

Exercices : 19 - Champ électrostatique

A. Calculs de champ et de potentiel

1. Théorème de superposition

Une sphère de rayon b porte une charge positive Q répartie uniformément sur sa surface.

1. Calculer le potentiel créé à l'intérieur par la charge Q .

$$\text{a) } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{b} \quad \text{b) } V = 0 \quad \text{c) } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{b} \quad \text{d) } V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2b}$$

Deux sphères identiques à la précédente sont disposées symétriquement sur l'axe Oy par rapport à O aux points A et B distants de $2a$ (avec $a > b$). Une troisième charge $-2Q$ considérée comme ponctuelle se trouve en O .

2. Calculer le champ électrique créé par les trois charges en un point P de l'axe Ox d'abscisse x .

$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(2a^2 + x^2)^{3/2}} \vec{e}_x & \text{b) } \vec{E} &= \frac{2Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right] \vec{e}_x \\ \text{c) } \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} + \frac{1}{x^2} \right] \vec{e}_x & \text{d) } \vec{E} &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{x}{(a^2 + x^2)^{3/2}} - \frac{1}{x^2} \right] \vec{e}_x \end{aligned}$$

2. Énergie d'une goutte chargée

Une goutte sphérique de mercure, de charge en surface $8Q$, se sépare en 8 petites gouttes sphériques identiques (même charge et même diamètre). Après cette séparation, ces 8 gouttes n'interagissent plus. L'énergie potentielle électrostatique d'une sphère avec une distribution continue de charge en surface, de rayon r et de charge q vaut $\frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 r}$ où ϵ_0 est la permittivité du vide. Quel pourcentage de l'énergie électrostatique initiale a été converti, lors de cette transformation, en une autre forme d'énergie ?

Proposition de réponses :

- a) 25% b) 75% c) 12,5% d) 0%

3. Sphère chargée

Une sphère de centre O et de rayon a porte la densité surfacique de charges uniforme σ sur la fraction de sa surface comprise entre les cotes z_1 et z_2 , avec $-a \leq z_1 \leq z_2 \leq a$ (cf. figure 1).

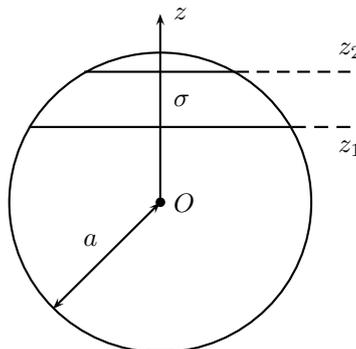


FIGURE 1 – Sphère partiellement chargée

- Déterminer le champ électrique créé au centre de la sphère.
Traiter et commenter le cas où la sphère est complètement chargée.
- Déterminer par un calcul direct et sous forme d'une intégrale le champ électrique créé en un point M situé sur l'axe (Oz) de la sphère.
Traiter et commenter le cas où la sphère est complètement chargée.

4. Modélisation du noyau

Le noyau de certains atomes légers peut être modélisé par une distribution sphérique de rayon a dont la charge varie en fonction de la distance r au centre suivant la loi : $\rho = \rho_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$ où ρ_0 est une constante positive et $r < a$.

1. Calculer la charge du noyau.
2. Calculer le champ électrique pour un point M quelconque de l'espace situé à une distance r du centre O telle $r > a$.
3. Calculer le champ électrique pour $r < a$. Y a-t-il continuité en $r = a$?
4. Calculer le potentiel pour $r > a$.
5. Calculer le potentiel pour $r < a$. Y a-t-il continuité en $r = a$?

5. Peau chargée

Il existe des situations physiques où une charge volumique peut être présente dans une épaisseur limitée sous la surface d'un système. Cette épaisseur que l'on peut assimiler à une peau est la conséquence de la décroissance rapide de la charge volumique avec la profondeur. On considère le vide situé en $z < 0$ et un matériau de permittivité ϵ_0 , assimilée à celle du vide par conséquent, situé en $z \geq 0$. Dans ce milieu matériel, on considère une charge volumique évoluant en fonction la profondeur z selon la loi :

$$\rho(z) = \rho_0 \exp -\frac{z}{a}$$

où ρ_0 et a sont des constantes positives.

1. Représenter $\rho(z)$ et estimer l'épaisseur e de la peau évoquée dans l'énoncé.
2. Si l'on se place à des abscisses z telles que $|z| \gg a$, montrer que l'on peut assimiler la distribution de charge à celle d'un plan infini et infiniment fin, doté d'une charge surfacique σ que l'on calculera. On conviendra de placer le plan infini en $z = 0$. Rappeler l'expression du champ électrique créé par le plan infini précédent.
3. On revient à l'étude de la distribution $\rho(z)$. Déterminer l'expression du champ électrique créé en tout point de l'espace.

6. Modélisation de la jonction PN d'une diode ou d'un transistor

Lorsqu'un semi-conducteur présente, dans une région très localisée de l'espace, une variation très brutale de la concentration en dopant, voire un changement de la nature du dopant, on dit qu'on a une jonction. Au voisinage de la jonction, dans une région dite « zone de charge », le cristal acquiert une distribution de charge électrique non nulle que l'on se propose d'étudier. Les propriétés qui en résultent sont à la base de la caractéristique de diodes, des transistors et de tous les circuits intégrés (ampli op en particulier).

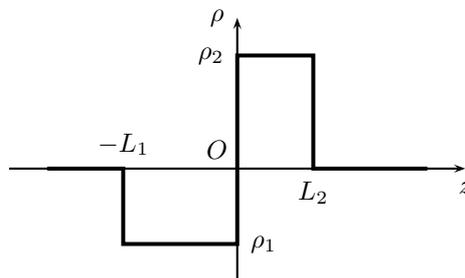


FIGURE 2 – Modélisation volumique de la jonction PN

1. On considère un plan infini d'équation $z = 0$, portant une densité surfacique de charge σ constante. Ce plan est plongé dans un milieu quasi-isolant dans lequel la permittivité électrique est $\epsilon_r \epsilon_0$. Déterminer le champ électrique créé en tout point de l'espace en utilisant le théorème de Gauss.

On se place dans le germanium, de permittivité relative ϵ_r et on suppose que la densité volumique de charge ρ invariante en x et en y autour d'une jonction située dans le plan $z = 0$ a l'allure de la figure 2 :

2. Sachant que la distribution de charge est globalement neutre, établir la relation vérifiée par L_1 , L_2 , ρ_1 et ρ_2 .

