

# Exercices : 19 - Champ électrostatique

— Solutions —

## A. Calculs de champ et de potentiel

### 1. Théorème de superposition

Réponses : c) et b).

### 2. Énergie d'une goutte chargée

Réponses : au départ, on a  $E_i = \frac{(8Q)^2}{8\pi\epsilon_0 r} = \frac{8Q^2}{\pi\epsilon_0 r}$ . Lorsque la goutte est divisée en 8 gouttes, c'est le volume qu'il faut diviser par 8. C'est donc un volume  $V' = \frac{V}{8}$ . Or,  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ , on a aussi  $V' = \frac{4}{3}\pi r'^3$ . On en déduit que  $r' = r/2$ . L'énergie finale est  $E_f = 8 \times \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 r/2} = \frac{2Q^2}{\pi\epsilon_0 r}$ . L'énergie dépensée pour former les 8 gouttes est  $E_i - E_f = \frac{6Q^2}{\pi\epsilon_0 r}$ . Cela représente 75% de l'énergie initiale, cela correspond à la réponse b).

### 3. Sphère chargée

Réponses :  $\vec{E}$  selon  $\vec{e}_z$  par symétrie,  $d\vec{E} = \vec{e}_z \left(-\frac{\sigma a^2 \sin\theta d\theta d\varphi}{4\pi\epsilon_0 a^2} \cos\theta\right)$ ,  $\vec{E}(O) = \vec{e}_z \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{z_2^2 - z_1^2}{a^2}$ ,  $\vec{E}(O) = \vec{0}$  pour la sphère totalement chargée, prévisible par symétrie;  $\vec{E}(M) = \vec{e}_z \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \int_{\theta_2}^{\theta_1} \frac{\cos\theta \sin\theta d\theta}{1 - \frac{2z}{a} \cos\theta + \frac{z^2}{a^2}}$ ,  $\vec{E}(M) = \vec{0}$  pour la sphère totalement chargée, prévisible par le théorème de Gauss,  $M$  intérieur à la sphère.

### 4. Modélisation du noyau

Réponses :  $Q = \frac{8\pi}{15}\rho_0 a^3$ ,  $\vec{E}_{r>a} = \frac{2}{15\epsilon_0} \frac{\rho_0 a^3}{r^2} \vec{e}_r$ ,  $\vec{E}_{r<a} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} r \left(\frac{1}{3} - \frac{r^2}{5a^2}\right) \vec{e}_r$ , oui,  $V_{r>a} = \frac{2}{15\epsilon_0} \frac{\rho_0 a^3}{r}$ ,  $V_{r<a} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left(\frac{r^4}{20a^2} - \frac{r^2}{6} + \frac{a^2}{4}\right)$ , oui.

### 5. Peau chargée

Réponses : on peut estimer que lorsque  $z = 3a$ , alors  $\rho(z) \simeq 0$  d'où  $e = 3a$ ; comme la distribution est essentiellement présente sur une épaisseur  $e = 3a$ , lorsque  $|z| \gg a$  la tranche est vue comme infiniment fine, une charge  $d^3q = \rho(z) dx dy dz$  est contenue dans le volume  $d\tau = dx dy dz$ , la surface  $dx dy$  supporte le cumul de toutes les charges situées dans le parallélépipède de surface  $dx dy$  et de hauteur  $z \in [0; \infty[$ , on a donc  $d^2q = \sigma dx dy$  avec  $\sigma = \int_0^\infty \rho(z) dz$ , on trouve  $\sigma = \rho_0 a$ ; le champ électrique créé par le plan infini est  $\vec{E}_{z<0} = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$  et  $\vec{E}_{z>0} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ ; invariance en  $x$  et en  $y$ ,  $(M, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge,  $(M, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  est un plan de symétrie de la distribution de charge,  $\vec{E} = E_z(z) \vec{e}_z$ , on applique  $\text{div } \vec{E} = \frac{dE_z}{dz} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \exp -z$  pour  $z \geq 0$  et  $\frac{dE_z}{dz} = 0$  pour  $z < 0$ , on a donc  $E_z = \alpha$  pour  $z < 0$ , en se plaçant à  $z \rightarrow -\infty$ , on en déduit que  $\alpha = -\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0}$ , pour  $z \geq 0$   $E_z = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \exp -\frac{z}{a} + \beta$ , le modèle est volumique, le champ électrique est donc continu en  $z = 0$ , on trouve alors  $\vec{E}_{z \geq 0} = \frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} (1 - 2 \exp -\frac{z}{a}) \vec{e}_z$  et  $\vec{E}_{z < 0} = -\frac{\rho_0 a}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ .

### 6. Modélisation de la jonction PN d'une diode ou d'un transistor

Réponses :  $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_r \epsilon_0} \vec{e}_z$ ,  $\rho_1 L_1 + \rho_2 L_2 = 0$ ,  $\vec{E} = \vec{0}$  ou  $\vec{E}_{0 \leq z \leq L_2} = \frac{\rho_2}{\epsilon_r \epsilon_0} (z - L_2) \vec{e}_z$  ou  $\vec{E}_{-L_1 \leq z \leq 0} = \frac{\rho_1}{\epsilon_r \epsilon_0} (z + L_1) \vec{e}_z$ ,  $V_{0 \leq z \leq L_2} = \frac{\rho_2}{\epsilon_r \epsilon_0} \left(-\frac{z^2}{2} + L_2 z\right)$ ,  $V_{-L_1 \leq z \leq 0} = -\frac{\rho_1}{\epsilon_r \epsilon_0} \left(\frac{z^2}{2} + L_1 z\right)$ ,  $V_{z \geq L_2} = \frac{\rho_2}{2\epsilon_r \epsilon_0} L_2^2$ ,  $V_{z \leq -L_1} = \frac{\rho_1}{2\epsilon_r \epsilon_0} L_1^2$ ,  $V_0 = \frac{\rho_2 L_2}{2\epsilon_r \epsilon_0} (L_1 + L_2)$ ,  $\rho_2 = N_2 e$ ,  $\rho_1 = -N_1 e$ ,  $\delta \simeq \sqrt{\frac{2\epsilon_r \epsilon_0 V_0}{N_2 e}}$ ,  $\delta = 0,58 \mu\text{m}$ .

