

## Exercices : 22 - Champ magnétique

### A. Modélisation volumique des courants

#### 1. Courant volumique dans un fil rectiligne

Un fil conducteur cylindrique de rayon  $a$  transporte le courant  $I$  réparti uniformément en volume. Le fil est assez long pour négliger tout effet de bord. Après avoir rappelé les conséquences de la symétrie des courants sur la forme du champ magnétique, déterminer ce dernier dans tout l'espace par résolution d'une des équations de Maxwell.

#### 2. Densité volumique de courant orthoradiale

Un long cylindre non conducteur de rayon  $R$ , portant une charge de densité volumique  $\rho$ , est mis en rotation à la vitesse angulaire constante  $\omega$  par rapport à son axe. On admet que la densité volumique de charge ne varie pas et que le milieu est assimilable au vide.

- Déterminer, en tout point de l'espace, le champ électrique  $\vec{E}$ .
- Déterminer, en tout point de l'espace, le champ magnétique  $\vec{B}$ .

#### 3. Couches planes de courant

On considère deux couches planes, parallèles et indéfinies selon les directions  $y$  et  $z$ . Elles sont l'une et l'autre parcourues par des courants volumiques permanents, uniformes et opposés  $j\vec{e}_y$  et  $-j\vec{e}_y$ . Voir la figure 1 qui précise les notations.

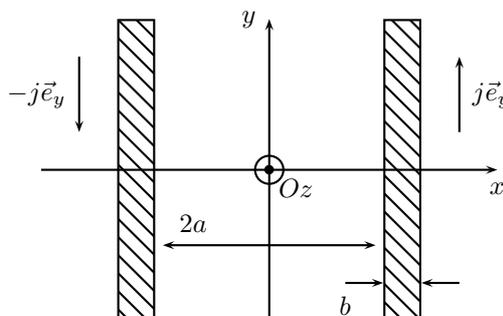


FIGURE 1 – Couches planes de courant

On donne  $\vec{B} = \vec{0}$  pour  $|x| \geq (a + b)$ . Calculer le champ magnétique pour  $|x| \leq (a + b)$ .

#### 4. Courant dans un supraconducteur

On considère un fil rectiligne cylindrique de rayon  $a$  infini sur son axe de symétrie  $Oz$ . Ce fil est constitué par un matériau supraconducteur. Du fait de ses propriétés supraconductrices, la densité de courant qui le parcourt est beaucoup plus forte à sa périphérie qu'en son centre. La densité volumique de courant, indépendante du temps, est donnée par :

$$\vec{j} = \vec{e}_z J_0 \exp \frac{r}{L}$$

où  $J_0$  est une densité volumique de courant et  $L$  une longueur caractéristique de l'hétérogénéité du courant dans le fil.

- En utilisant les propriétés de symétrie et d'invariance, déterminer les caractéristiques du champ magnétique  $\vec{B}$  en un point quelconque de l'espace.
- Quel est le champ magnétique sur l'axe  $Oz$  du cylindre ?
- Déterminer l'intensité du courant  $I_0$  passant dans le fil en fonction de  $J_0$ ,  $a$  et  $L$ .
- Quelle condition doit vérifier  $L$  pour que l'on passe du fil supraconducteur à un fil conducteur traditionnel où une densité uniforme de courant est réalisée ? Cette condition étant réalisée, retrouver l'expression de l'intensité dans le cas du fil traditionnel.
- Déterminer l'expression du champ magnétique créé par le fil supraconducteur en n'importe quel point de l'espace.

## B. Modélisation surfacique des courants

### 5. Nappe cylindrique de courant

On considère une nappe de courants surfaciques sur un cylindre droit infini d'axe  $Oz$  et de rayon  $a$ . La densité surfacique de courant est :  $j_S \vec{e}_\theta$  où  $j_S$  est une constante.

1. Montrer que le système proposé est l'analogie d'un solénoïde infini.
2. En déduire l'expression du champ magnétique en tout point de l'espace.

### 6. Deux distributions de courants

On considère un cylindre d'axe  $Oz$  et de section circulaire de rayon  $a$ . Ce cylindre est parcouru par des courants caractérisés par une distribution  $\vec{j} = j(r) \vec{e}_z$  en coordonnées cylindriques. Le champ magnétique créé correspondant est :

$$\vec{B}(r < a) = B_0 \left( \frac{r}{a} - \frac{r^2}{a^2} \right) \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{B}(r > a) = B_0 \frac{a}{r} \vec{e}_\theta$$

1. Montrer qu'il existe nécessairement une distribution surfacique de courant et la calculer.
2. Déterminer la distribution volumique de courant.