3. Déterminer le champ électrique en tout point M de l'espace. On utilisera l'équation de Maxwell relative au champ électrique en utilisant le fait que le champ électrique est nul pour un point M situé à l'infini.
4. En déduire le potentiel électrostatique $V(M)$. On choisira l'origine des potentiels en $z = 0$.
5. Représenter $V(z)$.
6. Donner l'expression de la différence de potentiel V_0 entre deux points situés de part et d'autre de la zone de charge.
7. La région ($z > 0$) a été dopée avec de l'antimoine à raison de $N_2 = 1,6 \times 10^{21}$ atomes Sb par m^3 , tandis que la région ($z < 0$) a été dopée avec du bore, avec un nombre d'atomes $N_1 \gg N_2$. On admet que dans la zone de charge, chaque atome Sb est ionisé en Sb^+ . Les électrons ainsi libérés traversent spontanément le plan $z = 0$ et chaque atome de bore situé dans la zone de charge se transforme en un anion B^- . En déduire ρ_1 et ρ_2 en fonction de N_1 et N_2 .
8. Le système ainsi constitué est une diode à jonction dont la tension de seuil est voisine de V_0 . En déduire une expression approchée de la largeur δ de la zone de charge.
9. Application numérique : calculer δ ; on donne : $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$; $\epsilon_r = 16$; $V_0 = 0,3 \text{ V}$ et $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

7. Potentiel de Yukawa

Un plasma en équilibre thermique à la température T est formé d'électrons de charge $-e$ et d'ions positifs de charge $+e$, qui se répartissent dans l'espace avec la densité particulière (nombre de particules par unité de volume) donnée par la loi de Maxwell-Boltzmann, $n_+ = n_0 \exp\left(-\frac{e}{k_B T} V(r)\right)$, $n_- = n'_0 \exp\left(+\frac{e}{k_B T} V(r)\right)$, où $V(r)$ désigne le potentiel électrostatique qui règne en un point M situé à la distance r d'une charge positive ponctuelle Q introduite au point origine O du plasma.

1. Justifier ces expressions.
Le plasma étant globalement neutre à grande distance de O , relier n_0 et n'_0 .
2. Déterminer la densité volumique de charges $\rho(r)$ en fonction de $V(r)$. Simplifier cette expression dans le cas où la température du plasma est assez élevée.
3. Établir une équation locale vérifiée par $V(r)$.
4. Résoudre cette équation en déterminant $V(r)$. On pourra poser $V(r) = \frac{f(r)}{r}$ et établir une équation différentielle du second ordre vérifiée par $f(r)$. Commenter.

8. Électro-érosion par fil

L'électro-érosion, appelée aussi EDM pour *Electrical Discharge Machining*, est un procédé d'usinage qui consiste à enlever de la matière dans une pièce en utilisant des décharges électriques. La méthode consiste à faire pénétrer un fil conducteur dans une pièce métallique massive tout en imposant une différence de potentiel entre eux, l'ensemble étant plongé dans un liquide isolant, généralement de l'huile. Lorsque le fil est suffisamment proche de la surface de la pièce, un arc électrique apparaît entre les deux (champ disruptif dans l'huile $E_{rupt} = 100 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1}$) et la pièce est creusée au niveau du point d'impact de l'arc. Voir le schéma de la figure 3.

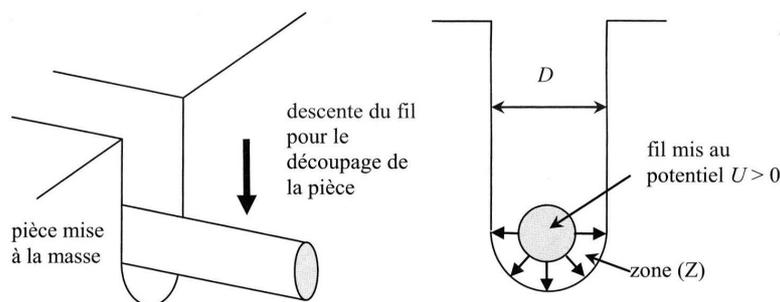


FIGURE 3 – Schéma de principe de l'électro-érosion

Le fil possède un diamètre d et crée dans la pièce une entaille de largeur D . On suppose le fil assez long pour négliger les effets de bords. Par ailleurs, on adopte pour simplifier un champ électrique dans la zone (Z), entre le fil et la pièce, radial et de composante ne dépendant que de la distance r à l'axe du fil. Du fait de la présence de l'huile, la permittivité dans celle-ci n'est pas ϵ_0 mais $\epsilon_0 \epsilon_r$ (où ϵ_r est la constante de permittivité relative) et il faut adapter les lois de l'électrostatique de la même façon.

- Déterminer la loi d'évolution du champ électrostatique dans la zone (Z), en fonction de U , D , d , r et du vecteur unitaire radial \vec{e}_r .
- Calculer la tension minimale U_{min} à appliquer au fil pour pouvoir faire une entaille de diamètre $D = 10 \mu\text{m}$ avec un fil de diamètre $d = 5,0 \mu\text{m}$.
- En pratique, le fil provient d'une bobine et c'est la pièce à découper qui effectue les mouvements nécessaires, préalablement programmés par ordinateur. Pourquoi fait-on dérouler la bobine au fur et à mesure du découpage de la pièce au lieu de conserver toujours le même fil fixe ?

9. Énergie de liaison d'un noyau

On considère le noyau d'un atome contenant $A = N + Z$ nucléons et Z protons de charge $+e$. On assimile le noyau à une boule de rayon $R = r_0 A^{1/3}$ où $r_0 = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$. On effectuera les applications numériques demandées dans le cas du chlore ($A = 35$ et $Z = 17$).

- L'évolution du rayon R en $A^{1/3}$ vous semble-t-elle cohérente ? Déterminer le rayon du noyau de chlore (en fm), ainsi que sa densité volumique de charge ρ en supposant la charge des protons répartie uniformément.
- Les physiciens BETHE et WEIZSÄCKER ont proposé la formule semi-empirique suivante de l'énergie de liaison d'un noyau :

$$E(A, Z) = v A - s A^{2/3} - c \frac{Z^2}{A^{1/3}} + \gamma(A, Z)$$

Les paramètres v , s et c sont des constantes positives et la fonction $\gamma(A, Z)$, d'origine quantique, n'est pas détaillée ici. Quel terme est-il associé à l'interaction électrostatique du noyau ?

- Quelle est l'origine principale de la stabilité du noyau ? Interpréter les deux autres termes de la formule de BETHE et WEIZSÄCKER (autres que $\gamma(A, Z)$ bien sûr) en discutant notamment physiquement leurs dépendances avec A .

