg + 2mg(3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \cos \theta$ . Trouver  $N_s = 0$  revient à résoudre  $3 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta_0 \cos \theta + \frac{M}{2m} = 0$ , le discriminant réduit est  $\Delta' = \cos^2 \theta_0 - \frac{3M}{2m}$ .

Pour qu'il y ait des solutions, il faut que  $\Delta' > 0$ . Il faut donc que la masse des bagues vérifie  $m \geq \frac{3M}{2m \cos^2 \theta_0}$ . Il y a alors deux solutions mais la première est celle où l'angle  $\theta_d$  est le plus petit des deux. On a alors  $\cos \theta_d = \frac{1}{3}(\cos \theta_0 + \sqrt{\cos^2 \theta_0 - \frac{3M}{2m}})$ . Le cas  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  génère  $N_s = g(M + 6m \cos^2 \theta)$  qui ne peut jamais s'annuler. On a  $\dot{\theta} = \sqrt{\frac{2g}{R}}(1 - \cos \theta)^{1/2}$  et  $1 - \cos \theta = 2 \sin^2 \frac{\theta}{2}$  ce qui permet d'aboutir à  $\frac{d\theta}{\sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\tau} dt$  avec  $\tau = \sqrt{\frac{R}{2g}}$ . On trouve donc que  $t_d = \frac{\tau}{\sqrt{2}} \ln \frac{\tan \frac{\theta_d}{4}}{\tan \frac{\theta_0}{4}}$ .

#### 45. Mouvement d'une chaîne sur une table

Réponses : on se place dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  du laboratoire. Il n'y a pas de frottements donc l'énergie mécanique de la chaîne est forcément constante. Chaque point de la chaîne a la même vitesse (inextensibilité) donc son énergie cinétique vaut  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ . On note  $x$  la longueur de la chaîne qui pend. Seul le poids de cette partie de la chaîne travaille et il est appliqué en son milieu donc l'énergie potentielle associée est  $\mathcal{E}_p = -(\frac{m}{d} x g) \frac{x}{2} + \text{Cte}$ . Puisque  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{Cte}'$ , on tire  $\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} m \frac{g}{d} x^2 = \text{Cte}'$ . On dérive cette relation en éjectant le cas  $\dot{x} = 0$  impossible, d'où  $\ddot{x} = \frac{g}{d} x$ . Il s'agit de l'équation d'un oscillateur instable en  $x = 0$ , ce qui est logique. La chaîne glisse en accélérant sa chute à cause du poids de sa partie pendante de plus en plus important. Avec les conditions initiales, on trouve  $x(t) = b \text{ch}(\sqrt{\frac{g}{d}} t)$ . On utilise le PFD sur la chaîne dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  du laboratoire :  $m \vec{a}(G) = m \vec{g} + \vec{R}$ . On introduit  $J$ , milieu de  $[AO]$  partie de la chaîne sur la table, où  $A$  a pour coordonnées  $(0, -d + x)$ . Alors,  $m \vec{OG} = \frac{m}{d} (x \vec{OI} + (d-x) \vec{OJ})$  soit  $m \vec{OG} = \frac{m}{2d} (x^2 \vec{e}_x - (d-x)^2 \vec{e}_y)$ . On dérive deux fois pour en déduire l'accélération de  $G$  et le PFD donne par conséquent les projections  $\frac{m}{d} (\dot{x}^2 + x \ddot{x}) = R_x + m g$  et  $\frac{m}{d} (-x^2 + (d-x) \ddot{x}) = R_y$ . En remplaçant  $x(t)$  de la question précédente, on obtient après calcul  $R_x = m g \left[ \frac{b^2}{d^2} (2 \text{ch}^2 [\sqrt{\frac{g}{d}} t] - 1) - 1 \right]$  et  $R_y = m g \left[ \frac{b}{d} \text{ch} [\sqrt{\frac{g}{d}} t] - \frac{b^2}{d^2} (2 \text{ch}^2 [\sqrt{\frac{g}{d}} t] - 1) \right]$ . Il ne faut pas s'étonner que  $R_y \neq 0$  même si l'on n'y a pas de frottements. Cela est dû à l'effet du bord  $O$  de la table qui exerce une action non verticale, ce qui explique que le centre de masse de la chaîne ait une composante de déplacement sur  $(Oy)$ . Le modèle proposé est critiquable au moins à partir du moment où la réaction s'annule car cela veut dire qu'alors la chaîne décolle.