## C. Modélisation filiforme des courants

### 7. Bobines de Helmholtz

On considère une distribution de courants cylindriques autour de l'axe  $Oz$  qui crée un champ magnétique sur l'axe  $Oz$  colinéaire à cet axe. On donne l'expression du champ créé par une spire de rayon  $a$  parcourue par une intensité  $I$  à la distance  $z$  du centre de cette spire sur l'axe de la spire :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

1. On se place maintenant (tout en étant toujours à la côte  $z$ ) à une distance  $r$  relativement faible de l'axe. En écrivant la conservation du flux magnétique, montrer que le champ possède une composante radiale donnée par :

$$B_r = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_z}{\partial z}$$

Ce résultat est valable pour toute distribution qui possède les mêmes symétries.

On considère le système particulier suivant : deux bobines circulaires plates de même rayon  $a$ , de même axe  $Oz$ , distantes de  $d$ , comportent le même nombre de spires  $N$  et sont parcourues dans le même sens par le même courant  $I$ . On appelle  $O$  le centre de symétrie du système des deux bobines.

2. Montrer que la composante radiale du champ magnétique est nulle au voisinage de  $O$  au premier ordre en  $r$ .
3. À quelle condition la composante axiale du champ magnétique sera-t-elle aussi constante au second ordre près en  $z$  autour de  $O$ ? Quel est l'intérêt du dispositif appelé bobines de HELMHOLTZ ?

### 8. Bobine torique

Une bobine torique est constituée d'un enroulement continu de  $N$  spires circulaires de rayon  $a$ , parcourues par le même courant  $I$ , régulièrement entourée autour d'un tore, de rayon moyen  $R$ , de section circulaire de rayon  $a < R$ .

1. Montrer que le champ magnétique est nul hors du tore. Déterminer son expression à l'intérieur de celui-ci, en fonction de la distance  $r$  à l'axe.
2. Application numérique :  $N = 1000$  ;  $I = 1$  A ;  $R = 10$  cm et  $a = 3$  cm. Quelles sont les valeurs extrêmes du champ magnétique? Quel courant devrait-on faire passer dans un fil rectiligne infini pour obtenir le même champ à la même distance ?
3. Expliciter la densité surfacique de courants équivalente à ce bobinage.

## D. Équations locales de la magnétostatique

### 9. Supraconducteur

Un matériau supraconducteur est caractérisé par la relation constitutive  $\vec{j} = -\frac{\vec{A}}{\mu_0\delta^2}$ , où  $\delta$  est une constante positive et  $\vec{A}$  le potentiel vecteur défini par  $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ . Le système est étudié en régime permanent. On précise que dans ce contexte le potentiel vecteur obéit à l'équation  $\text{div}\vec{A} = 0$ .

1. Quelle est la dimension de  $\delta$  ?
2. Le matériau supraconducteur occupe le volume compris entre les plans  $z = -a$  et  $z = +a$ . On supposera  $\delta \ll a$ . À l'extérieur du milieu supraconducteur, il règne un champ magnétique uniforme et constant de module  $B_0$ , colinéaire à l'axe  $(Ox)$ . On admet que, dans ce modèle, aucune distribution surfacique de courants n'est à prendre en compte et que le champ magnétique est donc continu.  
Déterminer le champ magnétique en tout point du matériau.
3. Déterminer la densité volumique de courants dans le matériau.

## E. Force de Lorentz

### 10. Détection de l'antiélectron

En 1932, CARL ANDERSON découvre une trace correspondant à l'antiélectron, sur un cliché photographique pris dans une chambre à brouillard (détecteur de particules qui représente le passage d'une particule sous la forme d'une traînée). On rappelle que l'antiélectron ou positron est l'antiparticule de l'électron, de charge électrique  $+e$  et de même masse. La figure 2 montre la photographie de la trace d'une particule dans une chambre à brouillard. celle-ci est soumise à un champ magnétique. Quelle affirmation est-elle exacte ?