On cherche à déterminer plus précisément le terme énergétique d'interaction électrostatique du noyau. Pour ce faire, on détermine l'énergie \mathcal{E} de constitution d'une boule de rayon R et de charge Q uniformément répartie dans son volume. Cette énergie correspond au travail total à fournir pour construire la boule en prenant les charges à l'infini. On admet que cette énergie ne dépend pas de la façon dont on la construit. La constitution est alors réalisée par couches sphériques concentriques successives, de façon réversible par l'action d'un opérateur : à chaque étape, il y a équilibre entre l'action de l'opérateur sur les charges amenées et l'action électrostatique avec la portion de boule déjà créée qui se comporte, pour son champ électrostatique, comme une simple charge ponctuelle placée en son centre (de même valeur de charge).

- Établir l'expression de cette énergie \mathcal{E} en fonction de Q , R et ϵ_0 . En déduire l'expression de l'une des constantes v , s ou c en fonction de e , ϵ_0 et r_0 . Calculer la contribution électrostatique à l'énergie de liaison du noyau de chlore en MeV.
- On remplace généralement le facteur Z^2 , présent dans le troisième terme de la formule de BETHE et WEIZSÄCKER, par $Z(Z - 1)$. Quelle peut être la motivation de ce choix ?

B. Gravitation

10. Champ de gravitation terrestre

La Terre est assimilée à une sphère de centre O , de rayon $R_T = 6,38 \times 10^3 \text{ km}$, de masse $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$, uniformément répartie dans tout le volume.

- Déterminer le champ gravitationnel $\vec{\mathcal{G}}_T$ en tout point de l'espace. Tracer l'évolution de ce champ en fonction de r .
- Calculer la norme de ce champ à la surface de la Terre.
- L'étude des ondes sismiques montre que le modèle d'une masse uniformément répartie n'est pas réaliste. Le modèle correspondant à la courbe de la figure 4 montre que la répartition uniforme de masse n'est pas réaliste. On donne $R_1 = 3,50 \times 10^3 \text{ km}$. On conserve le modèle de la répartition à symétrie sphérique. Déterminer l'évolution de la masse volumique $\rho(r)$ de la Terre en précisant les valeurs remarquables.

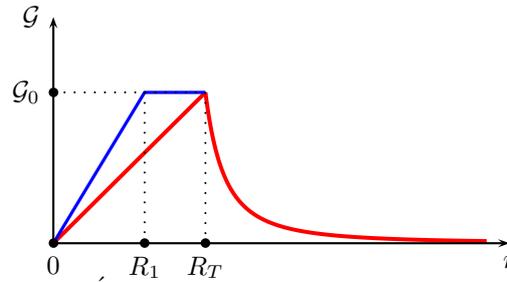


FIGURE 4 – Évolutions du champ gravitationnel terrestre

11. Champ de gravitation dans une grotte

Une planète est assimilée à une boule de centre O , de rayon R , de masse volumique μ supposée uniforme. Elle est creusée d'une grotte sphérique, de centre O' , de rayon R' , vide.

- Déterminer le champ de gravitation en un point de la grotte.
- Expliciter le potentiel de gravitation ϕ , tel que $\vec{G} = -\text{grad}\phi$, à l'extérieur de la planète, en un point M caractérisé par $OM = r$ et $O'M = r'$.
- On considère maintenant que $r \gg R$ et on pose $OO' = a$, $\theta = (\vec{OO'}, \vec{OM})$. Expliciter $\phi(r, \theta)$, au second ordre non nul en a/r .

12. Champ de pesanteur au sommet d'une montagne

On représente une montagne comme un cône de révolution de hauteur h , de demi-angle d'ouverture α et de masse volumique uniforme μ . Soit $\vec{g}_0 = -g_0 \vec{e}_z$ le champ de pesanteur à l'altitude du sommet O , loin de la montagne, et $\vec{g}_1 = -g_1 \vec{e}_z$ le champ de pesanteur au sommet de la montagne. On donne $\mu = 3,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $h = 1,0 \text{ km}$ et $\alpha = 30^\circ$. On peut démontrer en électrostatique que le champ électrostatique produit sur l'axe d'un disque de rayon R chargé uniformément en surface par une charge surfacique σ est :

$$\vec{E}(M) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} (1 - \cos \alpha) \vec{u}$$

où \vec{u} est le vecteur unitaire de l'axe dirigé vers le point M sur l'axe et α est le demi-angle au sommet du cône de vision du disque depuis M .

- Obtenir, par construction d'une analogie pertinente, l'expression du champ gravitationnel élémentaire $d\vec{G}(M)$ produit sur l'axe d'un disque de matière de rayon R , de masse volumique uniforme μ et d'épaisseur infinitésimale dz (le point M sur l'axe est extérieur au disque).
- Calculer $\Delta g = g_1 - g_0$ pour le problème initial de la montagne. Faire l'application numérique et commenter.

13. Âge gravitationnel et Relativité générale

En 1963, le physicien RICHARD FEYNMAN écrit dans un de ses célèbres cours de physique à Caltech que le centre de la Terre était 1 ou 2 jours plus jeune que sa surface. Cette affirmation est une conséquence de la théorie de la Relativité générale qu'ALBERT EINSTEIN écrit en 1917. En effet si l'on considère deux horloges identiques positionnées respectivement au centre et à la surface de la Terre, les durées qu'elles mesurent dépendent du potentiel gravitationnel du lieu où elles sont situées. Lorsque l'horloge située en surface mesure une durée $\Delta t_{\text{surface}}$, la durée mesurée par celle située au centre est Δt_{centre} . Les deux durées sont liées par la relation :

$$\Delta t_{\text{surface}} = \Delta t_{\text{centre}} \left(1 + \frac{V_{\text{surface}} - V_{\text{centre}}}{c^2} \right)$$

où V est le potentiel gravitationnel du lieu considéré et c la vitesse de la lumière dans le vide. L'objectif de l'exercice est de vérifier l'affirmation de FEYNMAN.

- On considère que la Terre est une boule homogène de masse $M = 6 \times 10^{24} \text{ kg}$ et de rayon $R = 6400 \text{ km}$. Calculer le potentiel gravitationnel en tout point de l'espace.
- Établir l'écart d'âge entre la surface et le centre $\mathcal{A}_{\text{surface}} - \mathcal{A}_{\text{centre}}$ en fonction de l'âge moyen de la Terre \mathcal{A}_{moy} , \mathcal{G} la constante de gravitation universelle, M , R et c .
- En considérant que l'âge moyen de la Terre est $\mathcal{A}_{\text{moy}} = 4,5 \times 10^9 \text{ ans}$, déterminer numériquement $\mathcal{A}_{\text{surface}} - \mathcal{A}_{\text{centre}}$ et commenter l'affirmation de FEYNMAN.