### 7. Potentiel de Yukawa

Réponses : Statistique de Boltzmann, densité proportionnelle à  $\exp -\frac{\text{Énergie}}{k_B T}$ ,  $n'_0 = n_0$ ;  $\rho(r) = -2n_0 e \text{sh} \frac{eV(r)}{k_B T}$ ,  $\rho(r) = -\frac{2n_0 e^2}{k_B T} V(r)$ ;  $\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr}\right) = \frac{2n_0 e^2}{\epsilon_0 k_B T} V(r)$ ;  $\frac{d^2 f}{dr^2} - \frac{f}{\lambda^2} = 0$  avec  $\lambda = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2n_0 e^2}}$ ,  $f(r) = A \exp -\frac{r}{\lambda} + B \exp \frac{r}{\lambda}$ ,  $B = 0$  sinon cela diverge, si  $r \rightarrow 0$   $V(r) = \frac{A}{r} (1 - \frac{r}{\lambda})$  assimilable à  $\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r}$ ,  $A = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $V(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \exp -\frac{r}{\lambda}$ ,  $V(r)$  décroît plus vite du fait de la répartition des ions positifs et négatifs autour de la particule chargée.

### 8. Electro-érosion par fil

Réponses : L'énoncé nous fait adopter un champ électrostatique de la forme  $\vec{E} = E(r) \vec{e}_r$  ce qui nous guide, vu la forme de la zone (Z) considérée, dans le choix de la surface de GAUSS (S) adaptée pour appliquer le théorème de GAUSS : on prend la surface d'un demi-cylindre de rayon  $r$  compris entre  $d/2$  et  $D/2$  et de longueur  $L$  (voir tracé en pointillés sur la figure 1).

Le théorème de GAUSS s'écrit ici (en présence de l'huile)  $\oiint_{(S)} \vec{E} \cdot d\vec{S}_{ext} = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$  où  $Q_{int}$  est la charge portée par la partie inférieure du fil (voir les signes + sur le schéma). Vu la direction du champ, il n'y a pas de flux par

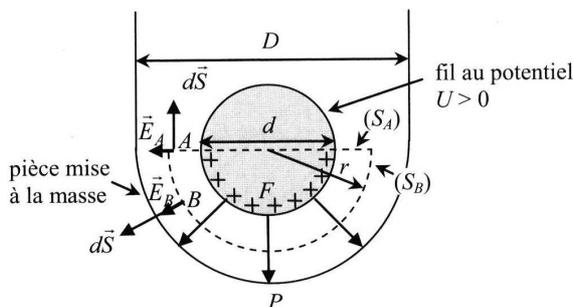


FIGURE 1 – Surface de GAUSS

les demi-disques latéraux du demi-cylindre et par la surface rectangulaire supérieure ( $S_A$ ). Il ne reste que la contribution de la partie inférieure ( $S_B$ ) :  $E(r) \pi r L = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$  donc  $\vec{E} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r L r} \vec{e}_r$ . Ce résultat montre déjà que l'évolution du champ électrostatique est en  $1/r$  (les autres grandeurs étant fixées). Pour faire le lien avec la différence de potentiel  $U$ , il reste à calculer la circulation du champ électrique (indépendante du chemin suivi en statique) dans le bon sens :  $U = V_{fil} - V_{pièce} = \int_F^P \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{d/2}^{D/2} E(r) dr = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 \epsilon_r L} \ln \frac{D}{d}$  donc  $\vec{E} = \frac{U}{r \ln \frac{D}{d}} \vec{e}_r$ . L'arc électrique est déclenché dès que l'ionisation locale de l'huile est déclenchée sur tout un chemin entre le fil et la pièce. Pour cela, il faut que le champ minimal dans la zone (Z) dépasse le champ disruptif  $E_{rupt} = 100 \text{ kV} \cdot \text{cm}^{-1} = 100 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ , soit  $E_{min} = \frac{2U}{D \ln \frac{D}{d}} > E_{rupt}$  d'où la différence de potentiel minimale  $U_{min} = \frac{D}{2} E_{rupt} \ln \frac{D}{d} = 35 \text{ V}$ . Une telle valeur est tout à fait réalisable. Le fil subit, tout comme la pièce, des arcs électriques et perd donc aussi de la matière. Si, lors de la découpe, on ne le faisait pas défilier, il finirait rapidement par casser !

