

Exercices : 22 - Champ magnétique

— Solutions —

A. Modélisation volumique des courants

1. Courant volumique dans un fil rectiligne

Réponses : $\vec{B} = \vec{0}$ en $r = 0$, $\vec{B}_{0 \leq r \leq a} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$, $\vec{B}_{r \geq a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$.

2. Densité volumique de courant orthoradiale

Réponses : $\vec{E}_{r \leq R} = \frac{\rho r}{2\epsilon_0} \vec{e}_r$, $\vec{E}_{r \geq R} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{e}_r$; $-\frac{\partial B_z(r)}{\partial r} = \mu_0 \rho \omega r$, $\vec{B}_{r \leq R} = \frac{\mu_0 \rho \omega}{2} (R^2 - r^2) \vec{e}_z$, $\vec{B}_{r \geq R} = \vec{0}$.

3. Couches planes de courant

Réponses : $-(a+b) \leq x \leq -a$: $\vec{B} = \mu_0 j(x+a+b) \vec{e}_z$, $-a \leq x \leq a$: $\vec{B} = \mu_0 j b \vec{e}_z$, $a \leq x \leq a+b$: $\vec{B} = \mu_0 j(-x+a+b) \vec{e}_z$.

4. Courant dans un supraconducteur

Réponses : $\vec{B} = B_\theta(r) \vec{e}_\theta$, $\vec{B}(r=0) = \vec{0}$ car tous les plans contenant l'axe sont des plans de symétrie positive de la distribution de courant, $I_0 = \iint j(r) r dr d\theta = 2\pi J_0 L^2 \left(\frac{a}{L} \exp \frac{a}{L} + (1 - \exp \frac{a}{L}) \right)$, $L \gg a$, on effectue un développement limité à l'ordre 2 $\exp \frac{a}{L} = 1 + \frac{a}{L} + \frac{a^2}{2L^2}$ et on retrouve $I_0 = J_0 \pi a^2$, $B_\theta 2\pi r = \mu_0 I(r)$ pour $r \leq a$ et $B_\theta 2\pi r = \mu_0 I_0$ pour $r \geq a$ d'où $\vec{B}_{r \leq a} = \vec{e}_\theta \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{r}{a} \exp \frac{r}{L} + 1 - \exp \frac{r}{L}$ et $\vec{B}_{r \geq a} = \vec{e}_\theta \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$.

B. Modélisation surfacique des courants

5. Nappe cylindrique de courant

Réponses : $\vec{B}_{r < a} = \mu_0 j_s \vec{e}_z$ et $\vec{B}_{r > a} = \vec{0}$.

6. Deux distributions de courants

Réponses : d'après les relations de passage, le champ magnétique, tangentiel en $r = a$, est discontinu avec $\vec{B}_{2,T}(r=a^+) - \vec{B}_{1,T}(r=a^-) = \mu_0 \vec{j}_s \wedge \vec{n}_{12}$ soit $B(a^+) - B(a^-) = \mu_0 j_{s,z}$ donc $\vec{j}_s = \frac{B_0}{\mu_0} \vec{e}_z$. Utilisons le théorème d'AMPÈRE de la magnétostatique! Au vu des directions de \vec{B} et \vec{j} , on a tout intérêt à choisir comme contour d'AMPÈRE celui qui délimite le secteur entre les cercles de rayon r et $r+dr$ et les segments pour θ et $\theta+d\theta$ (ce n'est pas le seul choix possible...). On applique le théorème d'AMPÈRE au contour fermé orienté en sens trigonométrique. Cela donne $(r+dr) d\theta B(r+dr) - r d\theta B(r) = \mu_0 \underbrace{j(r) r d\theta dr}_{\text{courant enlacé}}$ d'où $j(r) = \frac{1}{\mu_0 r} \frac{d(rB(r))}{dr}$. on aurait pu aussi utiliser l'expression du rotationnel en coordonnées cylindriques. Par conséquent, on aboutit à $\vec{j}(r < a) = \frac{B_0}{\mu_0 a} (2 - 3 \frac{r}{a}) \vec{e}_z$ et $\vec{j}(r > a) = \vec{0}$.

C. Modélisation filiforme des courants

7. Bobines de Helmholtz

Réponses : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I a^2}{2} \left[\frac{1}{(a^2 + (\frac{d}{2} + z)^2)^{3/2}} + \frac{1}{(a^2 + (\frac{d}{2} - z)^2)^{3/2}} \right] \vec{e}_z$, $\frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{3\mu_0 N I a^2}{4} \left[\frac{d+2z}{(a^2 + (\frac{d}{2} + z)^2)^{5/2}} + \frac{-d+2z}{(a^2 + (\frac{d}{2} - z)^2)^{5/2}} \right]$, $\frac{\partial B_z}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$, $\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} = \frac{3\mu_0 N I a^2}{2} \left[\frac{5}{4} \frac{(d+2z)^2}{(a^2 + (\frac{d}{2} + z)^2)^{7/2}} + \frac{5}{4} \frac{(-d+2z)^2}{(a^2 + (\frac{d}{2} - z)^2)^{7/2}} - \frac{1}{(a^2 + (\frac{d}{2} + z)^2)^{5/2}} - \frac{1}{(a^2 + (\frac{d}{2} - z)^2)^{5/2}} \right]$, $\frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \Big|_{z=0} = 0$ si $d = a$, obtention d'un champ quasi uniforme.