4. On peut retrouver le résultat sur l'écart des durées entre les deux horloges en utilisant le théorie de la Relativité restreinte qu'EINSTEIN écrivit en 1905. Une horloge fixe dans un référentiel galiléen mesure une période T_0 . Une horloge en mouvement à la vitesse v par rapport à la précédente mesure une période plus longue, c'est le phénomène de dilatation des durées. La période mesurée est donnée par :

$$T_v = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Montrer que l'on retrouve le même écart de durées mesurées en considérant une horloge en chute libre dans le potentiel gravitationnel de la Terre qui évolue entre la surface et le centre de la Terre à condition que $v \ll c$.

14. Noyau galactique actif

Un trou noir est un objet céleste si compact que l'intensité de son champ gravitationnel empêche toute forme de matière ou de rayonnement de s'en échapper. Ils sont invisibles de manière directe. Sagittarius A* était perçu comme une source intense d'ondes radio, située dans la constellation du Sagittaire et localisée au centre de la Voie lactée. C'est une source quasi ponctuelle. Depuis 1990, on estime qu'un trou noir est à l'origine de l'émission radio. Sagittarius A* est devenu le trou noir présent au centre de notre galaxie. En 2022, le télescope Event Horizon - par des méthodes interférométriques - l'a imagé par ses conséquences sur les nuages de poussières autour du trou noir, voir l'image de la figure 5. La masse de Sagittarius A* est $M = 4,3 \times 10^6 M_\odot$ où $M_\odot = 2 \times 10^{30}$ kg représente la masse du Soleil. La taille de ce trou noir est $R = 1,23 \times 10^{10}$ m. La distance qui nous sépare du centre de la Voie lactée est $\ell = 26\,700$ années-lumière.

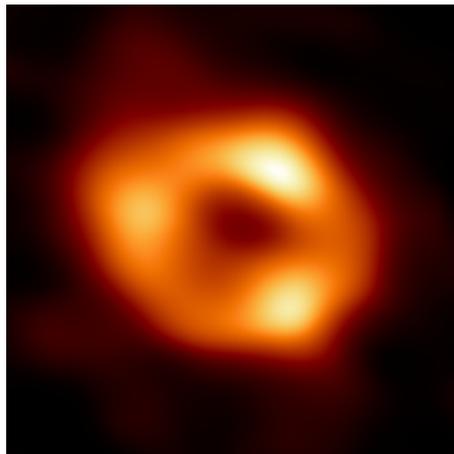


FIGURE 5 – Image de Sagittarius A* obtenue en 2022 par Event Horizon Collaboration

1. Quelle est la précision angulaire nécessaire pour estimer la dimension de Sagittarius A* ? Quelle serait la taille nécessaire d'un radio-télescope pour y parvenir sachant que l'on observe à la longueur d'onde $\lambda = 21$ cm ? Commenter.
2. On étudie un mobile ponctuel de masse m en orbite autour d'un astre à symétrie sphérique de masse M et de rayon R . Déterminer sa première vitesse cosmique v_1 correspondant à une orbite circulaire basse et sa seconde vitesse cosmique v_2 correspondant à la vitesse de libération de l'attraction de l'astre.
3. On admet que l'astre forme un trou noir si la seconde vitesse cosmique correspond à la vitesse de la lumière. Exprimer le rayon de SCHWARZSCHILD. Calculer ce rayon dans le cas d'un astre de même masse que le Soleil. Quelle est alors sa masse volumique ?
4. Quelle est la masse volumique du trou noir Sagittarius A* ?
5. Une étoile de masse $m \ll M$ est en orbite elliptique autour de Sagittarius A* avec une période $T = 15,2$ ans. Montrer que l'on peut déduire de la mesure de la période le demi grand axe a de l'ellipse parcourue.
6. L'excentricité de l'orbite de cette étoile est définie par :

$$e = \frac{d_{\max} - d_{\min}}{d_{\max} + d_{\min}} = 0,7$$

si d est la distance entre l'étoile et le centre de la Voie lactée. Calculer d_{\min} , commenter.

Avant d'identifier Sagittarius A* comme un trou noir quasi ponctuel, on pouvait penser qu'il s'agissait d'un objet diffus, de masse volumique uniforme, le mouvement d'une étoile comme celle présentée avant, se faisant alors à l'intérieur de cet objet.

- Exprimer le champ gravitationnel qui règne à l'intérieur de cet astre diffus.
- Donner les équations du mouvement de l'étoile dans ce contexte. Montrer que son mouvement est soit circulaire ou elliptique.

15. Aplatissement de Saturne

- À l'aide d'une analogie électrostatique, déterminer le potentiel gravitationnel $V(M)$ d'un point M situé à l'extérieur d'une boule homogène de masse m , de centre O . On notera \mathcal{G} la constante de gravitation universelle.

On modélise Saturne par une boule de masse volumique ρ , de rayon R possédant deux cavités sphériques vides, de rayon a centrées aux points A et B diamétralement opposés, avec $OA = OB = b$, voir la figure 6. Ce modèle a pour but de décrire l'aplatissement de Saturne et ses effets en matière d'interaction gravitationnelle.

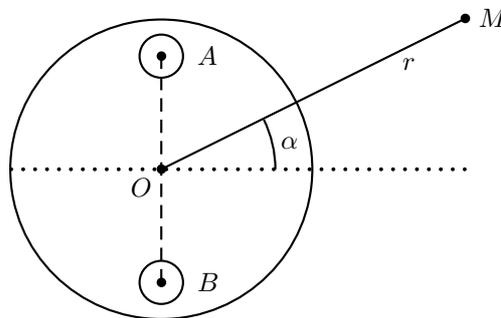


FIGURE 6 – Le modèle de Saturne avec ses deux cavités

- Déterminer $V(r, \alpha)$ en supposant $r \gg R$. Commenter.

C. Cartes de champ

16. Champ électrique de deux charges ponctuelles

Les cartes de champ de potentiel fournies sur les figures 7 et 8 sont formées à partir de charges ponctuelles placées dans le vide.

- Sur chacune des deux cartes de champ, étudier la structure des lignes de champ et déterminer le signe des charges ponctuelles utilisées.
- Déterminer le rapport des valeurs de ces deux charges.
- Commenter la structure des équipotentielles.

D. Propriétés de symétries

17. Développement d'un potentiel de trois charges

Trois charges ponctuelles q sont disposées aux sommets P, Q, N d'un triangle équilatéral de côtés $a\sqrt{3}$, de centre O (intersection des hauteurs), voir la figure 9. Au voisinage de O , en un point M de coordonnées x, y et z le potentiel peut se mettre sous la forme :

$$V(x, y, z) = V_0 + \alpha x + \beta y + \gamma z + Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Fyz + Gzx$$

- Calculer le potentiel V_0 .
- Déduire du calcul du champ électrostatique en O , la valeur des coefficients α, β et γ .
- Utiliser la symétrie de la distribution des charges par rapport à certains plans de la figure pour calculer les coefficients D, F et G .
- Utiliser la symétrie d'ordre 3 de la distribution des charges pour trouver la relation entre A et B (une équipotentielle doit se superposer à elle-même lors d'une rotation des axes Ox et Oy de $2\pi/3$ autour de Oz).