### 9. Énergie de liaison d'un noyau

Réponses : il est assez logique que le volume  $V$  d'un noyau soit proportionnel au nombre  $A$  de nucléons (en négligeant les interstices) et ce volume est proportionnel à  $R^3$  donc le rayon nucléaire  $R$  tend à évoluer en  $A^{1/3}$ . Pour le noyau de chlore, on obtient (sachant que  $1 \text{ fm} = 1.10^{-15} \text{ m}$ )  $R = r_0 A^{1/3} = 3,9 \text{ fm}$ . On retiendra que l'ordre de grandeur du rayon d'un noyau atomique est le femtomètre. En ce qui concerne la densité volumique de charge,  $\rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3} = 1,1 \cdot 10^{25} \text{ C} \cdot \text{m}^{-3}$ . L'interaction électrostatique est déstabilisante pour le noyau, les protons (chargés) se repoussant à cause de celle-ci : elle abaisse donc l'énergie de liaison et l'énergie associée ne peut donc pas être le terme positif  $vA$ . De plus, augmenter le nombre de neutrons à nombre de protons fixé dilue la charge du noyau et doit donc tendre à stabiliser le noyau et augmenter l'énergie de liaison. Le terme  $-sA^{2/3}$  ne convient donc pas ! On peut donc conclure que le terme issu de l'interaction électrostatique du noyau est  $-cZ^2/A^{1/3}$ . Le noyau est principalement stabilisé par l'interaction forte entre les nucléons (interaction nucléaire attractive). Sans cette dernière, l'interaction électrostatique ferait exploser le noyau (répulsion des protons et neutrons indifférents). Le terme  $vA$  est une énergie de liaison en volume : c'est le terme principal qui résulte de l'interaction forte attractive et qui tend bien à augmenter l'énergie de liaison. Tout se passe comme si  $v$  était l'énergie d'interaction forte moyenne par nucléon et on obtient la contribution totale en multipliant par le nombre  $A$  de nucléons. Le terme  $-sA^{2/3}$  est une énergie de déstabilisation de surface : les nucléons à la surface du noyau sont moins liés que ceux au cœur du noyau et il en résulte une perte globale d'énergie de liaison, proportionnelle à la surface  $4\pi R^2$  de la boule, donc à  $A^{2/3}$ . Ce terme de surface est analogue au terme de tension superficielle dans une goutte liquide. C'est lui qui tend d'ailleurs à donner une forme sphérique à une goutte. Le modèle du noyau présenté ici est aussi appelé modèle de la goutte. On se place à une étape de construction quelconque : une boule  $B_r$  de rayon  $r$  chargée uniformément en volume est déjà constituée (charge  $q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$  avec  $\rho = \frac{3Q}{4\pi R^3}$  de la boule finale). L'opérateur construit une couche d'épaisseur  $dr$  supplémentaire de même densité volumique de charge  $\rho$ , donc il apporte une charge  $dq = 4\pi r^2 dr \rho$  depuis l'infini, où le potentiel électrostatique de la boule  $B_r$  est nul, jusqu'à la distance  $r$ , où il vaut  $V(r) = \frac{q(r)}{4\pi \epsilon_0 r} = \frac{\rho r^2}{3\epsilon_0}$  (analogie avec la charge ponctuelle  $q(r)$  placée au centre de symétrie  $O$  de la boule). Le travail élémentaire à fournir par l'opérateur (qui doit équilibrer à chaque instant l'interaction électrostatique) est égal à la variation d'énergie potentielle de la charge  $dq$  de l'infini à la distance  $r$ , soit  $\delta W_{op} = dq[V(r) - 0] = \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr$ . Ce travail est positif car l'opérateur doit constamment vaincre la force de répulsion coulombienne entre charges de même signe ! L'énergie de constitution de la sphère de rayon  $R$  complète (état initial  $I$  où toutes les charges sont à l'infini ; état final  $F$  avec la boule constituée) est ainsi  $\mathcal{E} = \int_{I \rightarrow F} \delta W_{op} = \int_0^R \frac{4\pi \rho^2}{3\epsilon_0} r^4 dr = \frac{4\pi \rho^2 R^5}{15\epsilon_0}$  soit  $\mathcal{E} = \frac{3Q^2}{20\pi \epsilon_0 R}$ . Le résultat est positif puisque, comme déjà dit, l'opérateur fournit un travail pour rapprocher des charges de même signe. Dans un cas analogue gravitationnel sans charge, le signe serait opposé (car les masses subissent une attraction gravitationnelle). Revenons à la formule de BETHE et WEIZSÄCKER. Le résultat précédent est l'opposé de la contribution énergétique électrostatique car celle-ci est déstabilisante. Par conséquent, par identification

sachant que  $Q = Ze$  et  $R = r_0 A^{1/3}$ , il vient  $c = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0} = 1,2 \cdot 10^{-13} \text{ J} = 0,72 \text{ MeV}$ . Pour le noyau de chlore, la contribution électrostatique déstabilisatrice est donc  $-c \frac{Z^2}{A^{1/3}} = 64 \text{ MeV}$ . Ce noyau étant stable, cela veut dire que l'interaction forte intervient à hauteur d'une énergie plus élevée stabilisante! Casser le noyau peut permettre de récupérer de l'énergie de liaison. Il est surprenant de voir que lorsqu'on n'a qu'un seul proton, qui ne se repousse pas lui-même, il reste une contribution de répulsion électrostatique si l'on travaille avec le facteur  $Z^2$ . Du coup, on peut choisir de modifier la formule semi-empirique de BETHE et WEIZSÄCKER en remplaçant ce facteur par  $Z(Z-1)$  qui est bien nul pour  $Z=1$ . Le terme  $\gamma(A, Z)$  non détaillé intègre en fait deux effets quantiques : un effet d'asymétrie (noyaux plus stables lorsqu'ils comportent le même nombre de neutrons et de protons) et un effet d'appariement (rôle du spin des nucléons).