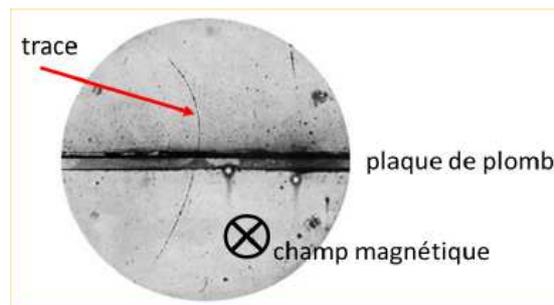


FIGURE 2 – Trajectoires dans un champ magnétique

Proposition de réponses :

- a) La particule possède une charge négative, elle se déplace du bas vers le haut de la figure.
- b) La particule possède une charge négative, elle se déplace du haut vers le bas de la figure.
- c) La particule possède une charge positive, elle se déplace du haut vers le bas de la figure.
- d) La particule possède une charge positive, elle se déplace du bas vers le haut de la figure.

### 11. Trajectoire dans un champ magnétique

Un électron non-relativiste est lancé avec une vitesse  $V\vec{e}_y$  (avec  $V > 0$ ) depuis l'origine  $O$  d'un repère  $Oxyz$ . Il est soumis à un champ magnétostatique  $B_1\vec{e}_z$  dans le demi-plan  $y > 0$  et  $B_2\vec{e}_z$  dans le demi-plan  $y < 0$  (avec  $B_2 > B_1 > 0$ ). Quelle est l'allure de sa trajectoire ?

Proposition de réponses à la figure 3.

### 12. Force de Lorentz et séparation isotopique

Une particule  $P$  de charge  $q$  et de masse  $m$  est lancée depuis le point  $(a, 0, 0)$  d'un repère cartésien matérialisant un référentiel galiléen. Sa vitesse initiale non relativiste est  $(0, -a\omega_0, \gamma a\omega_0)$  dans un champ magnétique uniforme et permanent  $\vec{B} = B\vec{e}_z$ . On pose :  $\omega_0 = qB/m$ .

1. Déterminer les équations de la trajectoire et représenter l'allure de celle-ci pour  $\gamma = 0, 1$ .
2. En plus du champ magnétique, on applique un champ électrique  $\vec{E} = E_0 \cos \omega t \vec{e}_x$ . Reprendre l'étude précédente et décrire l'allure de la trajectoire dans le cas général où  $\omega \neq \omega_0$ .

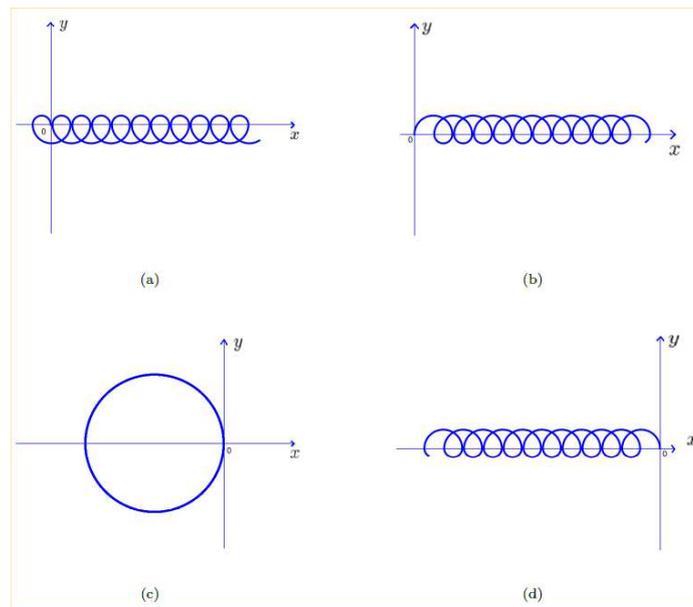


FIGURE 3 – Trajectoires dans un champ magnétique

- Mettre en évidence l'existence d'une résonance dans le cas particulier où  $\omega = \omega_0$ . Donner la nouvelle expression de  $x(t)$  et représenter l'allure de la trajectoire.
- Expliquer comment le dispositif précédent, appliqué à des particules soumises initialement au seul champ magnétique et formant donc un faisceau de direction  $Oz$ , peut servir à réaliser une séparation isotopique.

