

Exercices : 18 - Rotation

— Solutions —

1. Anneau de Saturne

Réponses : si l'anneau est solidaire de Saturne alors c'est un solide avec des vitesses qui sont de la forme $v = R\omega$ où pour tout point du solide la vitesse de rotation est ω . On sait qu'en matière d'interaction gravitationnelle qui est centrale, tout mouvement circulaire est uniforme par la conservation du moment cinétique. Si l'on applique la relation de la Dynamique à une particule de l'eau de masse m , on a $-m\omega^2 R\vec{e}_r = -m\frac{v^2}{R}\vec{e}_r = -\frac{GmM_S}{R^2}\vec{e}_r$. On en déduit que si l'anneau est en orbite alors $v^2 = \frac{GM_S}{R}$. C'est la réponse a) qui convient.

2. Énergie cinétique de la Terre

Réponses : l'énergie cinétique de rotation de la Terre sur elle-même est $E_c = \frac{1}{2}J\Omega^2$ avec $J = \frac{2}{5}MR_T^2$ où $\Omega = \frac{2\pi}{1\text{jour}} = 7,3 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Pour le mouvement autour du Soleil, il s'agit d'un mouvement de translation circulaire effectué sur une trajectoire de rayon a à la vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{1\text{an}} = 2 \times 10^{-7} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On a donc $E'_c = \frac{1}{2}M(a\omega)^2$. En raisonnant uniquement pour l'ordre de grandeur, on peut écrire que $\frac{E_c}{E'_c} = \left(\frac{R_T\Omega}{a\omega}\right)^2$. On prend $R_T = 6,4 \times 10^6 \text{ m}$ et $a = 1,5 \times 10^{11} \text{ m}$. On trouve $\frac{R_T\Omega}{a\omega} \simeq 10^{-2}$ et par conséquent : $\frac{E_c}{E'_c} = 10^{-4}$. C'est la réponse c).

3. Monter un trottoir

Réponses : on note I le point de contact entre le monorou et l'angle du trottoir. Au moment où le monorou va débiter son mouvement pour monter le trottoir, le contact entre la roue et le sol horizontal n'existera plus. Il n'y a plus que 3 forces en jeu : le poids du monorou qui s'applique à son centre, la force \vec{F} aussi appliquée au centre et la force de contact \vec{R} appliquée en I . Le mouvement est alors une rotation autour d'un axe horizontal passant par I , on appliquera le théorème du moment cinétique en I . Le monorou montera le trottoir si le moment de la force \vec{F} est supérieur au moment du poids $m\vec{g}$. Le bras de levier pour \vec{F} est $H - R$. Pour le poids, cela demande un peu plus d'attention. On le note d , cette distance est telle que $d^2 + (R - H)^2 = R^2$, ce qui correspond à $d = \sqrt{R^2 - (R - H)^2} = \sqrt{H(2R - H)}$. Le monorou monte donc le trottoir si $F(R - H) \geq Mg\sqrt{H(2R - H)}$.

La force minimale est donc $F_{min} = Mg\frac{\sqrt{H(2R - H)}}{H - R}$. La bonne réponse est d).

4. Balance à fléau

Réponses : la balance est à l'équilibre en position horizontale si les moments des forces exercées à gauche compensent le moment du poids de la masse $2m$ située à droite. À gauche, il y a le poids de la masse m et aussi le poids de la tige de masse m . Le bras de levier pour le poids de la masse m est $\frac{L}{2} + x$, pour le poids de la barre, il s'agit de x . Le bras de levier de $2mg$ est $\frac{L}{2} - x$. On a donc $(\frac{L}{2} + x)mg + mgx = 2mg(\frac{L}{2} - x)$. Cela permet de trouver $x = \frac{L}{8} = 1,25 \text{ m}$ correspondant à la réponse c).

5. Oscillations d'un angle droit

Réponses : $\Delta\ell_{eq} = \frac{mg}{2k}$; $\ddot{\theta} + \frac{3}{4}\left[\frac{g}{\ell} + \frac{2k}{m}\right]\theta = 0$; ellipse.