8. Bobine torique

Réponses : $\vec{B} = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, $B_{max} = 2,86 \times 10^{-3} \text{ T}$, $B_{min} = 1,54 \times 10^{-3} \text{ T}$, 1000 A , $j_s^{max} = \frac{N I}{2\pi(R-a)}$, $j_s^{min} = \frac{N I}{2\pi(R+a)}$.

D. Équations locales de la magnétostatique

9. Supraconducteur

Réponses : δ en m, $\Delta \vec{B} = \frac{\vec{B}}{\delta^2}$, $\frac{d^2 B_x}{dz^2} = \frac{B_x}{\delta^2}$, $B_x = B_0 \frac{\text{ch } \frac{z}{\delta}}{\text{ch } \frac{a}{\delta}} \simeq 2B_0 \exp -\frac{a}{\delta} \text{ch } \frac{z}{\delta}$, $\vec{j} = \frac{2B_0}{\mu_0 \delta} \exp -\frac{a}{\delta} \text{sh } \frac{z}{\delta} \vec{e}_y$.

E. Force de Lorentz

10. Détection de l'antiélectron

Réponses : La force que la particule subit est $\vec{f} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$. La figure montre clairement que \vec{f} est dirigée vers la gauche. Son sens dépend à la fois du signe de q mais aussi du sens de la vitesse \vec{v} . On peut redémontrer que dans un mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme, on a un mouvement circulaire uniforme (voire hélicoïdal uniforme) et que la relation de la Dynamique donne $m\frac{v^2}{R} = |q|vB$ et que, par conséquent, le rayon de courbure de la trajectoire est $R = \frac{mv}{|q|B}$. On peut voir sur la figure que le rayon de courbure de la trajectoire au-dessus de la plaque de plomb est plus petit (courbure plus marquée) que celui de la partie située en dessous de la plaque de plomb. La vitesse est donc plus petite au-dessus de la plaque de plomb qu'en dessous. Comme il est évident que la particule ne peut qu'être ralentie en traversant un milieu aussi dense que le plomb. La particule vient donc nécessairement du bas. Pour être déviée vers la gauche, il faut donc que sa charge soit positive. La bonne réponse est la réponse d).

11. Trajectoire dans un champ magnétique

Réponses : la force magnétique est $\vec{f} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$, à l'instant initial, on a $\vec{f}(t=0) = -eV\vec{e}_y \wedge B_1\vec{e}_z = -eVB_1\vec{e}_x$. on peut éliminer le graphique b puisque la déviation s'effectue vers la gauche. On sait que le mouvement plan est circulaire uniforme pour la force de LORENTZ. On peut donc écrire $m\vec{a} = -evB\vec{n}$ où \vec{n} est le vecteur normal extérieur à la trajectoire (\vec{e}_r des coordonnées polaires). L'accélération est $\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{n}$ si R est le rayon du cercle. On retrouve alors l'expression du rayon du cercle de la trajectoire dans un champ magnétique uniforme : $R = \frac{mv}{eB}$. Quand la particule finit son trajet dans le domaine $y > 0$ et franchit l'axe Ox , elle subit un champ magnétique de même orientation que le précédent mais de norme $B_2 > B_1$. Le rayon du demi-cercle qui suit dans le domaine $y < 0$ est donc $R_2 < R_1$. On rejette c évidemment mais aussi a car sur le schéma a on a $R_2 > R_1$. La réponse est le graphique d.

12. Force de Lorentz et séparation isotopique

Réponses : hélice $x = a \cos \omega_0 t$, $y = -a \sin \omega_0 t$ et $z = \gamma a \omega_0 t$, $x = a \cos \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$, $y = -a \sin \omega_0 t + \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}(\sin \omega_0 t - \frac{\omega_0}{\omega} \sin \omega t)$, divergence pour $\omega = \omega_0$, $x = a \cos \omega_0 t + \frac{qE_0 t}{2m\omega_0} \sin \omega_0 t$, le rayon de l'hélice diverge, $\omega_0 = \frac{qB}{m}$ dépend de la masse, il y aura résonance pour un isotope et pas pour l'autre d'où une séparation possible.