## B. Gravitation

### 10. Champ de gravitation terrestre

Réponses : Tout plan contenant le centre  $O$  est de symétrie pour la répartition de masse donc le champ gravitationnel est radial. De plus, il y a invariance par toute rotation de centre  $O$  donc la composante radiale ne dépend que de  $r$  :  $\vec{G}_T = -G_T(r) \vec{e}_r$ . On applique le théorème de GAUSS gravitationnel à une sphère  $\mathcal{S}$  de centre  $O$  et de rayon  $r$  (contenant une masse  $M_{int}(r)$ ) et il vient  $-4\pi r^2 G_T(r) = -4\pi G M_{int}(r)$ . En explicitant la masse intérieure suivant les cas  $r \leq R_T$  et  $r \geq R_T$ , on parvient ensuite aisément aux résultats finaux après simplification :  $\vec{G}_{T,int}(M) = -\frac{4\pi\rho G}{3} r \vec{e}_r = -\frac{GM_T}{R_T^3} r \vec{e}_r$  et  $\vec{G}_{T,ext}(M) = -\frac{GM_T}{r^2} \vec{e}_r$ . Le second résultat est général à toute distribution de masse à symétrie sphérique comme déjà vu en cours (équivalence à une masse ponctuelle  $M_T$  placée en  $O$  du point de vue du champ extérieur). Il était aussi possible de travailler dans le domaine électrostatique et de faire ensuite l'analogie électrostatique-gravitation correctement. On calcule la norme en surface (sachant que vous connaissez par cœur  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ ) :  $\mathcal{G}_0 = \frac{GM_T}{R_T^2} = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Cette valeur correspondant au champ de pesanteur terrestre. Les champs extérieurs à la Terre sont identiques car ils sont égaux à celui d'une masse ponctuelle  $M_T$  placée en  $O$ , comme pour toute distribution de masse  $M_T$  à symétrie sphérique. La valeur  $\mathcal{G}_0$ , en  $R_T$ , est donc aussi inchangée. Dans ce modèle, la symétrie sphérique de la répartition de masse étant conservée, on a toujours  $\vec{G}_T = -G_T(r) \vec{e}_r$  et le théorème de GAUSS gravitationnel pour une sphère de centre  $O$  et de rayon  $r$  conduit à  $-4\pi r^2 G_T(r) = -4\pi G M_{int} = -4\pi G \int_0^r \rho(r') 4\pi r'^2 dr'$  soit  $r^2 G_T(r) = 4\pi G \int_0^r \rho(r') r'^2 dr'$ . Pour extraire  $\rho(r)$ , il faut dériver cette relation par rapport à  $r$ , d'où  $\frac{d[r^2 G_T(r)]}{dr} = 4\pi G \rho(r) r^2$  donc  $\rho(r) = \frac{1}{4\pi G r^2} \frac{d[r^2 G_T(r)]}{dr}$ . Il ne reste qu'à exploiter la courbe de l'énoncé pour conclure. Dans le noyau terrestre, le champ gravitationnel est proportionnel à  $r$  et passe par la valeur  $\mathcal{G}_0$  en  $r = R_1$ , donc on trouve la masse volumique uniforme  $\rho(r < R_1) = \frac{3\mathcal{G}_0}{4\pi G R_1} = \frac{3M_T}{4\pi R_1 R_T^2} = 10,0 \cdot 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Dans le manteau terrestre, le champ gravitationnel est uniforme en valeur (valeur  $\mathcal{G}_0$ ), donc  $\rho(R_1 < r \leq R_T) = \frac{\mathcal{G}_0}{2\pi G r} = \frac{M_T}{2\pi R_T^2 r}$ . On en déduit que  $\rho(r = R_1^+) = 6,68 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  et  $\rho(r = R_T) = 3,66 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### 11. Champ de gravitation dans une grotte

Réponses :  $\vec{G} = -\frac{4\pi G \mu}{3} \vec{OO}'$ , uniforme ;  $V = -\frac{4\pi G \mu R^3}{3} (\frac{1}{r} - \frac{R'}{R^3} \frac{1}{r'})$ ,  $V = -\frac{4\pi G \mu R^3}{3r} (1 - \frac{R'^3}{R^3} (1 + \frac{a}{r} \cos \theta))$ .

### 12. Champ de pesanteur au sommet d'une montagne

Réponses : force est de constater que les lois de force de COULOMB (électrostatique entre charges ponctuelles fixes) et de NEWTON (gravitation entre masses ponctuelles) sont analogues  $\vec{F}_{\text{COULOMB}, q_1 \rightarrow q_2} = q_2 \vec{E}(M_2) = \frac{q_1 q_2}{4\pi \epsilon_0 M_1 M_2^3} \vec{M}_1 \vec{M}_2$  et  $\vec{F}_{\text{NEWTON}, m_1 \rightarrow m_2} = m_2 \vec{G}(M_2) = -G \frac{m_1 m_2}{M_1 M_2^3} \vec{M}_1 \vec{M}_2$ . On peut alors poser une analogie formelle : pour les formules, une charge  $q$  est analogue à une masse  $m$ , un champ électrostatique  $\vec{E}$  est analogue à un champ gravitationnel  $\vec{G}$  et  $1/(4\pi \epsilon_0)$  est analogue à  $-G$  (attention au signe : une interaction électrostatique entre charges de même signe est répulsive alors que l'analogie gravitationnel est attractif). Forts de cette analogie électrostatique-gravitation, on peut écrire le champ gravitationnel demandé en notant que la masse surfacique est  $\mu dz$  :  $d\vec{G}(M) = -2\pi G \mu dz (1 - \cos \alpha) \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est le vecteur unitaire colinéaire à l'axe du cône et orienté de sa base vers le sommet  $O$ . Pour obtenir le champ gravitationnel produit au sommet  $O$  d'un cône de masse volumique uniforme  $\mu$  avec la géométrie modèle de la montagne, on peut appliquer le théorème de superposition (par linéarité des équations fondamentales de l'électromagnétisme). On intègre le champ en  $M = O$  sur tous les disques empilés constituant le cône et il vient aisément (car  $\alpha$  est indépendant de  $z$ !)  $\vec{G}(O) = -2\pi G \rho h (1 - \cos \alpha) \vec{u}$ . D'après le résultat précédent et en négligeant l'effet inertiel d'entraînement (de sorte que  $\vec{G} \simeq \vec{g}$ ), on tire  $g' = 2\pi G \mu h (1 - \cos \alpha)$  et donc  $g_1 = g_0 + g'$ , d'où  $\Delta g = 2\pi G \mu h (1 - \cos \alpha) = 1,7 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Même si la forme de la montagne est irréaliste, on a là un ordre de grandeur correct. Cette variation de  $g$  est mesurable (en pratique, on ne mesure pas tout à fait ceci en raison de l'anomalie de BOUGER, le socle d'une montagne étant moins dense).