### C. Référentiels non galiléens

#### 46. Plateau oscillant

Réponses : on écrit la relation de la Dynamique appliquée à la bille dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Les forces subies par la bille ne sont pas nombreuses puisqu'il y a le poids  $m\vec{g}$  et la réaction  $\vec{R}$  exercée par le plateau sur l'objet. On note  $\ddot{z}$  l'accélération du plateau en bois. Tant que la bille reste au contact du plateau, on a l'accélération de la bille  $a_{bi} = \ddot{z}$ . Lorsqu'elle décolle, son accélération sera différente du plateau mais alors  $R = 0$ . Au moment où le décollage se produit, on a, à la fois,  $R = 0$  et  $a_{bi} = \ddot{z}$ . La relation de la Dynamique donne  $m\ddot{z} = -mg + R$ . En choisissant habilement la date  $t = 0$ , on peut représenter l'abscisse  $z$  du plateau par  $z(t) = A \cos \omega t$ . On a donc  $\ddot{z} = -\omega^2 A \cos \omega t$ . La réaction du plateau en bois sur la bille en verre est donc  $R = m(g - A\omega^2 \cos \omega t)$ . On voit que  $R = 0$  est possible mais il faut pour cela que  $A\omega^2 \geq g$  et ensuite cela se produit à une date  $t$  telle que  $\cos \omega t = \frac{g}{A\omega^2}$ . La condition pour que la bille décolle ne porte donc ni sur sa masse, ni sur son rayon, ni sur le coefficient de frottement entre le plateau et la bille. La réponse est d).

#### 47. Pendule embarqué

Réponses : sur la partie horizontale, le véhicule subit son poids et la réaction normale au plan puisqu'il n'y a pas de frottement, il n'y a pas d'accélération verticale donc le poids compense la composante normale, il n'y a pas de force horizontale sur le véhicule donc sa vitesse est constante sur l'horizontale, le véhicule constitue un référentiel galiléen, le pendule est étudié dans le référentiel galiléen constitué par le véhicule, il subit son poids et la force de la tension du fil qui le tient. Ces deux forces sont verticales puisqu'aucun mouvement du pendule n'a été provoqué, le pendule reste vertical ; lorsque le véhicule monte le plan incliné, il constitue un référentiel non galiléen puisqu'il est décéléré, son accélération est  $a_x = -g \sin \alpha$  en projetant la relation de la Dynamique appliquée au véhicule dans le référentiel terrestre galiléen  $M\vec{a}_M = M\vec{g} + \vec{N}$ , on projette sur l'axe  $Ox$  appartenant au plan incliné et orienté vers le haut, le pendule subit en plus de son poids et de la tension du fil, la force d'inertie d'entraînement (pas de force de CORIOLIS puisque  $\vec{\omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} = \vec{0}$ ), la force d'inertie d'entraînement est  $\vec{f}_{i,ent} = -m\vec{a}_{ent} = mg \sin \alpha \vec{e}_x$ , on a  $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} + mg \sin \alpha \vec{e}_x$  avec  $\vec{a} = \vec{0}$  puisqu'aucun mouvement n'est provoqué pour le pendule, si l'on imagine le pendule incliné d'un angle  $\theta$  par rapport à la direction normale au plafond du véhicule, la relation de la Dynamique devient  $\vec{0} = -mg \sin \alpha \vec{e}_x - mg \cos \alpha \vec{e}_y + T \sin \theta \vec{e}_x + T \cos \theta \vec{e}_y + mg \sin \alpha \vec{e}_x$ , on trouve donc que  $T \sin \theta = 0$  d'où  $\sin \theta = 0$  et par conséquent  $\theta = 0$  et  $T = mg \cos \alpha$ , le pendule est encore une fois perpendiculaire au plafond.