13. Un piège ?

Réponses : La particule est soumise à la force électrostatique $\vec{F} = -e\vec{E} = e \overrightarrow{\text{grad}} V$ et la relation fondamentale de la dynamique donne $\ddot{x} = \frac{eV_0}{2a^2 m} x$ (1), $\ddot{y} = \frac{eV_0}{2a^2 m} y$ (2) et $\ddot{z} = -\frac{eV_0}{a^2 m} z$ (3). On note alors que lorsque $V_0 > 0$, la position $(0, 0, 0)$, qui est bien un équilibre, est instable dans le plan (xOy) (lorsque $V_0 < 0$, elle est instable suivant (Oz)). On le voit à la nature des équations différentielles (solutions bornées seulement si équation analogue à l'oscillateur harmonique). La présence du champ magnétique modifie les équations du mouvement en ajoutant le terme de force magnétique. En posant $\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{a^2 m}}$ et $\omega_c = \frac{eB_0}{m}$, $|\omega_c|$ est la pulsation cyclotron, on arrive à $\ddot{x} + \omega_c \dot{y} - \frac{1}{2} \omega_0^2 x = 0$ (1'), $\ddot{y} - \omega_c \dot{x} - \frac{1}{2} \omega_0^2 y = 0$ (2') $\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0$ (3'). Cette dernière équation donne directement $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$. On résout (1') et (2') par découplage en posant $\underline{Z} = x + iy$, d'où $\ddot{\underline{Z}} - i\omega_c \dot{\underline{Z}} - \frac{1}{2} \omega_0^2 \underline{Z} = 0$. L'équation caractéristique associée à pour discriminant $\Delta = -\omega_c^2 + 2\omega_0^2$. Trois cas sont alors à envisager. Premier cas où $\Delta > 0$, soit $|\omega_c| < \sqrt{2}\omega_0$: alors, on trouve une solution générale $\underline{Z}(t) = \exp i\omega_c t/2 [\underline{A}_1 \exp -t/\tau + \underline{A}_2 \exp t/\tau]$ où $\tau = \frac{1}{\sqrt{2\omega_0^2 - \omega_c^2}}$. Cette solution, pour une perturbation quelconque, est généralement divergente et ne correspond pas à une stabilisation du mouvement au voisinage du point d'équilibre O . Second cas où $\Delta = 0$, soit $|\omega_c| = \sqrt{2}\omega_0$: alors, $\underline{Z}(t) = \exp i\omega_c t/2 [\underline{A}_1 + \underline{A}_2 t]$. Cela ne correspond toujours pas à une stabilisation. Troisième cas où $\Delta < 0$, soit $|\omega_c| > \sqrt{2}\omega_0$: alors, $\underline{Z}(t) = \underline{A}_1 \exp i\omega_1 t + \underline{A}_2 \exp i\omega_2 t$ où $\omega_1 = \frac{1}{2} [\omega_c - \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}]$ et $\omega_2 = \frac{1}{2} [\omega_c + \sqrt{\omega_c^2 - 2\omega_0^2}]$. $|\underline{Z}(t)|$ est borné, ce qui correspond à une stabilisation de la trajectoire de l'électron autour de O . Cela n'est possible que si $|\omega_c| > \sqrt{2}\omega_0$, soit $|B_0| > B_c = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{2mV_0}{e}} = 4.10^{-3} \text{ T}$. Pour $|B_0| > B_c$, on obtient d'après ce qui précède les mouvements décrits par $z(t) = z_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)$, $x(t) = a_1 \cos \phi_1(t) + a_2 \cos \phi_2(t)$ et $y(t) = a_1 \sin \phi_1(t) + a_2 \sin \phi_2(t)$ où $\phi_1(t) = \omega_1 t + \varphi_1$ et $\phi_2(t) = \omega_2 t + \varphi_2$. Le mouvement suivant Oz est oscillatoire à la pulsation ω_0 , tandis que celui projeté dans le plan xOy s'interprète comme la superposition de deux mouvements circulaires uniformes de pulsations ω_1 et ω_2 (voir la figure 1) en haut à gauche.

Le domaine dans lequel se situe la projection du mouvement sur xOy est délimité par les cercles de centre O et de rayons $|a_1 - a_2|$ et $a_1 + a_2$ (on suppose a_1 et a_2 positifs sans restreindre la généralité). Voici deux possibilités en haut au centre et à droite de la figure 1. On peut donner quelques trajectoires (dans le plan xOy) correspondant