6. Régulateur

Réponses : le théorème du moment cinétique sur l'axe Δ donne $J\frac{d\omega}{dt} + h\omega = C_0$, $\omega(t) = \frac{C_0}{h}(1 - \exp(-\frac{t}{\tau}))$ avec $\tau = \frac{J}{h}$; on étudie le régime permanent harmonique, on passe en complexes, on obtient $\omega(t) = \frac{C_0}{h}\left(1 + \frac{ah}{\sqrt{J^2\Omega^2 + h^2}}\cos(\Omega t - \varphi)\right)$ avec $\varphi = \arctan\frac{J\Omega}{h}$, on en déduit que $b = \frac{ah}{\sqrt{J^2\Omega^2 + h^2}}$; cette modulation sera d'autant plus faible que J sera élevé, c'est ce qui donne son nom au volant dit d'inertie.

7. Effet d'une poulie

Réponses : $v = R\omega$ et $\gamma = R\frac{d\omega}{dt}$; $m\gamma = mg - T_1$ et $M\gamma = T_2$, le théorème du moment cinétique pour la poulie sur son axe permet d'écrire que $R(T_1 - T_2) = J\frac{d\omega}{dt} = \frac{J}{R}\gamma$, $\gamma = g\frac{m}{m+M+\frac{J}{R^2}}$; $T_2 = mg\frac{M}{m+M+\frac{J}{R^2}}$ et $T_1 = mg\frac{M+\frac{J}{R^2}}{m+M+\frac{J}{R^2}}$; si l'on néglige l'inertie de la poulie, on considère $J = 0$ ou plutôt $\frac{J}{R^2} \ll m + M$, on trouve que $\gamma = g\frac{m}{m+M}$, les tensions exercées par le fil sont les mêmes $T_1 = T_2 = mg\frac{M}{m+M}$, on peut analyser ces résultats comme les précédents en rappelant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie, par conséquent toute l'énergie potentielle de pesanteur perdue par m est convertie en énergie cinétique pour la poulie et M ou bien seulement pour M , les tensions sont T_1 et T_2 sont différentes, c'est leur différence qui met en rotation la poulie.

8. Basculement d'une planche

Réponses : le théorème du moment cinétique conduit à $(J + m\frac{L^2}{4})\ddot{\theta} = mg\frac{L}{2} \cos \theta$. La relation de la Dynamique appliquée à m donne $m\frac{L}{2}\ddot{\theta} = mg \cos \theta - N$ et $-m\frac{L}{2}\dot{\theta}^2 = mg \sin \theta - T$. En intégrant l'expression de $\ddot{\theta}$ ou bien en raisonnant sur l'énergie mécanique, on arrive à $\dot{\theta}^2 = \frac{12m}{M+3m} \frac{g}{L} \sin \theta$. En réécivant l'accélération angulaire, on a $\ddot{\theta} = \frac{6m}{M+3m} \frac{g}{L} \cos \theta$. On en déduit $N = mg \cos \theta \frac{M}{M+3m}$ et $T = mg \sin \theta \frac{M+9m}{M+3m}$. À la limite du glissement, on peut écrire que $T = f_s N$ d'où $f_s = \tan \theta_{gliss}(1 + \frac{9m}{M})$. On trouve $f = 0,30$ et $\dot{\theta}_{gliss} = \sqrt{\frac{12m}{M+3m} \frac{g}{L} \sin \theta_{gliss}} = 3,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

9. Équilibre et petits mouvements

Réponses : la vitesse de la masse m est $v = a\dot{\theta}$, l'énergie cinétique est $E_c = \frac{1}{2}(ma^2 + Ma^2 + J)\dot{\theta}^2$, l'énergie potentielle de pesanteur comporte deux termes (elle est définie à une constante et près) $E_p = -mga\theta + Mga(1 - \cos \theta)$, $(m + M + \frac{J}{a^2})\ddot{\theta} + \frac{Mg}{a} \sin \theta = \frac{mg}{a}$; à l'équilibre $\ddot{\theta} = 0$ d'où $\sin \theta_{eq} = \frac{m}{M}$, si $m > M$ il n'y a pas d'équilibre sinon on a deux positions $\theta_{eq,1} < \frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2} < \theta_{eq,2} < \pi$; $\theta_{eq,1}$ est stable et l'autre instable, on pose $\theta = \theta_{eq,1} + \varepsilon$ et on obtient $\ddot{\varepsilon} + \omega_0^2 \varepsilon = 0$ avec une $\omega_0 = \sqrt{\frac{M}{M+m+\frac{J}{a^2}} \frac{g}{a} \cos \theta_{eq,1}}$.