### 13. Âge gravitationnel et Relativité générale

Réponses : la Terre est à symétrie sphérique, on peut appliquer le théorème de GAUSS gravitationnel ou l'équation locale associée  $\text{div } \vec{G} = -4\pi G\rho$  où  $\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$  est la masse volumique uniforme de la Terre. On trouve un champ gravitationnel pour  $r \geq R$   $\vec{G} = -\frac{GM}{r^2}\vec{e}_r$  et pour  $r \leq R$   $\vec{G} = -\frac{GM}{R^3}r\vec{e}_r$ . Le potentiel gravitationnel est tel que  $\vec{G} = -\text{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$ . Avec la constante prise nulle à l'infini, on trouve que  $V_{r \geq R} = -\frac{GM}{r}$  et  $V_{r \leq R} = -\frac{GM}{2R^3}(3R^2 - r^2)$ . On a donc  $V_{\text{surface}} - V_{\text{centre}} = \frac{GM}{2R}$ . On a donc  $\mathcal{A}_{\text{surface}} - \mathcal{A}_{\text{centre}} \simeq \mathcal{A}_{\text{moy}} \frac{GM}{2Rc^2}$ . Si on fait l'application numérique, on trouve que l'écart d'âge est d'un peu plus d'un an! FEYNMAN s'est trompé dans l'application numérique... Si l'on note  $m$  la masse de l'horloge en chute libre, on écrit la conservation de l'énergie mécanique entre son départ à la surface où elle mesure  $T_0$  et le centre où sa vitesse est  $v$  en restant sur une expression classique de son énergie cinétique puisque  $v \ll c$ ,  $mV(R) = mV(0) + \frac{1}{2}mv^2$  d'où la relation  $v^2 = 2(V(R) - V(0))$ . La période mesurée par l'horloge arrivant au centre est  $T_c = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \simeq T_0(1 + \frac{v^2}{2c^2})$ . En utilisant l'expression de  $v^2$ , on trouve bien  $T_c = T_0(1 + \frac{V(R) - V(0)}{c^2})$  ce qui correspond à la formule issue de la Relativité générale.

### 14. Noyau galactique actif

Réponses : L'angle est  $\alpha = \frac{R}{l} \simeq 5 \times 10^{-11}$  rad. La diffraction est responsable d'une divergence angulaire  $\frac{\lambda}{h}$  si  $h$  est la taille du télescope. On doit donc avoir  $h \geq \frac{\lambda}{\alpha}$ , on trouve  $h \geq 4 \times 10^9$  m, c'est totalement inenvisageable pour un seul appareil. Pour un mouvement circulaire uniforme autour de l'attracteur, on a  $m\frac{v_1^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$ , on considère que le rayon de l'orbite est  $R$  puisque l'on parle d'orbite basse. On a donc  $v_1 = \sqrt{\frac{GM}{R}}$ . Pour obtenir la vitesse de libération, il faut que l'énergie mécanique soit au minimum nulle d'où  $\frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{GmM}{R} = 0$  d'où  $v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2}v_1$ . On obtient un trou noir pour  $R = \frac{2GM}{c^2}$ . Si on considère le Soleil, on a  $R = \frac{2GM_\odot}{c^2} \simeq 3$  km. La masse volumique du trou noir serait  $\mu = \frac{3M_\odot}{4\pi R^3} \simeq 1,8 \times 10^{19}$  kg · m<sup>-3</sup>. Si on considère Sagittarius A\*, on obtient  $\mu_{A^*} = \frac{3M}{4\pi R^3} \simeq 1,1 \times 10^6$  kg · m<sup>-3</sup>. On utilise la troisième loi de KÉPLER  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$  pour en déduire que  $a = \left(\frac{MGT^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}$ . On trouve  $a \simeq 1,4 \times 10^{14}$  m. En utilisant la formule fournie et le fait que  $d_{\min} + d_{\max} = 2a$ , on arrive à  $d_{\min} = a(1 - e)4,2 \times 10^{13}$  m. L'étoile s'approche de Sagittarius A\* mais ne passe pas en dessous du rayon  $R$  de l'horizon du trou noir. En utilisant le théorème de GAUSS sur une sphère de rayon  $r \leq R$ , on trouve que le champ gravitationnel est  $\vec{G} = -\frac{4\pi G\mu}{3}r\vec{e}_r$ . Dans le référentiel du trou noir supposé galiléen, on peut donc écrire que l'accélération de l'étoile est  $\vec{a} = \vec{G}$ . On a une force centrale et donc une accélération centrale. Le moment cinétique est conservé, la constante des aires est  $C = r^2\dot{\theta}$ . L'accélération radiale est  $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{4\pi G\mu}{3}r$ . On peut utiliser la constante des aires pour obtenir  $\ddot{r} = \frac{C^2}{r^3} - \frac{4\pi G\mu}{3}r$ . Si on multiplie par  $m\dot{r}$  et qu'on intègre, on obtient l'énergie cinétique radiale de l'étoile  $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$  et aussi l'énergie potentielle effective  $E_p^{eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + \frac{2\pi G\mu m}{3}r^2$ . Cette énergie potentielle présente une forme de cuvette avec un minimum qui correspond au mouvement circulaire avec  $r_c = \left(\frac{3C^2}{4\pi G\mu}\right)^{1/4}$ . Si l'énergie mécanique est supérieure à la valeur correspondant à  $r_c$ , alors le mouvement est périodique fermé avec un rayon variable. On imagine qu'il est sans doute elliptique comme l'énoncé nous invite à le dire.