### 13. Un piège ?

Un électron de charge  $q = -e$  et de masse  $m$  peut se déplacer dans une région vide de charges où règne un potentiel  $V(x, y, z)$  donné par l'expression :

$$V(x, y, z) = \frac{V_0}{4a^2} (x^2 + y^2 - 2z^2)$$

On prendra par la suite pour  $V_0$  un potentiel de 10 V et  $a = 3$  mm. Le poids de l'électron est négligeable.

- La position  $x = y = z = 0$  correspond-elle à une position d'équilibre stable ?
- On ajoute un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$ .
- Montrer qu'il peut permettre de piéger les électrons autour du point  $O$  à condition que l'on ait  $|B_0| > B_c$ . On déterminera la valeur critique  $B_c$  numériquement.
- Caractériser le mouvement de l'électron autour de  $O$  pour  $|B_0| > B_c$ . Que peut-on dire pour  $B_0 = 2$  T ?

### 14. Piéger des ions

Depuis le début du XX<sup>ème</sup> siècle, on est capable d'observer et de manipuler les atomes très précisément et de manière isolée. Cela a permis l'émergence d'un nouveau domaine de la physique, appelé la physique atomique. Il s'agit d'un domaine très riche où de nombreuses découvertes sont encore faites de nos jours comme le montre par exemple le Prix Nobel de physique 2012 accordé à Serge Haroche et David J. Wineland. Il existe de nombreuses techniques qui permettent de travailler avec de tels systèmes. Depuis les années 90, les physiciens et physiciennes ont développé des méthodes pour manipuler les atomes à l'aide des lasers. Ces techniques reposent sur des phénomènes d'interaction lumière-matière décrites par des notions avancées de physique quantique, ce que nous n'allons pas traiter dans ce sujet. Cependant, il existe d'autres méthodes consistant notamment à utiliser non pas des atomes mais des ions. En effet, ces derniers, chargés électriquement, peuvent être manipulés directement à l'aide d'un champ électrique. Dans cet exercice, nous allons nous intéresser plus particulièrement au piégeage de ces ions, c'est-à-dire à leur confinement dans une région restreinte de l'espace. Il s'agit d'une première étape essentielle dans l'étude des systèmes d'ions. Dans tout cet exercice, on s'intéresse au mouvement d'un ion de masse  $m$  et de charge  $q > 0$  et le référentiel d'étude est supposé galiléen.

### Confiner un ion à l'aide d'un champ électrostatique

On considère l'interaction de l'ion avec un champ électrostatique  $\vec{E}(x, y, z)$ . Dans un premier temps, nous allons nous pencher sur le cas unidimensionnel. On considère alors un champ électrique de la force  $\vec{E} = Ax\vec{e}_x$  où  $A$  est une constante réelle.

1. Établir l'équation du mouvement de l'ion et montrer que, sous réserve d'une condition sur  $A$  que l'on précisera, ce système est analogue à un oscillateur harmonique. Donner l'expression de la pulsation  $\omega_E$  caractéristique dans cette situation.
2. Donner l'énergie potentielle associée au champ électrique en fonction de la position  $x$ . Tracer la fonction correspondante et justifier par des considérations énergétiques que l'ion est confiné.
3. En réalité le système est nécessairement soumis à des forces dissipatives qui diminuent son énergie mécanique totale au cours du temps. Justifier qualitativement qu'il finit par se stabiliser à la position  $x = 0$ .

Nous voyons ainsi qu'un champ électrique peut permettre de confiner un ion dans une dimension. On peut également utiliser cette approche pour un système tridimensionnel, les mouvements selon les différentes directions étant supposés indépendants. Dans la pratique cependant, on peut montrer que les trois composantes du champ électrique ne peuvent pas être choisies indépendamment et doivent respecter certaines contraintes. Un champ électrique réaliste, souvent utilisé, est de la forme suivante :

$$\vec{E} = A'(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z) \quad (1)$$

4. Déterminer le signe de la constante  $A'$  pour que l'ion soit confiné selon la direction  $z$  (c'est-à-dire contraint à rester près du plan  $z = 0$ ).

Dans toute la suite, nous allons considérer que cette condition est remplie et nous allons à présent nous pencher sur le mouvement de l'ion dans le plan  $Oxy$ .