10. Petit train électrique

Réponses : Le système complet (train et plateau), dans le référentiel \mathcal{R} galiléen du laboratoire, est isolé en moment par rapport à (Oz) (les actions extérieures n'ont pas de moment par rapport à cet axe : poids et action de liaison pivot parfaite) : le moment cinétique L_{Oz} est constant pour ce système. Or, initialement, l'ensemble est immobile donc $L_{Oz} = 0$ (intégrale première du mouvement). Calculons par conséquent le moment cinétique total par rapport à (Oz) . On étudie dans un premier temps le parcours d'un côté AB du carré. Voir le schéma de la figure 1. On note \vec{v} la vitesse du train par rapport au plateau et $\dot{\alpha} \vec{e}_z$ la vitesse angulaire du plateau par rapport au sol.

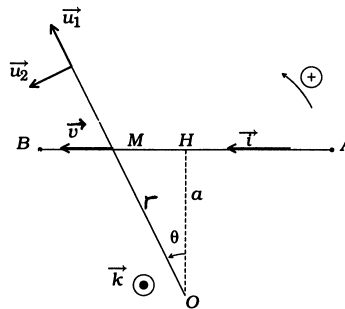


FIGURE 1 – Paramétrage du petit train sur une côté du carré

En décomposant sur chaque sous-système, on a $L_{Oz} = [\vec{OM} \wedge m\vec{v}(\text{train}/\mathcal{R})] \cdot \vec{e}_z + J\dot{\alpha}$ soit $L_{Oz} = [mr u_1 \wedge (v \vec{i} + r \dot{\alpha} \vec{u}_2)] \cdot \vec{e}_z + J\dot{\alpha}$ d'où $L_{Oz} = mrv \cos \theta + mr^2 \dot{\alpha} + J\dot{\alpha}$ donc $L_{Oz} = mav + (J + mr^2)\dot{\alpha}$. Le fait que ce moment cinétique L_{Oz} soit toujours nul donne la relation importante $\dot{\alpha} = -\frac{mav}{J+mr^2}$ (1). On relie alors v à $\theta(t)$: $HM = x = a \tan \theta$ soit $v = \frac{dx}{dt} = \frac{a \dot{\theta}}{\cos^2 \theta}$. Comme $r = a/\cos \theta$, la relation (1) devient avec ce qui précède $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{ma^2 \frac{1}{\cos^2 \theta} \frac{d\theta}{dt}}{J+m \frac{a^2}{\cos^2 \theta}}$ soit $d\alpha = -\frac{d\theta}{1+\eta \cos^2 \theta}$ où $\eta = \frac{J}{ma^2}$. Le signe $-$ traduit la rotation inverse du plateau par rapport au train, ce qui est logique d'après la conservation du moment cinétique. Il reste à intégrer. On pose $\xi = \tan \theta$ et l'équation précédente devient $d\alpha = -\frac{d\xi}{c^2 + \xi^2}$ en posant $c^2 = 1 + \eta > 0$. Pour le parcours du côté $[AB]$ du carré, la rotation du plateau est de $\Delta\alpha_{AB} = -2 \int_0^{\pi/4} \frac{d\theta}{1+\eta \cos^2 \theta} = -2 \int_0^1 \frac{d\xi}{c^2 + \xi^2}$ soit $\Delta\alpha_{AB} = -\frac{2}{c} \left[\arctan \frac{\xi}{c} \right]_0^1$ d'où $\Delta\alpha_{AB} = -\frac{2}{\sqrt{1+\eta}} \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \right]$ et pour un tour complet du carré, on obtient un rotation $\Delta\alpha = 4 \Delta\alpha_{AB} = -\frac{8}{\sqrt{1+\eta}} \arctan \left[\frac{1}{\sqrt{1+\eta}} \right]$.