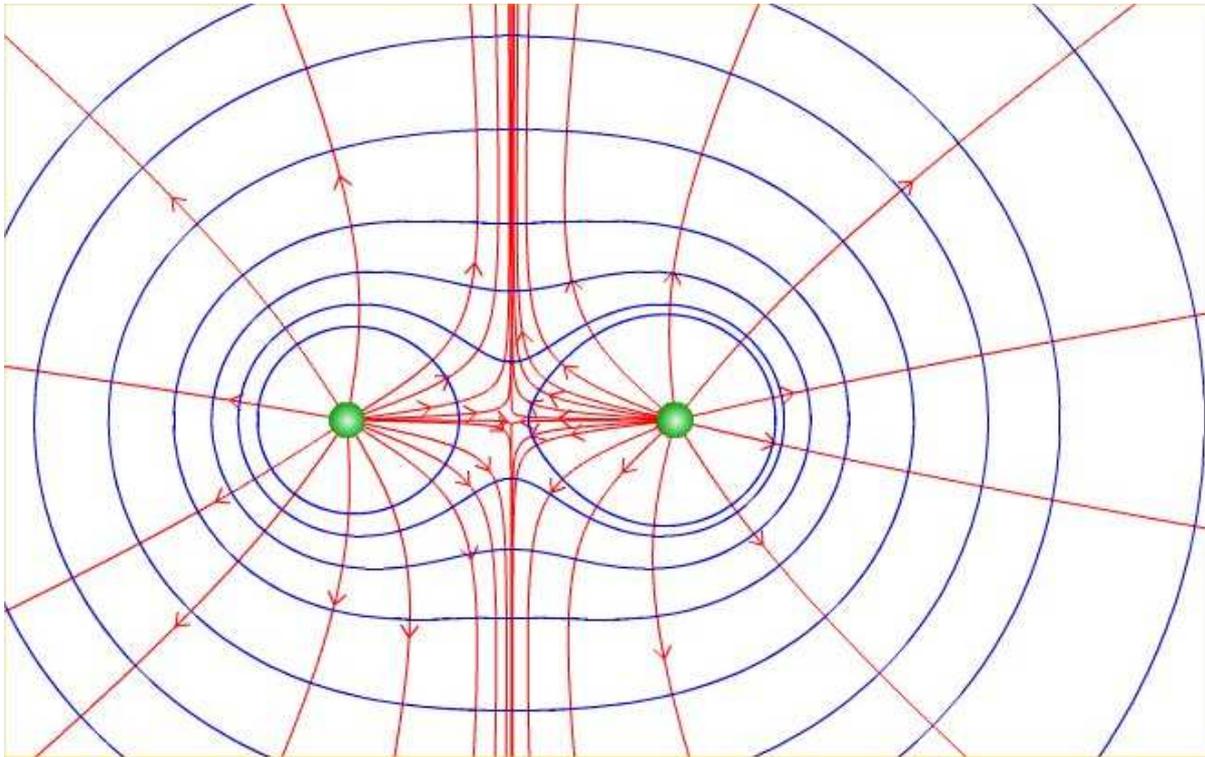


FIGURE 7 – Système de deux charges ponctuelles

5. Dédire de l'équation de Laplace la relation entre A , B et C .
6. Calculer le potentiel en un point de l'axe Oz très voisin de O . En déduire le coefficient C .

E. Condensateur plan

18. Association de condensateurs

Un condensateur plan, d'épaisseur e et de surface S , est relié à un générateur qui maintient à ses bornes une différence de potentiel U . On introduit une lame conductrice d'épaisseur $e_1 < e$ entre les armatures disposée de telle sorte que ses faces de surface identique à celle des armatures du condensateur soient parallèles à ces dernières.

1. Donner l'expression de la charge Q_0 du condensateur avant l'introduction de la lame.
2. Faire un bilan des charges présentes dans le système lorsque la lame métallique a été introduite.
3. En déduire la capacité de l'ensemble condensateur - lame.
4. Calculer la charge Q stockée par le système en fonction de Q_0 .

19. Le condensateur comme microphone

Un microphone-condensateur est constitué de deux armatures conductrices planes, de surface S , l'une P_1 fixe, l'autre P_2 pouvant se déplacer légèrement dans la direction Ox perpendiculairement à son plan. Soumis à une tension U_0 entre P_1 et P_2 , la charge est Q_0 lorsque la distance entre P_1 et P_2 est e . On donne les valeurs suivantes : $U_0 = 400$ V, $e = 3 \times 10^{-2}$ mm et $S = 15$ cm².

1. Calculer la capacité C_0 , la charge Q_0 et la force F_0 qui s'exerce entre les armatures. Pour cette dernière, on rappelle que la force subie par une armature est due au champ électrique créé par les charges portées par l'autre armature.

Le condensateur est alors débranché du générateur fournissant la tension U_0 .

2. Le passage d'une onde de pression (onde sonore) au niveau de la membrane du microphone (solidaire d'une des deux armatures du condensateur) entraîne un déplacement de celle-ci d'une valeur x telle que $x = e/100$. Afin d'enregistrer l'onde sonore doit-on utiliser un enregistreur de type voltmètre ou bien un enregistreur de type force comme un capteur piézoélectrique ? Justifier la réponse et discuter la sensibilité de la mesure.