**48. Oscillateur dans un véhicule**

Réponses : on écrit la relation de la dynamique dans le référentiel non galiléen  $\mathcal{R}'$  attaché au véhicule qui possède une accélération  $\vec{a} = a\vec{e}_x$  par rapport au référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  considéré comme galiléen. On note  $\ell_1$  et  $\ell_2$  les longueurs des ressorts à l'équilibre, on a donc  $\ell_1 + \ell_2 = L$  la longueur du véhicule. Soient  $\ell_{10}$  et  $\ell_{20}$  les deux longueurs à vide de chaque ressort. Lorsque la masse se déplace de  $x$  par rapport à sa position d'équilibre dans le référentiel  $\mathcal{R}'$ , on peut écrire les forces exercées par les ressorts  $\vec{f}_1 = -k_1(\ell_1 + x - \ell_{10})\vec{e}_x$  et  $\vec{f}_2 = k_2(\ell_2 - x - \ell_{20})\vec{e}_x$ . La force d'inertie d'entraînement est  $-ma\vec{e}_x$ . On écrit la relation de la Dynamique  $m\ddot{x}\vec{e}_x = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 - ma\vec{e}_x$ . On obtient l'équation différentielle scalaire suivante :  $\ddot{x} + \frac{k_1+k_2}{m}x = \frac{k_2}{m}(\ell_2 - \ell_{20}) - \frac{k_1}{m}(\ell_1 - \ell_{10}) - a$ . La pulsation des oscillations est donc telle que l'équation puisse s'écrire  $\ddot{x} + \omega_0^2x = \omega_0^2x_{eq}$ . La position  $x_{eq}$  autour de laquelle s'effectuent les oscillations dépend de l'accélération du véhicule  $a$ . Par contre, la fréquence des oscillations n'en dépend pas :  $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ . Réponse a).

**49. Freinage brutal d'une voiture**

Réponses : le mouvement de voiture s'effectue à décélération constante  $\ddot{x} = -\gamma$ , la vitesse est  $\dot{x} = v_0 - \gamma t$  et la position  $x = v_0t - \frac{1}{2}\gamma t^2$  si au début du freinage  $x = 0$ , la voiture s'arrête à la date  $t_a = \frac{v_0}{\gamma}$  d'où  $\gamma = \frac{v_0}{t_a} = 13,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , l'enfant n'est pas heurté s'il se situe à  $d > d_{min}$  avec  $d_{min} = \frac{1}{2}v_0t_a = 7 \text{ m}$ ;  $F_{ent} = m\gamma = 973 \text{ N}$  à comparer à son poids qui est  $mg = 686 \text{ N}$ , la ceinture est indispensable pour ne pas heurter le volant avec une accélération supérieure à la pesanteur.

**50. Démarrage d'un camion**

Réponses :  $N = mg$ ,  $m\ddot{x} = m\gamma - T$  avec  $Ox$  orienté vers l'arrière du camion, glissement donc  $T = fN = fmg$  d'où  $\ddot{x} = \gamma - fg$ ;  $fg < \gamma$  pour avoir  $\ddot{x} > 0$ ;  $t_c$  telle que  $\ell - \frac{a}{2} = \frac{1}{2}(\gamma - fg)t_c^2$ ;  $d = \frac{\gamma}{\gamma - fg}(\ell - \frac{a}{2})$ .