11. Tige glissant sur un plan horizontal

Réponses : On commence par faire un schéma avec les actions sur la tige qui sont le poids et la réaction du sol qui sont toutes deux verticales (pas de frottement). On remarque que G a forcément un mouvement vertical : en effet, le PFD sur la barre projeté sur l'horizontale montre que son accélération est nulle et comme sa vitesse est nulle. Il faut bien réaliser que le point A de contact bouge et ne surtout pas utiliser de TMC en ce point dans le référentiel du sol ! Le théorème du moment cinétique possède deux expressions différentes si le point d'application est fixe ou bien mobile (hors-programme en Physique mais pas en SI). Ainsi, il ne reste qu'un problème à un seul degré de liberté cinématique α et il est rapide d'obtenir son équation du premier ordre en utilisant le TEM pour la tige. Le système est conservatif même si la tige glisse sur le sol, il n'y a pas de frottements alors le travail des actions de contact est nul. Le TEM s'écrit $\mathcal{E}_c(t) + m g \frac{l}{2} \sin \alpha = \mathcal{E}_c(0) + m g \frac{l}{2} \sin \alpha_0$. Il reste à obtenir l'expression de l'énergie cinétique. Grâce au théorème de KOENIG pour l'énergie cinétique, $\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c^* + \frac{1}{2} m v(G)^2$. Or, $y_G = \frac{l}{2} \sin \alpha$ donc $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{l}{2} \sin \alpha \right) \right)^2$ soit $\mathcal{E}_c = \frac{m l^2}{24} \dot{\alpha}^2 + \frac{m l^2}{8} \cos^2 \alpha \dot{\alpha}^2$ d'où $\mathcal{E}_c = \frac{m l^2}{24} (1 + 3 \cos^2 \alpha) \dot{\alpha}^2$. Enfin, l'énergie cinétique initiale étant nulle, on trouve $(1 + 3 \cos^2 \alpha) \dot{\alpha}^2 = \frac{12g}{l} (\sin \alpha_0 - \sin \alpha)$. Pendant la chute, l'angle α décroît donc l'équation différentielle précédente permet d'isoler $\dot{\alpha} = \frac{d\alpha}{dt} = -\sqrt{\frac{12g}{l}} \sqrt{\frac{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}{1 + 3 \cos^2 \alpha}}$ d'où $dt = -\sqrt{\frac{l}{12g}} \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}} d\alpha$. On obtient le temps de chute Δt de la tige en intégrant cette expression entre le début du mouvement et l'arrivée au sol et on note bien ici dans la démarche que l'on n'a pas besoin de connaître la loi $\alpha(t)$ pour s'en sortir : $\Delta t = -\sqrt{\frac{l}{12g}} \int_{\alpha_0}^0 \sqrt{\frac{1 + 3 \cos^2 \alpha}{\sin \alpha_0 - \sin \alpha}} d\alpha$. On pourrait représenter Δt en fonction de α_0 numériquement ; on s'attend à obtenir Δt infini pour $\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ (position d'équilibre (instable) de la tige). La réaction $\vec{R} = R \vec{e}_y$ du sol sur la tige doit vérifier la condition $R > 0$ à tout instant pour valider l'hypothèse de non décollement de la tige du sol. Il faut donc expliciter R en utilisant le PFD appliqué à la tige dans le référentiel galiléen du sol en projection sur la verticale \vec{e}_y . Cela conduit à une équation où interviennent l'angle α , ainsi que ses dérivées première et seconde. On peut éliminer ces deux dernières en exploitant le résultat de la première question et sa version dérivée dans le temps. Ainsi, on déduit R en fonction de α et des paramètres du système et on peut conclure en analysant son signe pour α quelconque compris entre α_0 et 0. Voici des équations clés que l'on trouve lorsqu'on a le courage de réaliser la démarche précédente. Le PFD projeté donne $m \frac{l}{2} (\cos \alpha \ddot{\alpha} - \sin \alpha \dot{\alpha}^2) = R - m g$ et on parvient, au terme de l'élimination des fonctions dérivées de α , à $R = \frac{3 m g}{(1 + 3 \cos^2 \alpha)^2} \left[\frac{4}{3} - \sin^2 \alpha_0 + (\sin \alpha - \sin \alpha_0)^2 \right]$. On constate que, puisque $4/3 - \sin^2 \alpha_0 > 0$, R reste strictement positive pour tout α entre α_0 et 0, ce qui assure le maintien du contact de la tige avec le sol.