### 15. Aplatissement de Saturne

Réponses : comme l'astre possède une symétrie sphérique, on sait que tout se passe comme la masse de toute la planète était placée en son centre. Le champ gravitationnel est  $\vec{G} = -\frac{Gm}{r^2}\vec{e}_r$ . Par définition du potentiel gravitationnel,  $\vec{G} = -\text{grad}V = -\frac{dV}{dr}\vec{e}_r$ . On en déduit par intégration que  $V(r) = -\frac{Gm}{r}$  à condition de retenir la condition traditionnelle faisant que le potentiel est nul à l'infini. Pour l'étude de Saturne, on pratiquera le théorème de superposition avec 3 boules pleines, la boule de rayon  $R$  et de masse volumique  $\rho$  puis deux boules identiques centrées en  $A$  et  $B$  de masse volumique  $-\rho$  afin de créer par la superposition les cavités intérieures à Saturne. Par application du théorème de superposition, on a  $V(M) = V_1 + V_2 + V_3$  avec  $V_1 = -\frac{G4\pi R^3\rho}{3r}$ ,  $V_2 = \frac{G4\pi a^3\rho}{3AM}$  et  $V_3 = \frac{G4\pi a^3\rho}{3BM}$ . Il faut calculer les distances  $AM$  et  $BM$  puis tenir compte du fait que  $r \gg R$ . On a  $\vec{AM} = \vec{AO} + \vec{OM} = \vec{OM} - \vec{OA}$ . On passe au carré pour obtenir  $AM^2 = r^2 + b^2 - 2rb\sin\alpha$ . On a donc  $\frac{1}{AM} = \frac{1}{r}(1 - \frac{2b\sin\alpha}{r} + \frac{b^2}{r^2})^{-1/2}$ . Il faut effectuer un développement limité à l'ordre 2 parce que l'on peut prévoir par les propriétés de symétries par rapport au plan médian que la fonction obtenue sera paire pour le développement lié aux deux cavités. Nous savons que  $(1 + \varepsilon)^{-1/2} = 1 - \frac{\varepsilon}{2} + \frac{3\varepsilon^2}{8}$  avec  $\varepsilon = -\frac{2b\sin\alpha}{r} + \frac{b^2}{r^2}$ . Dans le facteur  $\varepsilon^2$ , on ne conservera que les termes en  $\frac{b^2}{r^2}$ . Après calcul, on obtient  $\frac{1}{AM} = \frac{1}{r}(1 + \frac{b}{r}\sin\alpha + \frac{b^2}{2r^2}(3\sin^2\alpha - 1))$ . Pour déterminer  $BM$ , il suffit de modifier  $b$  en  $-b$ . On obtient  $\frac{1}{BM} = \frac{1}{r}(1 - \frac{b}{r}\sin\alpha + \frac{b^2}{2r^2}(3\sin^2\alpha - 1))$ . En utilisant ces deux expressions, on peut arriver à l'expression du potentiel gravitationnel de Saturne à grande distance :  $V(r, \alpha) = -\frac{G4\pi\rho}{3r}(R^3 - a^3(2 + \frac{b^2}{r^2}(3\sin^2\alpha - 1)))$ . Cette expression montre que l'anisotropie est perdue du fait la

présence des cavités, le potentiel dépend de  $\alpha$ . À grande distance, le terme dominant sera celui de la boule de masse volumique  $\rho$  en  $V \simeq -\frac{G4\pi\rho}{3r}(R^3 - 2a^3)$ . Il y a certaines similitudes entre cette situation et celle du dipôle en électrostatique mais aussi une différence importante puisque la charge totale pour le dipôle est nulle ( $-q, +q$ ) alors que la masse totale ne l'est pas d'où le terme dominant mis en évidence avant.

## C. Cartes de champ

### 16. Champ électrique de deux charges ponctuelles

## D. Propriétés de symétries

### 17. Développement d'un potentiel de trois charges

Réponses :  $V_0 = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0 a}$ ,  $\alpha = \beta = \gamma = 0$ ,  $D = F = G = 0$ ,  $V(\theta) = V(\theta + \frac{2\pi}{3})$  avec  $x = r \cos \theta$  et  $y = r \sin \theta$  d'où  $A = B$ ,  $\Delta V = 0$  d'où  $A + B + C = 0$  ou  $C = -2A$ ,  $V = \frac{3q}{4\pi\epsilon_0\sqrt{a^2+z^2}}$  par DL  $V = V_0 - \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 a^3} z^2$ ,  $C = -\frac{3q}{8\pi\epsilon_0 a^3}$ .

## E. Condensateur plan

### 18. Association de condensateurs

Réponses :  $Q_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e} U$ , série  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e-e_1}$ ,  $Q = Q_0 \frac{e}{e-e_1}$ .

### 19. Le condensateur comme microphone

Réponses :  $C_0 = \frac{\epsilon_0 S}{e} = 0,44 \text{ nF}$ ,  $Q_0 = C_0 U_0 = 1,8 \times 10^{-7} \text{ C}$ ,  $F_0 = Q_0 \frac{U_0}{2e} = 1,2 \text{ N}$ ,  $Q = Q_0 \forall e$ ,  $U = \frac{Q_0}{\epsilon_0 S} e$ ,  $F = \frac{Q_0}{2} \frac{U}{e} = \frac{Q_0^2}{2\epsilon_0 S} = \text{Cte}$ , type voltmètre,  $\frac{\Delta U}{U} = \frac{\Delta e}{e}$ .

### 20. Électromètre à plateaux

Réponses :  $Q = \frac{\epsilon_0 a^2}{e} (\frac{\pi}{2} - \alpha) V$ ,  $E = \frac{\epsilon_0 a^2}{2e} (\frac{\pi}{2} - \alpha) V^2$ ;  $\alpha_{repos} = \frac{\pi}{2} - \frac{\epsilon_0 a^2}{2ek} V^2$ .