5. Écrire la nouvelle équation du mouvement selon  $x$  et en donner les solutions. On introduira pour cela un temps caractéristique  $\tau$  à définir. Décrire alors le comportement de l'ion pour  $t \rightarrow \infty$  et expliquer pourquoi on qualifie  $\tau$  de temps d'échappement.
6. Conclure sur la possibilité (ou non) de confiner les ions dans les trois dimensions de l'espace en utilisant uniquement un champ électrostatique.

### Confinement tridimensionnel : l'exemple du piège de Penning

Une technique possible afin de passer outre les limitations évoquées précédemment est celle du piège de PENNING. Il s'agit d'utiliser en plus du champ électrique statique considéré (équation (1)), un champ magnétique uniforme et constant  $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ . Dans cette partie, on considère que l'ion est déjà confiné selon l'axe  $z$  par le champ électrique et on s'intéresse donc uniquement au mouvement dans le plan  $(x, y)$ .

7. Établir les équations du mouvement de la particule pour  $x(t)$  et  $y(t)$ . On fera apparaître la pulsation cyclotron  $\omega_c$ .
8. Afin de résoudre ce système d'équations, on introduit la coordonnée complexe  $\mathcal{Z} = x(t) + iy(t)$ . Donner l'équation temporelle vérifiée par  $\mathcal{Z}(t)$ .
9. En considérant une solution à cette équation de la forme  $\mathcal{Z}(t) = \mathcal{Z}_0 \exp i\sigma t$ , donner une condition sur le produit  $\omega_c\tau$  afin que le mouvement soit borné.
10. Cette condition étant respectée, représenter l'allure d'une trajectoire possible pour un ion dans le plan  $(x, y)$ .

### 15. Éviter une collision

On considère deux particules de même masse  $m$  mais de charges opposées  $q > 0$  et  $-q$ . Elles sont positionnées à l'instant initial, respectivement, aux abscisses  $x = a > 0$  et  $x = -a$ , sans vitesse initiale. On négligera le poids des particules devant les autres forces en jeu ainsi que tout phénomène dissipatif. On plonge l'ensemble de la zone d'évolution des charges dans un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = -B\vec{e}_y$  avec  $B > 0$ . À la date  $t = 0$ , on libère les charges.

1. Faire une analyse qualitative de la situation.
2. Établir les équations différentielles du mouvement en exprimant  $\ddot{x}$  et  $\ddot{z}$  où  $x$  et  $z$  sont les coordonnées de la charge  $q$ . On posera  $\omega_c = qB/m$ , pulsation cyclotron.
3. Écrire la conservation de l'énergie mécanique.

4. Les deux particules ne se percutent pas si l'on peut assurer  $\dot{x} = 0$  pour  $x > 0$ . Montrer que cela est possible à condition que le champ magnétique vérifie la relation  $B > B_c$  où l'on exprimera  $B_c$  en fonction des données du problème.
5. En utilisant des valeurs réalistes telles que  $a = 1 \text{ nm}$ ,  $q = e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$  et  $m = 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , déterminer la valeur numérique de  $B_c$ . Commenter.
6. On utilise un programme *Python* pour obtenir les différentes trajectoires possibles des particules. Compléter le programme pour y parvenir.

```

import numpy as np
from scipy.integrate import solve_ivp
import matplotlib.pyplot as plt

# Paramètres physiques
q=1.6e-19
B=
m=9.1e-31
omega_c=q*B/m
epsilon_0=8.85e-12
a=1e-9

# Paramètres numériques
tmin = 0 # s
tmax =3* 1e-14 # s
t=np.linspace(tmin,tmax,5000)

# Résolution numérique
def syst(t, y) :
    x, v_x, z, v_z = y

    return np.array([dx, dv_x, dz, dv_z])

# Conditions initiales
x0 =
z0 =
v_x0 =
v_z0 =
CI = [x0,v_x0,z0,v_z0]

# Résolution numérique
solution = solve_ivp(syst, [tmin, tmax], CI,t_eval=t)

# Tracé des courbes
plt.clf()
plt.figure(1)
plt.plot(solution.t, solution.y[0, :],label='x')
plt.plot(solution.t, solution.y[2, :],label='z')
plt.xlabel("t (s)")
plt.legend()
plt.grid()

plt.figure(2)
plt.plot(solution.y[0, :],solution.y[2, :])
plt.xlabel("x (m)")
plt.ylabel("z (m)")

plt.show()

```