12. Rupture au cours de sa chute d'une tige qui tombe sur le sol

Réponses : On applique à la tige complète le théorème du moment cinétique en A, point fixe du référentiel terrestre supposé galiléen, en projection sur (Az) (seules les actions extérieures comptent !) : $J_{Az} \ddot{\theta} = m \frac{b}{2} g \sin \theta$ avec, selon le théorème de HUYGENS, $J_{Az} = \frac{1}{12} m b^2 + m \left(\frac{b}{2} \right)^2 = \frac{1}{3} m b^2$. Ainsi, $\ddot{\theta} = \frac{3g}{2b} \sin \theta$ (1). On applique ensuite à la portion de tige PB, de longueur $b - x$, de masse $m_P = \frac{b-x}{b} m$, de centre d'inertie G_P tel que $AG_P = AP + PG_P = x + \frac{b-x}{2} = \frac{b+x}{2}$ le théorème de résultante dynamique : $m_P \frac{dA\vec{G}_P}{dt^2} = m_P \vec{g} + \vec{T} + \vec{N}$. Voir la figure 2.



FIGURE 2 – Bilan des forces sur la tige et sur une portion de celle-ci

Alors, les projections sur les axes polaires \vec{e}_r et \vec{e}_θ sont $-m_P \frac{b+x}{2} \dot{\theta}^2 = N - m_P g \cos \theta$ (2) et $m_P \frac{b+x}{2} \ddot{\theta} = T + m_P g \sin \theta$ (3). Enfin, la dernière équation utile s'obtient par application du TMC barycentrique à la portion de tige PB en projection sur $G_P z$: $J_{Pz} \ddot{\theta} = [\vec{G}_P \wedge (\vec{T} + \vec{N}) + \mathcal{M}_P] \cdot \vec{e}_z$. Par théorème de HUYGENS, $J_{Pz} = \frac{1}{12} m_P (b-x)^2 = \frac{1}{12} m \frac{(b-x)^3}{b}$. Par conséquent, il vient $\frac{1}{12} m \frac{(b-x)^3}{b} \ddot{\theta} = -\frac{b-x}{2} T + \mathcal{M}_P$ (4). Il ne reste qu'à utiliser (1) et (3) pour obtenir $T = \frac{(3x-b)(b-x)}{4b^2} m g \sin \theta$ et puis, l'équation (4) donne $\mathcal{M}_P = \frac{x(b-x)^2}{4b^2} m g \sin \theta$. L'équation (2) permettrait de déduire N et d'effectuer une éventuelle analyse de non glissement de la portion de tige PB sur la partie basse AP (voir les lois de COULOMB du frottement solide). On a T_0 qui évolue comme la fonction $f(x) = |(3x-b)(b-x)|$ et \mathcal{M}_{P0} varie comme la fonction $g(x) = x(b-x)^2$. Les tracés sont fournis à la figure 3.

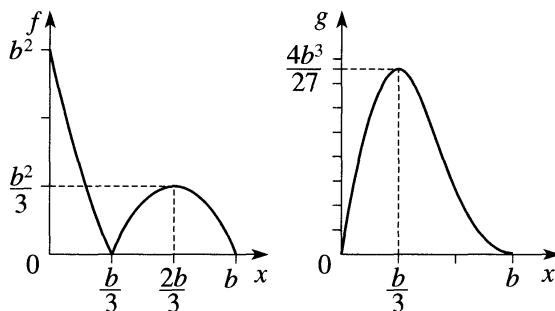


FIGURE 3 – Tracé de $f(x)$ et $g(x)$

Si le moment M_{P_0} dépasse la valeur maximale que la tige peut localement supporter sans casser, ce qui se produit en premier au point P_0 défini par $x_0 = b/3$, la tige se brise. Ainsi, lors de sa chute, une cheminée (si ce modèle de tige homogène est correct...) se casse (à la limite se plie car $\vec{T} = \vec{0}$) au tiers de sa hauteur.

13. Freinage entre deux disques

Réponses : Il est préférable de ne pas utiliser de théorème énergétique car le système est dissipatif. On calcule d'abord la vitesse de glissement des disques au contact : $\vec{v}_g(I, \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) = \vec{v}(I_2 \in \mathcal{D}_2/\mathcal{R}) - \vec{v}(I_1 \in \mathcal{D}_1/\mathcal{R})$. Chaque disque admettant un mouvement de rotation autour de son axe fixe à la vitesse angulaire $\omega_i \vec{e}_z$, on trouve $\vec{v}_g(I, \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) = (R_2 \omega_2 + R_1 \omega_1) \vec{e}_x = v_g \vec{e}_x$. Voir le schéma de la figure 4.