### 21. Accéléromètre

Réponses :  $\vec{E}$  uniforme,  $E = \frac{U}{e}$  et  $u_e = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{\epsilon_0 U^2}{2e^2}$ ;  $E_{tot} = u_e S e = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{2e} U^2$ ,  $C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$ ;  $C = 236 \text{ pF}$ ; une armature ne subit que le champ créé par l'autre armature  $E_{autre} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ , la charge étant  $\sigma S$ , on a  $F = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} S = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{2e^2}$ ;  $F = \frac{\epsilon_0 S}{2e^2} [(V_p - V_1)^2 - (V_p - V_2)^2]$ ;  $F = \frac{2\epsilon_0 S}{e^2} V V_p$ ; si cette force équilibre le poids et qu'une accélération verticale vient à se produire, pour maintenir la masse à l'équilibre, il faut appliquer une tension pour compenser, on obtient ainsi une mesure de l'accélération par le biais de la tension.

## F. Condensateur relevant d'une géométrie non plane

### 22. Condensateur diédrique

Réponses : pas d'effet de bord et conducteur équipotentiel donc invariance en  $r$ ,  $\frac{\partial V}{\partial r} = 0$ ,  $\vec{E} = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e}_\theta$ ,  $\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}$ ,  $E_\theta = -\frac{U}{r\alpha}$ ,  $\sigma = \frac{\epsilon_0 U}{\alpha r}$ ,  $Q = \frac{\epsilon_0 U}{\alpha} h \ln \frac{R_2}{R_1}$ ,  $dC = \frac{\epsilon_0 h dr}{\alpha r}$  en parallèle  $C = \int dC$ ,  $C = 2N^2 \frac{\epsilon_0 h}{\pi} \ln \frac{R_2}{R_1} = 3,9 \times 10^{-11} \text{ F}$ .

### 23. Condensateur pointe

Réponses : Invariance en  $\varphi$ ,  $E_r(\theta = \alpha) = E_r(\theta = \frac{\pi}{2}) = 0 \forall r \forall \alpha$ ; les équipotentielles sont des cônes, pas d'effets de bords;  $\vec{E} = -\frac{U}{r} \frac{1}{\ln \tan \alpha/2} \frac{1}{\sin \theta} \vec{e}_\theta$ ;  $C = -\frac{2\pi\epsilon_0 R}{\ln \tan \alpha/2}$ ;  $C \rightarrow \infty$ , condensateur plan de capacité infinie.

## G. Capacités et Condensateurs

### 24. Ligne bifilaire, modèle du fil infini

Réponses :  $\sigma_1 a_1 + \sigma_2 a_2 = 0$ ;  $\lambda_1 = \sigma_1 2\pi a_1$ ,  $\lambda_2 = \sigma_2 2\pi a_2$ ;  $V_{11}(r_1) = -\frac{\lambda_1}{2\pi\epsilon_0} \ln r_1 + \text{Cte}$ ,  $V = \frac{\sigma_1 a_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r_2}{r_1} + \text{Cte}$ , d'où  $V_1 = V(r_1 = a_1, r_2 = d - a_1)$ ,  $V = V_1 + \frac{\sigma_1 a_1}{\epsilon_0} \ln \frac{r_2 a_1}{r_1 (d - a_1)}$ ,  $V_1 - V_2 = \frac{\sigma_1 a_1}{\epsilon_0} \ln \frac{d^2 - (a_1 + a_2)d + a^2}{a^2}$ ,  $Q_1 = \sigma_1 2\pi a_1 h$ ,  $C_u = \frac{1}{h} \frac{Q_1}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln \frac{d^2 - (a_1 + a_2)d + a^2}{a^2}}$ ,  $C_u = 9,4 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$ .

## H. Conduction

### 25. Vitesse des porteurs de charge

Réponses : la densité volumique de courant est  $j = \frac{I}{S} = 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-2}$ . Par définition, elle s'exprime aussi par  $j = nev_{\text{moy}}$  d'où  $v_{\text{moy}} = \frac{j}{ne}$ . On trouve  $v_{\text{moy}} = 0,1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$ , c'est la réponse d).

### 26. Expérience de Rowland

Réponses :  $\vec{E} = \frac{m4\pi^2 N^2}{e} r \vec{e}_r$  ;  $\Delta V = \frac{m2\pi^2 N^2 R^2}{e} \simeq 10^{-8} \text{ V}$ .

**27. Conduction électrique orthoradiale**

Réponses :  $V = V_1 - U \frac{\theta}{2\pi}$  ;  $\vec{E} = \frac{U}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  ;  $\vec{j} = \frac{\gamma U}{2\pi r} \vec{e}_\theta$  ;  $R = \frac{2\pi}{\gamma h} \frac{1}{\ln R_2/R_1}$ .

**28. Le paratonnerre**

Réponses : radial,  $j = \frac{I}{2\pi r^2}$ ,  $V(r) = \frac{\rho l}{2\pi r}$  ;  $R = \frac{\rho}{2\pi a}$ ,  $a = 0,53 \text{ m}$  ;  $V_{p10 \text{ m}} = 7235 \text{ V}$ ,  $i \simeq 3 \text{ A}$ ,  $V_{p100 \text{ m}} = 79 \text{ V}$ ,  $i \simeq 30 \text{ mA}$  ;  $r = 113 \text{ m}$ .