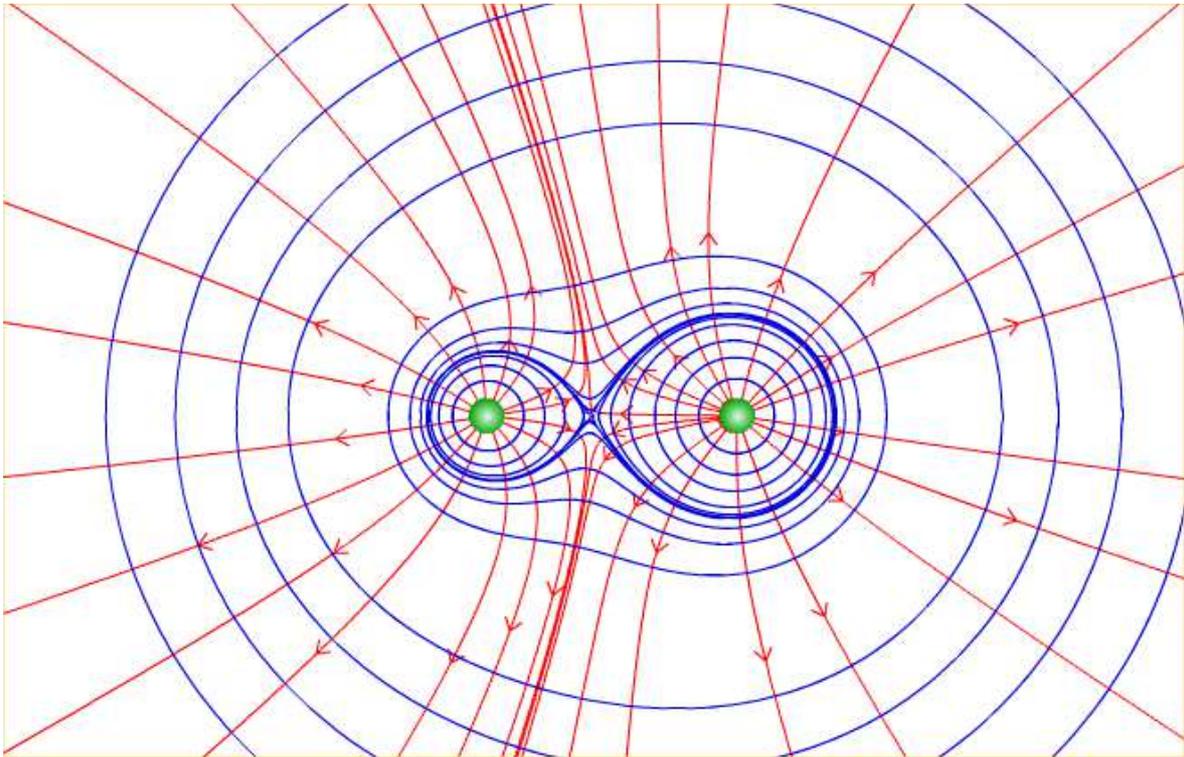


FIGURE 8 – Système de deux charges ponctuelles

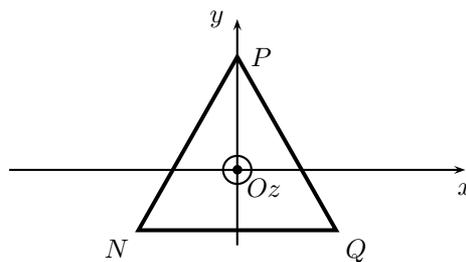


FIGURE 9 – Ensemble de trois charges

20. Électromètre à plateaux

Un électromètre à plateaux est constitué de deux plateaux métalliques identiques, formés chacun de deux quarts de disque métalliques de même rayon a , voir la figure 10. Les deux quarts de disques de la même armature sont disposés à 180° l'un de l'autre. Cet appareil permet de mesurer des tensions ou des quantités de charges.

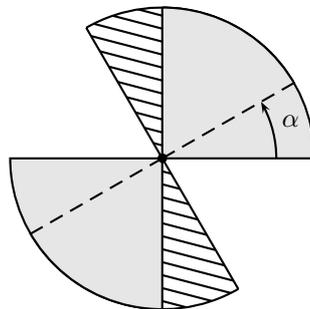


FIGURE 10 – Électromètre à plateaux vu du dessus

Ils sont disposés l'un au dessus de l'autre à la distance e et peuvent tourner l'un par rapport à l'autre d'un angle α . Dans leur position de repos, α vaut $\pi/2$. Lorsqu'ils tournent, un couple de rappel dû à un fil de torsion est exercé sur le plateau supérieur mobile, de valeur $\Gamma = -k(\alpha - \pi/2)$. On applique à l'ensemble une différence de potentiel V entre les plateaux. Cette différence de potentiel est maintenue constante.

1. Déterminer les charges prises ($Q, -Q$) par les plateaux et l'énergie électrostatique correspondante.

- Déterminer la position α de repos en fonction de V . Le couple de force électrostatique est donné, dans le cas général, par la formule $\Gamma_{el}d\alpha = \frac{1}{2}(VdQ - QdV)$.

21. Accéléromètre

On considère un condensateur plan de surface S , d'épaisseur e et de permittivité diélectrique ϵ_0 . Il est soumis à une différence de potentiel U .

- Exprimer la densité volumique d'énergie électrostatique dans le condensateur en fonction de U , e et ϵ_0 .
- Exprimer l'énergie totale du condensateur. En déduire l'expression de sa capacité.
- Calculer sa capacité sachant que $S = 16 \text{ cm}^2$, $e = 60 \text{ }\mu\text{m}$ et $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F}\cdot\text{m}^{-1}$.
- Montrer que chaque armature du condensateur subit une force électrostatique dirigée vers l'espace inter-armatures de norme $\frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}S$ où σ est la densité surfacique de charge de l'armature positive.

Un accéléromètre est constitué d'une masse parallélépipédique en alliage de titane, de dimension $4 \times 4 \times 1 \text{ cm}^3$, de masse $m = 72 \text{ g}$ et portée à un potentiel V_p . On constitue des paires d'électrodes, formant autant de condensateurs, en plaçant vis-à-vis des faces de la masse m des plaques portées à des potentiels différents, voir la figure 11.

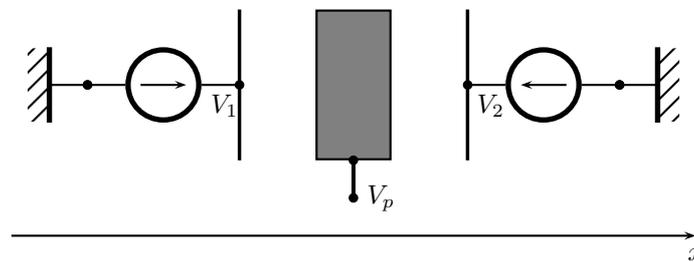


FIGURE 11 – Accéléromètre

- En supposant la géométrie du système parfaitement symétrique, en appelant S la surface des électrodes en regard et e la distance qui les sépare, exprimer la résultante des forces électrostatiques sur une direction perpendiculaire aux plus grandes surfaces de m . On note V_1 le potentiel d'une des deux plaques et V_2 celui de l'autre.
- Dans le cas où les deux plaques intervenant sont portées à des potentiels $+V$ et $-V$, donner l'expression simplifiée de la force résultante en fonction de V , V_p , S , e et ϵ_0 .
- Expliquer comment le dispositif peut-être utilisé en accéléromètre.