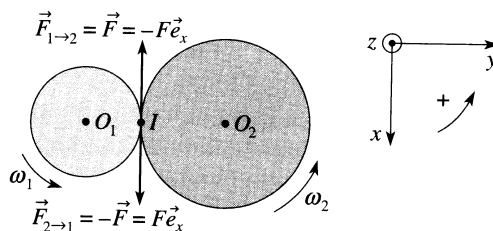


FIGURE 4 – Les deux disques en contact

Au départ, $v_{g0} = R_2 \omega_{20} + R_1 \omega_{10}$. À la fin, $v_g = 0 = R_1 \Omega_1 + R_2 \Omega_2$. Ensuite, les lois de COULOMB donnent notamment que $F(t) > 0$ car $\vec{F}_{1 \rightarrow 2} \cdot \vec{v}_g(I, \mathcal{D}_2/\mathcal{D}_1) < 0$. Enfin, on applique le théorème du moment cinétique sur chaque disque par rapport à leur axe fixe, en faisant attention aux signes, sans oublier la loi de l'action et de la réaction. On trouve $J_1 \frac{d\omega_1}{dt} = -R_1 F$ et $J_2 \frac{d\omega_2}{dt} = -R_2 F$. Ainsi, $m_1 R_1 \frac{d\omega_1}{dt} = m_2 R_2 \frac{d\omega_2}{dt}$ qui donne par intégration entre les instants initial et final $m_1 R_1 (\Omega_1 - \omega_{10}) = m_2 R_2 (\Omega_2 - \omega_{20})$ (2). La résolution du système formé par les équations (1) et (2) conduit à $\Omega_1 = \frac{m_1 R_1 \omega_{10} - m_2 R_2 \omega_{20}}{R_1 (m_1 + m_2)}$ et $\Omega_2 = \frac{-m_1 R_1 \omega_{10} + m_2 R_2 \omega_{20}}{R_2 (m_1 + m_2)}$. La variation d'énergie cinétique est, entre l'état initial et l'état final, $\Delta \mathcal{E}_c = (\frac{1}{2} J_1 \Omega_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \Omega_2^2) - (\frac{1}{2} J_1 \omega_{10}^2 + \frac{1}{2} J_2 \omega_{20}^2)$ soit $\Delta \mathcal{E}_c = -\frac{1}{4} \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} (R_1 \omega_{10} + R_2 \omega_{20})^2 < 0$. L'énergie cinétique macroscopique est convertie en énergie cinétique d'agitation thermique (qui provoque un échauffement) lors du freinage des disques.

14. Chaîne de pendules pesants couplés - Soliton

Réponses : $\ddot{\theta}_n = -\omega_1^2 (2\theta_n - \theta_{n-1} - \theta_{n+1}) - \omega_0^2 \sin \theta_n$, $\omega^2 = 4\omega_1^2 \sin^2 \frac{ka}{2} + \omega_0^2$ propagation pour $\omega > \omega_0$, $c_0 = a\sqrt{C/I_x}$, $k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{c_0^2}$, pas de déformation, $E_c = 4 \frac{I_x \omega_0}{a} \frac{v^2}{\sqrt{c_0^2 - v^2}}$, $E_{pot,el} = 4 \frac{I_x \omega_0}{a} \frac{c_0^2}{\sqrt{c_0^2 - v^2}}$, $E_{pot,pes} = 4 \frac{I_x \omega_0}{a} \sqrt{c_0^2 - v^2}$, $m_0 = 8 \frac{I_x}{a^2} \sqrt{\frac{mgd}{C}}$.

15. Freinage d'un cylindre

Réponses : Un point de la périphérie du cylindre possède une vitesse $R\omega_0$ et comme le tapis roulant possède une vitesse $v_1 < R\omega_0$, il y a glissement, une force tangentielle va s'exercer sur le cylindre. Cette force est dirigée vers l'arrière, cela va freiner le cylindre dont la vitesse de rotation va diminuer jusqu'à atteindre une vitesse ω_f telle que $R\omega_f = v_1$. La force tangentielle est $T = \mu F_0$, le théorème du moment cinétique appliqué au cylindre donne $J \frac{d\omega}{dt} = -R\mu F_0$ d'où $\omega = \omega_0 - \frac{R\mu F_0}{J} t$. Il y a glissement jusqu'à ce que $v_1 = R\omega_0 - \frac{R^2 \mu F_0}{J} t$, on trouve $t_f = \frac{J(R\omega_0 - v_1)}{R^2 \mu F_0}$. Si $R\omega_0 < v_1$, il y a glissement mais la vitesse de glissement est dans le sens contraire du précédent, la force tangentielle tend à entraîner la rotation du cylindre pour qu'il augmente sa vitesse de

rotation $\omega = \omega_0 + \frac{R\mu F_0}{J}t$, la durée nécessaire pour que le glissement cesse est la même sous forme littérale que la précédente.