**I. Dipôle électrostatique**

**29. Dipôle et spire chargée**

Réponses :  $\vec{E}_{sp} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ ,  $\vec{F} = p \frac{\partial E_z}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{p\lambda a}{2\epsilon_0} \left[ \frac{(a^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(a^2+z^2)^{1/2}}{(a^2+z^2)^3} \right] \vec{e}_z$  et  $\vec{F} = p \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{z=0} \vec{e}_z = \frac{p\lambda}{2\epsilon_0 a^2} \vec{e}_z$ .

**30. Sphère dipolaire**

Réponses :  $q_+ = -q_- = \pi R^2 \sigma_0$ , barycentre  $G_+$  en  $z = \frac{2R}{3}$ ,  $\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \vec{e}_z$ ,  $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z$ .

**31. Quadripôle électrique**

Réponses : si le moment dipolaire total était non nul, le champ à grande distance serait équivalent à celui-ci d'un dipôle de moment dipolaire  $\vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$  (la charge totale étant nulle). Or, les lignes de champ réparties en quatre lobes ne peuvent correspondre à celles d'un dipôle. On en conclut que le moment dipolaire total est nul. Considérons d'abord le premier schéma. Dans le plan de la figure, l'axe ( $Ox$ ) est axe d'antisymétrie des lignes : les deux dipôles sont donc parallèles à ( $Oy$ ) de façon à être leur propre image par une antisymétrie par rapport à l'axe ( $Ox$ ) (rappel :  $\vec{E}$  et  $\vec{p}$  sont des vrais vecteurs). L'axe ( $Oy$ ) est également axe d'antisymétrie ; les deux dipôles sont orientés parallèlement à ( $Oy$ ). D'après le sens des lignes de champ,  $\vec{p}_1 = +p \vec{e}_y$  en  $x = -a$  et  $\vec{p}_2 = -p \vec{e}_y$  en  $x = +a$  avec  $p > 0$ . On remarque que dans l'espace, les plans  $y = 0$  et  $x = 0$  sont des plans d'antisymétrie des lignes de champ. Considérons à présent le second schéma. Les axes ( $Ox$ ) et ( $Oy$ ) sont des axes de symétrie pour les lignes de champ donc les deux dipôles sont parallèles à ( $Ox$ ) et le sens des lignes de champ permet de conclure que  $\vec{p}_1 = +p \vec{e}_x$  en  $x = -a$  et  $\vec{p}_2 = -p \vec{e}_x$  en  $x = +a$  avec  $p > 0$ . On calcule le potentiel électrostatique créé en  $M$  par chaque dipôle :  $V_1(M) = \frac{p}{4\pi \epsilon_0} \vec{e}_y \cdot \frac{\vec{P}_1 \vec{M}}{P_1 M^3} = \frac{p r \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{P_1 M^3}$  et  $V_2(M) = -\frac{p}{4\pi \epsilon_0} \vec{e}_y \cdot \frac{\vec{P}_2 \vec{M}}{P_2 M^3} = -\frac{p r \sin \theta}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{P_2 M^3}$ . On évalue pour  $r \gg a$  la différence  $1/P_1 M^3 - 1/P_2 M^3$  par un développement limité à l'ordre 1 en  $a/r$ . On a (en s'appuyant sur la formule d'Al-Kashi)  $\frac{1}{P_1 M^3} = \frac{1}{r^3} (1 + 2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2})^{-3/2}$  soit  $\frac{1}{P_1 M^3} \simeq \frac{1}{r^3} (1 - 3 \frac{a}{r} \cos \theta)$ . De même,  $\frac{1}{P_2 M^3} = \frac{1}{r^3} (1 - 2 \frac{a}{r} \cos \theta + \frac{a^2}{r^2})^{-3/2}$  soit  $\frac{1}{P_2 M^3} \simeq \frac{1}{r^3} (1 + 3 \frac{a}{r} \cos \theta)$ . Finalement, à cet ordre d'approximation, on obtient  $V(M) = V_1(M) + V_2(M) \simeq -\frac{6 a p \sin \theta \cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$  soit  $V(M) \simeq -\frac{3 a p \sin 2\theta}{4\pi \epsilon_0 r^3}$ . Le champ électrostatique se détermine par  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ , soit  $\vec{E} = -\frac{9 a p \sin 2\theta}{4\pi \epsilon_0 r^4} \vec{e}_r + \frac{6 a p \cos 2\theta}{4\pi \epsilon_0 r^4} \vec{e}_\theta$ . Ce champ a bien la structure attendue : il est contenu dans les plans méridiens,  $E_r = 0$  sur les axes et  $E_\theta = 0$  sur les bissectrices. Cette structure de champ est caractéristique des distributions quadripolaires. Le champ à grande distance, en  $1/r^4$ , décroît encore plus rapidement que dans le cas d'une distribution dipolaire. On peut préciser l'équation des lignes de champ. Pour cela, on traduit la colinéarité du champ électrostatique avec un déplacement élémentaire en coordonnées polaires dans un plan méridien :  $\frac{dr}{E_r} = \frac{r d\theta}{E_\theta}$  soit  $\frac{dr}{3 \sin 2\theta} = -\frac{r d\theta}{2 \cos 2\theta}$  donc  $\frac{2}{3} \frac{dr}{r} = -\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} d\theta$  soit  $\frac{2}{3} \ln \frac{r}{r_0} = \frac{1}{2} \ln |\cos 2\theta|$ . Finalement,  $r = r_0 |\cos 2\theta|^{3/4}$ . Changer la valeur de  $r_0$  (positive) revient à changer de ligne de champ. Une équipotentielle de valeur  $V_0$  est telle que  $V(M) = V_0$ , d'où, avec l'expression antérieure du potentiel,  $r = r'_0 |\sin 2\theta|^{1/3}$  avec une constante  $r'_0$  positive dépendant de  $V_0$ ,  $a$  et  $p$ . Bien entendu, les équipotentielles sont orthogonales en tout point aux lignes de champ électrostatique car  $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$ .