F. Condensateur relevant d'une géométrie non plane

22. Condensateur diédrique

On incline d'un angle α faible l'une des armatures d'un condensateur plan. On obtient la situation de la figure 12. L'angle représenté sur la figure est un peu exagéré. Géométriquement, les armatures sont des rectangles de profondeur h et de largeur $R_2 - R_1$, les rayons R_1 et R_2 étant déterminés par rapport au point O centre de rotation de la figure. On travaillera en coordonnées polaires (r, θ) de centre O . On négligera tout effet de bord. On note U la différence de potentiel positive existant entre les deux armatures.

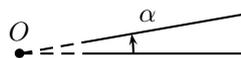


FIGURE 12 – Condensateur diédrique

- Justifier le fait que le potentiel des points de l'espace situés entre les deux armatures est indépendant de r . En déduire que le champ électrique est orthoradial.
- En utilisant l'équation de Maxwell-Gauss, montrer que la composante orthoradiale du champ électrique ne dépend pas θ .
- Calculer la circulation du champ électrique à la distance r de O , en déduire l'expression de sa norme en fonction de U , α et r .
- Évaluer la densité surfacique de charge en un point de l'armature positive situé à la distance r de O . En déduire la charge totale emmagasinée par le condensateur.

5. Montrer que sa capacité est alors donnée par $C = \frac{\varepsilon_0 h}{\alpha} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$.
6. Retrouver cette valeur en raisonnant à partir de la capacité d'un condensateur plan élémentaire de profondeur h mais de rayons r et $r + dr$. Justifier le calcul utilisé.
7. En déduire la capacité d'un ensemble de condensateurs constitués par ensemble d'armatures de centre O et de rayons R_1 et R_2 régulièrement décalées d'un même angle et formant un ensemble s'étendant de 0° à 360° . Les N cloisons paires sont reliées au potentiel de référence (0 V), les N cloisons impaires le sont au potentiel U .
8. Application numérique : $R_1 = 0,5\text{ cm}$; $R_2 = 5\text{ cm}$; $h = 3\text{ cm}$ et $N = 10$.

23. Condensateur pointe

On considère une pointe métallique au voisinage d'une surface elle aussi métallique que l'on assimile à son plan tangent. Ce dispositif peut avoir le comportement d'un condensateur et on le décrit alors comme constitué d'une armature circulaire de rayon R et d'une autre armature conique de demi-angle au sommet α limitée par le cercle de rayon $\rho = R$.

1. On néglige les effets de bord. Déterminer la géométrie et la dépendance dans un système de coordonnées sphériques du champ électrique.
2. En utilisant une équation locale de MAXWELL, déterminer l'expression du champ électrique.
3. En étudiant le champ électrique à la surface de l'armature conique, déterminer la capacité du condensateur pointe. Examiner le cas $\alpha \rightarrow \pi/2$. Conclure.

On donne : $\text{div } \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(E_\theta \sin \theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$ et $\int_\alpha^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin \theta} = -\ln\left(\tan \frac{\alpha}{2}\right)$.

G. Capacités et Condensateurs

24. Ligne bifilaire, modèle du fil infini

Une ligne bifilaire est formée (cf. figure 13) de deux fils conducteurs cylindriques \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , parallèles, de rayons respectifs a_1 et a_2 , dont les axes sont distants de d (avec $d \gg a_1$ et $d \gg a_2$), de grande longueur h (avec $h \gg d$). On note O_1 et O_2 les centres des deux cylindres et V_1 et V_2 les potentiels de chaque cylindre.

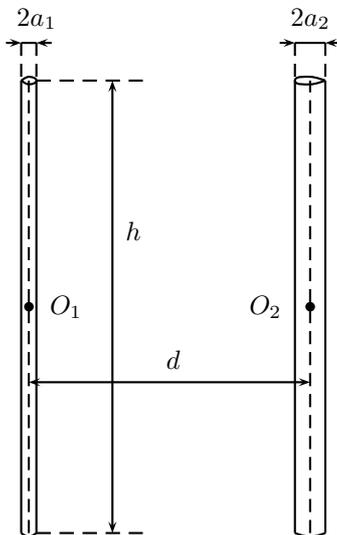


FIGURE 13 – Capacité d'une ligne bifilaire, modèle du fil infini

1. Expliquer pourquoi on peut considérer les densités surfaciques de charge σ_1 et σ_2 , portées par les faces latérales de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 , comme uniformes. On négligera la charge portée par les faces circulaires des cylindres.
2. Les cylindres sont en influence totale. Relier σ_1 , a_1 , σ_2 et a_2 .
3. Compte tenu des relations de comparaison entre a_1 , a_2 , d et h , on considère qu'on a affaire à une situation de 2 fils infinis de densité linéique λ_1 et λ_2 . Exprimer λ_1 et λ_2 en fonction de σ_1 et a_1 d'une part et de σ_2 et a_2 d'autre part.
4. Rappeler l'expression du potentiel V_{11} créé par le fil \mathcal{C}_1 à une distance r_1 de son axe.
5. En déduire l'expression du potentiel V créé par les 2 fils à des distances r_1 et r_2 de chaque fil.

6. Déterminer la capacité par unité de longueur $C_u = \frac{C}{h}$ de cette ligne bifilaire. On notera $a = \sqrt{a_1 a_2}$ la moyenne géométrique de a_1 et a_2 .
7. *Application numérique.* On donne $a_1 = a_2 = 1 \text{ mm}$, $d = 2 \text{ cm}$, $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. Déterminer C_u .

H. Conduction

25. Vitesse des porteurs de charge

Un fil métallique de section 1 mm^2 a une densité d'électrons de conduction de $6 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$. Chaque électron possède une charge $-e = -1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$. Si le fil fait circuler un courant électrique de 1 A , quelle est la vitesse moyenne de déplacement des électrons dans le fil ?

Proposition de réponses :

- a) $1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ b) $1 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ c) $1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ d) $0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$

26. Expérience de Rowland

Un disque métallique de rayon R , initialement neutre, et isolé, tourne uniformément autour de son axe à raisons de N tours par seconde. Une partie des électrons du métal (électrons de conduction) étant supposée se déplacer librement sous l'effet d'une force quelconque.

1. Montrer que, lorsque le disque tourne, l'équilibre relatif des électrons de conduction implique en chaque point l'existence d'un champ électrique dont on précisera la direction et le sens.
2. Calculer la différence de potentiel entre le centre et la périphérie du disque.
3. Conclure. A.N. : $N = 100 \text{ tours s}^{-1}$; $R = 10 \text{ cm}$; $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$.