16. Mesure de la constante de gravitation

Réponses : Le couple est $C(\theta_0 - \theta)$, il correspond à une énergie potentielle $\frac{1}{2}C(\theta_0 - \theta)^2$. L'énergie potentielle de gravitation correspondant à l'interaction entre M et m est $-\frac{GMm}{r}$ si r est la distance séparant les deux masses. Lorsque l'angle est θ , on a $r = 2a \sin \theta/2$. L'énergie potentielle totale est $E_{pot} = \frac{1}{2}C(\theta_0 - \theta)^2 - \frac{GMm}{a \sin(\theta/2)}$.

L'équilibre est obtenu pour $\frac{dE_{pot}}{d\theta} = 0$. On trouve $\mathcal{G} = \frac{2Ca}{Mm}(\theta_0 - \theta_{eq}) \frac{\sin^2 \theta_{eq}/2}{\cos \theta_{eq}/2}$. Le moment d'inertie du pendule de torsion est $J + 2Ma^2$ en considérant les masses M ponctuelles situées aux extrémités de la barre. L'énergie cinétique est $\frac{1}{2}(J + 2Ma^2)\dot{\epsilon}^2$ si l'on pose $\theta = \theta_{eq} + \epsilon$. Le développement limité de l'énergie potentielle conduit à $E_{pot} = \frac{1}{2}C(\theta_0 - \theta_{eq})^2 - \frac{GMm}{a \sin \theta_{eq}/2} + \frac{1}{2} \left[C - \frac{GMm}{2a \sin \theta_{eq}/2} \right] \epsilon^2$. On dérive par rapport au temps $E_c + E_{pot} = Cte$.

On obtient l'équation différentielle $(J + 2Ma^2)\ddot{\epsilon} + \left(C - \frac{GMm}{2a \sin \theta_{eq}/2} \right) \epsilon = 0$. Le terme $C - \frac{GMm}{2a \sin \theta_{eq}/2}$ est positif

pour obtenir des oscillations. La fréquence des oscillations est $f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{C - \frac{GMm}{2a \sin \theta_{eq}/2}}{J + 2Ma^2}}$.

17. Cerceau tournant

Réponses : $\Sigma \vec{f} + \vec{f}_{ent} = \vec{0}$ ou bien $\frac{dE_{pot}}{d\varphi} = 0$; $E_{pot} = E_{pot,ressort} + E_{pot,ent} + E_{pot,pes}$, $E_{pot} = \frac{1}{2}MR^2(\omega_0^2 - \omega^2)(1 + \cos \varphi)^2 + Mgr \sin \varphi$, équilibre $R(\omega_0^2 - \omega^2)(1 + \cos \varphi) \sin \varphi = g \cos \varphi$, $E_c = \frac{1}{2}MR^2\dot{\varphi}^2$, $\dot{\varphi}^2 = (\omega_0^2 - \omega^2)[(1 + \cos \varphi)^2 - (1 + \cos \varphi)] + \frac{2g}{R}(\sin \varphi_0 - \sin \varphi)$; $R\omega^2 \gg g$, $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\frac{d^2E_{pot}}{d\varphi^2} = MR^2(\omega^2 - \omega_0^2)(\cos \varphi + \cos 2\varphi)$, si $\omega > \omega_0$, $\varphi = 0$ stable, $\varphi = \pi$ instable même si $\varphi_0 = \pi$ alors $\varphi = \pi \forall t$, si $\omega < \omega_0$, c'est l'inverse; ici $\omega < \omega_0$ $\varphi_0 = \pi + \epsilon_0$ et $\varphi = \pi + \epsilon$, $T = \frac{8}{\sqrt{\omega_0^2 - \omega^2}} \int_0^{\epsilon_0} \frac{d\epsilon}{\sqrt{\epsilon^4 - \epsilon^4}}$; $\ddot{\varphi} + \frac{g}{R} \cos \varphi = 0$; $\dot{\varphi}_0^2 = \frac{2g}{R}$.