**51. Un élastique qui se dilate**

Réponses : sous l'effet de la force d'inertie d'entraînement l'élastique va se dilater, son rayon va augmenter. La force d'inertie de CORIOLIS va agir pendant le régime transitoire en provoquant des déformations qui vont s'amortir parce que l'élastique est forcément siège de phénomènes dissipatifs liés à sa déformation qui ne sont pas pris en compte. On tend vers un élastique toujours dans une conformation circulaire, par invariance autour de l'axe  $Oz$ , de rayon supérieur au rayon initial :  $r > r_0$ . On considère un morceau d'élastique compris entre les angles  $\theta$  et  $\theta + d\theta$ , de masse  $dm = \frac{m}{2\pi}d\theta$ . Ce système subit une force  $\vec{F}_1 = -k2\pi(r - r_0)\vec{e}_\theta(\theta)$  à droite et une force  $\vec{F}_2 = k2\pi(r - r_0)\vec{e}_\theta(\theta + d\theta)$ . On écrit, dans le référentiel terrestre supposé galiléen,  $dm\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$  pour arriver à  $\vec{a} = \frac{k4\pi^2}{m}(r - r_0)\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} = -\frac{k4\pi^2}{m}(r - r_0)\vec{e}_r$ . Or,  $\vec{a} = -\omega^2r\vec{e}_r$ . On en déduit que  $r = \frac{r_0}{1 - \frac{m\omega^2}{k4\pi^2}}$  comme nouvelle valeur du rayon de l'élastique. On note que  $r$  augmente bien lorsque  $\omega$  augmente. La situation particulière  $\omega = \omega_c = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$  ne se produira pas parce que cela fera longtemps que l'élastique soit cassé ou bien que des non-linéarités dans son élasticité seront entrées en jeu et que le rayon se sera stabilisé, il est plus vraisemblable que l'élastique soit cassé. On peut retrouver le résultat précédent en se plaçant dans le référentiel non galiléen tournant à la vitesse  $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_z$ . Dans ce référentiel, il y a deux énergies potentielles à prendre en compte. L'énergie potentielle élastique  $\frac{1}{2}k(2\pi(r - r_0))^2$  mais aussi l'énergie potentielle associée à la force d'inertie d'entraînement. Pour une masse  $m'$ , la force d'inertie d'entraînement est  $\vec{f}_{i,ent} = m'\omega^2r\vec{e}_r = -\frac{dE_p}{dr}\vec{e}_r$  d'où avec un choix de constante librement choisi, on trouve  $E_p = -\frac{1}{2}m'\omega^2r^2$ . L'énergie potentielle totale est  $E_{p,tot} = \frac{1}{2}k4\pi^2(r - r_0)^2 - \frac{1}{2}m\omega^2r$ . Lorsque l'élastique atteint son régime permanent qui est un état d'équilibre dans le référentiel non galiléen, on a  $\frac{dE_{p,tot}}{dr} = 0$ . Le calcul de la dérivée conduit à la même expression de  $r$  que celle trouvée avant.

**52. Déviation vers l'Est**

Réponses : la masse est soumise à son poids  $-mg\vec{e}_z$ , à des frottements fluides avec l'air qui sont négligés, à la force de CORIOLIS car, rappelons-le, le poids d'un corps prend déjà en compte la force d'inertie d'entraînement ;  $m\vec{a} = -mg\vec{e}_z + \vec{F}_{Cor}$  avec  $\vec{F}_{Cor} = -2m\vec{\omega} \wedge \vec{v}$  où  $\vec{\omega} = \frac{2\pi}{T_{si}}(\cos\lambda\vec{e}_y + \sin\lambda\vec{e}_z)$  est la vitesse de rotation de la Terre sur elle-même, la durée de cette rotation est le jour sidéral  $T_{si} = 86164 \text{ s}$  elle est souvent confondue avec le jour solaire  $T_{so} = 86400 \text{ s}$ , on trouve  $\ddot{x} = 2\omega(\dot{y}\sin\lambda - \dot{z}\cos\lambda)$ ,  $\ddot{y} = -2\omega\dot{x}\sin\lambda$  et  $\ddot{z} = -g + 2\omega\dot{x}\cos\lambda$ ;  $\dot{z} = -g$ ,  $\dot{x} = -gt$ ,  $z = h - \frac{1}{2}gt^2$ ; l'accélération la plus grande est sur l'axe  $\vec{e}_z$ ;  $\ddot{x} \simeq -2\omega\cos\lambda\dot{z}$  d'où  $\dot{x} = g\omega\cos\lambda t^2$  et  $x = \frac{1}{3}g\omega\cos\lambda t^3$ , la date  $t_0$  de contact avec le sol est  $t_0 \simeq \sqrt{\frac{2h}{g}}$  et donc  $x(t_0) = \frac{2}{3}\omega\cos\lambda h\sqrt{\frac{2h}{g}}$ ; on trouve  $x(t_0) = 2,8 \text{ cm}$  ce qui correspond à la mesure, on a pendant le même temps une légère déviation vers le Sud  $\ddot{y} = -2\omega^2g\cos\lambda\sin\lambda t^2$  et donc  $y = -\frac{1}{6}\omega^2g\cos\lambda\sin\lambda t^4$  d'où  $y(t_0) = -\frac{2}{3}\frac{\omega^2}{g}\cos\lambda\sin\lambda h^2$ , on trouve  $y = -5 \mu\text{m}$ .