27. Conduction électrique orthoradiale

Une pièce métallique trouée, constituée d'un métal homogène de conductivité σ , est assimilée à l'espace défini en coordonnées cylindriques $-h/2 < z < h/2$ et $R_1 < r < R_2$. La pièce porte de plus dans le demi plan $\theta = 0$ un trait de scie dont on négligera l'épaisseur, voir la figure 14. Les deux bords sont soumis à une différence de potentiel $U = V_1 - V_2$. La pièce est parcourue par des courants dont la densité volumique est \vec{j} , elle constitue un dipôle dont la résistance est R .

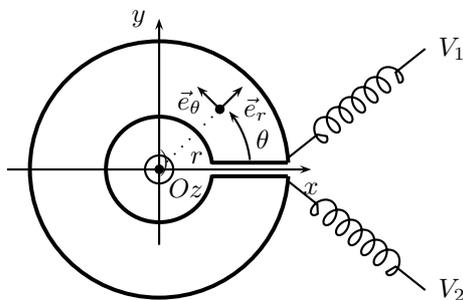


FIGURE 14 – Pièce métallique

On admet une structure circulaire des lignes de courant.

1. Préciser la forme de \vec{j} et de \vec{E} . Préciser les conditions aux limites.
2. Montrer que $\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$.
3. Expliciter $V(r, \theta, z)$.
4. Exprimer \vec{j} et \vec{E} . Calculer la résistance R .

On rappelle l'expression du laplacien en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

28. Le paratonnerre

On étudie une tige de paratonnerre. Lorsque le courant de foudre d'un impact direct sur un paratonnerre s'écoule par la prise de terre d'une installation, de fortes surtensions peuvent apparaître. La résistance de la prise de terre ne doit pas excéder 30Ω . Considérons une tige de paratonnerre cylindrique se terminant dans la terre par une prise de terre en forme de demi-sphère métallique pleine, de rayon a et placée dans un sol de résistivité $\rho = 100 \Omega \cdot \text{m}$. Un courant de foudre, d'intensité I , arrive sur la tige cylindrique fixée au centre de l'hémisphère. On supposera que pendant le coup de foudre l'intensité I est constante ; ainsi on se placera en régime permanent.

1. Quelle est la forme des lignes de courant dans la terre ?
2. En déduire, à la distance $r > a$, la densité de courant $j(r)$ et le potentiel $V(r)$, ce dernier étant nul à l'infini.
3. Déterminer la valeur du potentiel U pris par la demi-sphère.
4. La résistance de terre étant définie par $R = U/I$, calculer le rayon a de l'hémisphère de telle manière que la valeur de la résistance soit inférieure à 30Ω .
5. La tension de pas V_p étant définie comme la différence de potentiel entre deux points de la surface du sol distants de 1 m et situés sur la même droite issue du centre C de l'hémisphère, calculer cette tension de pas pour un courant $I = 50 \text{ kA}$ à 10 m puis à 100 m de la prise de terre.
6. Sachant que la résistance entre les deux pieds d'une personne est de 2500Ω , quel serait l'ordre de grandeur de l'intensité qui s'écoulerait à travers le corps de la personne ?
7. Sachant que l'intensité dans la personne ne doit pas dépasser 25 mA, à quelle distance doit-elle se trouver du point d'impact ?

Note : La foudre frappe la terre 50 à 100 fois par seconde. Le sol français reçoit en moyenne 800 000 impacts par an.

I. Dipôle électrostatique**29. Dipôle et spire chargée**

Un dipôle \vec{p} est placé au centre O d'une spire circulaire de rayon a portant la charge par unité de longueur λ , uniforme. \vec{p} est aligné sur l'axe de la spire (cf. figure 15).

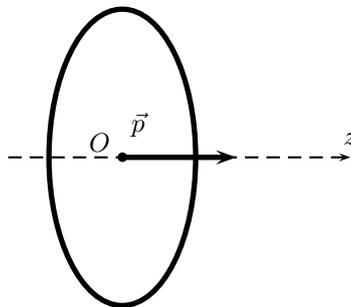


FIGURE 15 – Dipôle et fil circulaire

1. Calculer le champ électrique sur l'axe du dipôle.
2. En remarquant que le champ électrique n'est pas uniforme, calculer la résultante des efforts exercés sur le dipôle rigide.

30. Sphère dipolaire

Une sphère de centre O et de rayon R porte en un point quelconque M de sa surface la densité surfacique de charges $\sigma(M)$ donnée par $\sigma(M) = \sigma_0 \cos \theta$, où (R, θ, φ) désignent les coordonnées sphériques de M d'axe (Oz) .

1. Montrer que cette distribution de charges est dipolaire et calculer le moment dipolaire correspondant.
2. On admet que cette distribution crée un champ électrique uniforme colinéaire à (Oz) à l'intérieur de la sphère. Déterminer la valeur du champ intérieur.

31. Quadrupôle électrique

Les deux schémas de la figure 16 représentent les lignes de champ créées par un système de deux dipôles électrostatiques dont les moments dipolaires sont contenus dans le plan de la figure et situés sur l'axe (Ox) , aux points P_1 et P_2 d'abscisses $\pm a$.

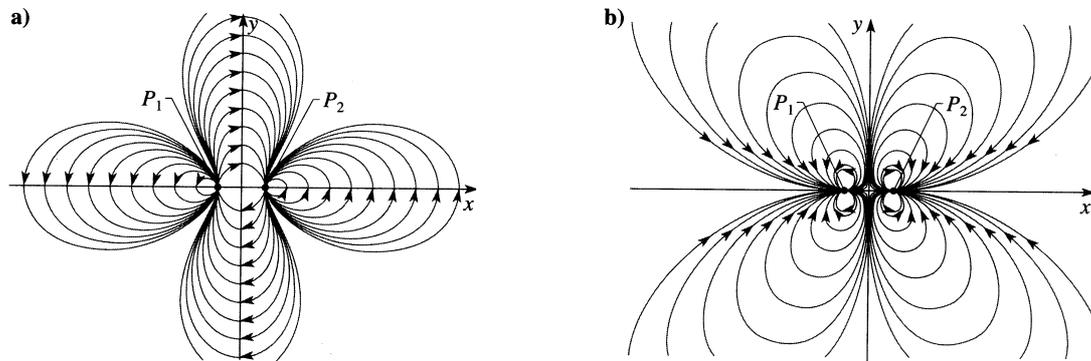


FIGURE 16 – Deux systèmes de deux dipôles

1. Que peut-on dire de la somme des moments dipolaires ?
2. Pour chaque cas, déterminer l'orientation des deux dipôles.
3. Calculer le champ à grande distance ($r \gg a$) dans le cas du schéma a). Vérifier que l'on obtient la carte des lignes de champ du schéma. On précisera les équations des lignes de champ et des équipotentielles à grande distance.