18. Rotation et forces d'inertie

Réponses : on découpe la tige en éléments de longueur ds . Dans le référentiel tournant, la tige est fixe et il n'y a donc aucune action de CORIOLIS. Par contre, chaque élément en M (de projeté orthogonal H sur l'axe Oz) subit la force élémentaire d'inertie d'entraînement $d\vec{f}_{ie} = -\vec{a}_{ent} dm = -(-\omega^2 \overrightarrow{HM}) \frac{m}{l} ds = \frac{m}{l} \omega^2 s \sin \alpha \vec{e}_r$ ds en coordonnées cylindriques. Alors, on tire $\vec{F}_{ie} = \int_{\text{tige}} d\vec{f}_{ie} = \frac{1}{2} m l \omega^2 \sin \alpha \vec{e}_r$ et $\vec{M}(O) = \int_{\text{tige}} \overrightarrow{OM} \wedge d\vec{f}_{ie} = -\frac{1}{3} m l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \vec{e}_\theta$. Le point d'application de la force équivalente (ou glisseur) est le point P tel que $\vec{M}(O) = \overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{ie}$. En posant $\overrightarrow{OP} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ on a $\overrightarrow{OP} \wedge \vec{F}_{ie} = z \frac{1}{2} m l \omega^2 \sin \alpha \vec{e}_\theta$ donc $z = -\frac{2}{3} l \cos \alpha$ et $r = |z| \tan \alpha = \frac{2}{3} l \sin \alpha$. On en conclut que les forces réparties d'inertie d'entraînement se réduisent à une seule force en P tel que $OP = \frac{2}{3} l$. Attention, P n'est pas confondu avec G car les éléments de force d'inertie ne sont pas uniformes sur la tige!

19. Fermeture d'une portière

Réponses : Plusieurs méthodes sont possibles. À chaque fois, le système est la porte. La méthode énergétique n'est pas présentée ici mais est tout à fait envisageable. On se reporte au schéma de la figure 5.

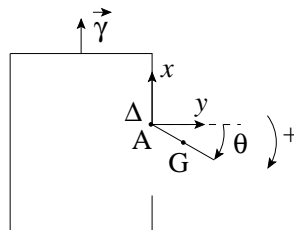


FIGURE 5 – Portière de voiture au cours de la fermeture

On pose \mathcal{R} le référentiel galiléen de la route. On se place dans le référentiel \mathcal{R}' lié à la voiture, non galiléen. L'avantage est que l'axe (Az) est fixe dans ce référentiel, donc on va appliquer sans mal le TMC à la porte. Mais il faut penser aux actions d'inertie :

$$\frac{dL_{Az}}{dt} = \underbrace{\mathcal{M}_{Az,poids}}_{0 \text{ car } Az // \vec{P}} + \underbrace{\mathcal{M}_{Az,liaison}}_{0 \text{ (pivot parfait)}} + \mathcal{M}_{Az,ie} + \underbrace{\mathcal{M}_{Az,ic}}_{0 \text{ car } \vec{\Omega}(\mathcal{R}'/\mathcal{R}) = \vec{0}}$$

L'action d'inertie d'entraînement est analogue ici à un poids suivant $-\vec{e}_x$ en G (forces réparties analogues), donc $\mathcal{M}_{Az,ie} = (\overrightarrow{AG} \wedge \vec{F}_{ie}) \cdot \vec{e}_z$ où $\vec{F}_{ie} = -m \gamma \vec{e}_x$ d'où $J_\Delta \ddot{\theta} = m \gamma \frac{a}{2} \cos \theta$. On multiplie par $\dot{\theta}$ et on intègre compte

tenu des conditions initiales $\theta(0) = 0$ et $\dot{\theta}(0) = 0$. On trouve $\frac{1}{2} J_{\Delta} \dot{\theta}^2 = m \gamma \frac{a}{2} \sin \theta$. Finalement, à la fermeture de la porte, $\theta = \pi/2$ et $\dot{\theta} = \omega$ cherché : $\omega = \sqrt{\frac{3\gamma}{a}}$.