### 53. Glissement et référentiel non galiléen

Réponses :  $a = -(g \sin \alpha + \gamma \cos \alpha)$ ,  $N_2 + m\gamma \sin \alpha = mg \cos \alpha$ ,  $N_1 = Mg + N_2 \cos \alpha$ ,  $M\gamma = N_2 \sin \alpha$ ,  $a = -g \sin \alpha \left( \frac{M+m}{M+m \sin^2 \alpha} \right)$ .

### 54. Tube en rotation

Réponses : La rotation du tube a pour effet de chasser de l'air du tube horizontal (centrifugation) et d'y créer, en régime établi, une dépression. Le liquide monte par conséquent dans le tube vertical. On considère l'air contenu dans le tube horizontal et on se place, en régime établi, dans le référentiel tournant : dans ce référentiel l'air est au repos et on a donc le droit d'écrire la loi de l'hydrostatique  $\vec{0} = -\overrightarrow{\text{grad}} P + \rho \vec{g} + \vec{f}_{ie}$  où  $\vec{f}_{ie}$  est la force volumique d'inertie d'entraînement. On sait que  $\vec{f}_{ie} = \rho \omega^2 x \vec{e}_x$  donc  $\frac{dP}{dx} = \rho \omega^2 x$  par projection sur l'axe horizontal du tube. On considère le cas  $\rho = \rho_0 = \text{Cte}$ . L'intégration avec la condition limite  $P(l) = P_0$  donne  $P(x) = P_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 (l^2 - x^2)$ . On vérifie que la pression diminue bien quand on s'approche de l'axe de rotation. Remarquez que le tube ne doit pas tourner trop vite pour qu'un tel modèle soit acceptable sinon  $P(0)$  pourrait devenir étrangement négative. On peut raisonnablement assimiler l'air à un gaz parfait donc, dans le tube horizontal,  $P = \rho \frac{RT_0}{M}$ . Ainsi,  $\rho = \frac{PM}{RT_0} = \rho_0 \frac{P}{P_0}$  où  $\rho_0 = \frac{P_0 M}{RT_0}$ . Il s'agit donc d'intégrer dans ce cas l'équation  $\frac{dP}{dx} = \rho_0 \omega^2 \frac{P}{P_0} x$ . C'est une équation différentielle à variables séparables :  $\frac{dP}{P} = \frac{\rho_0}{P_0} \omega^2 x dx$ . On trouve  $P(x) = P_0 \exp\left(-\frac{\rho_0 \omega^2}{2P_0} (l^2 - x^2)\right)$  en respectant la condition limite  $P(l) = P_0$ . On remarque que pour  $\frac{\rho_0 \omega^2}{2P_0} l^2 \ll 1$ , on peut linéariser l'exponentielle et on retrouve le résultat de la question précédente. Dans un premier temps, on note que  $\frac{\rho_0 \omega^2}{2P_0} l^2 \simeq 5.10^{-3} \ll 1$  donc on peut se contenter du résultat de la première question pour  $P(x)$ . Dans un second temps, comparons la variation de pression  $\Delta P$  dans l'air sur une hauteur  $H$  à celle ( $P(l) - P(0)$ ) dans le tube horizontal :  $\frac{\Delta P}{P(l) - P(0)} = \frac{\rho_0 g H}{\frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 l^2} \simeq 2.10^{-3} \ll 1$ . Dans ce cas, il est raisonnable de dire que la pression  $P_A$  à la surface libre dans le tube (hauteur  $y$ ) est  $P_A \simeq P_0 - \frac{1}{2} \rho_0 \omega^2 l^2$ . Or, la loi de l'hydrostatique appliqué à l'eau en équilibre dans le référentiel du laboratoire entre un point de sa surface extérieure (sous  $P_0$ ) et un point de la surface libre dans le tube (hauteur  $y$  sous  $P_A$ ) s'écrit  $P_0 - P_A = \mu g y$ . Finalement  $y = \frac{1}{2} \frac{\rho_0 \omega^2 l^2}{\mu g} = 6 \text{ cm}$ .