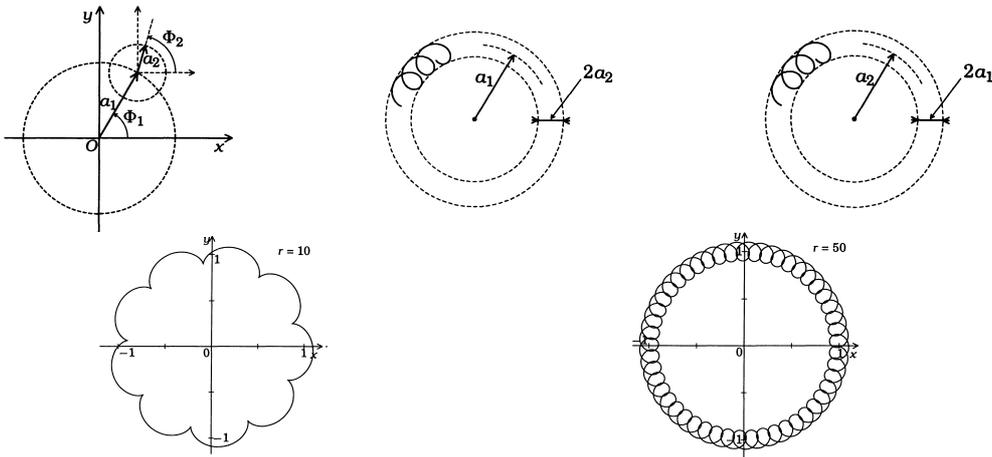


FIGURE 1 – Trajectoires de la charge $q = -e$.

aux équations normalisées $x(t) = \cos t + b \cos(rt + \varphi)$ et $y(t) = \sin t + b \sin(rt + \varphi)$ où $b = a_2/a_1$ et $r = \omega_2/\omega_1$. Par exemple, pour $\varphi = \pi/5$ et $b = 0, 1$, en bas à gauche et à droite de la figure 1. Avec les valeurs numériques de l'énoncé, on calcule $\omega_0 = 4.10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_c = 4.10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\omega_1 = 3.10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega_2 = 4.10^{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Par exemple, si $a_2 \ll a_1$, le mouvement se réduit en première approximation à un mouvement circulaire en projection sur xOy composé d'un mouvement sinusoïdal sur (Oz) et un tour complet de cercle correspond à $N = \omega_0/\omega_1 \simeq 2.10^3$ oscillations sur (Oz) .

14. Piéger des ions

Réponses : L'équation du mouvement est $m\dot{x} = qAx$ que l'on peut écrire $\ddot{x} - \frac{qA}{m}x = 0$. Cette équation possède des solutions bornées si on obtient une équation différentielle d'oscillateur harmonique. Pour cela, il est indispensable que l'on ait $A < 0$. La pulsation propre de l'oscillateur harmonique est alors $\omega_E = \sqrt{\frac{-qA}{m}}$. On écrit que $\vec{F} = qAx\vec{e}_x = -\frac{dE_{pot}}{dx}\vec{e}_x$. On choisit une constante d'intégration nulle en $x = 0$ pour avoir la forme la plus simple de l'énergie potentielle : $E_{pot} = -\frac{1}{2}qAx^2$ avec toujours $A < 0$. La représentation de l'évolution de l'énergie potentielle est donnée à la figure 2. Pour une énergie mécanique donnée E_m , on constate que puisque $E_m = E_c + E_{pot}$ avec $E_c > 0$, il ne sera pas possible d'aller au delà de $[-x_{max}; x_{max}]$.

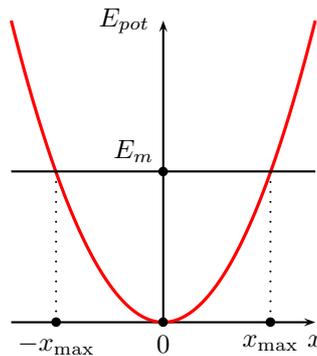


FIGURE 2 – Énergie potentielle parabolique et confinement

Si l'énergie mécanique diminue, il suffit de faire baisser le niveau E_m sur le graphique de la figure 2 pour comprendre que l'on réduit alors la valeur de x_{max} pour aller vers un confinement en $x = 0$ qui est la position d'équilibre correspondant bien au minimum de l'énergie potentielle. La projection de l'équation du mouvement sur l'axe Oz donne $m\ddot{z} = -2qA'z$ d'où l'équation différentielle $\ddot{z} + \frac{2qA'}{m}z = 0$. On aura une solution bornée exprimant le confinement si $A' > 0$. L'équation du mouvement sur Ox est $m\ddot{x} = qA'x$ d'où l'équation différentielle $\ddot{x} - \frac{qA'}{m}x = 0$. Par analyse dimensionnelle, on voit que l'on peut poser τ un temps caractéristique de cette étude comme $\tau = \sqrt{\frac{m}{qA'}}$. L'équation différentielle devient $\ddot{x} - \frac{x}{\tau^2} = 0$. Elle a pour solution $x(t) = \lambda \exp \frac{t}{\tau} + \mu \exp -\frac{t}{\tau}$. Il n'est pas possible de confiner les ions dans les trois dimensions de l'espace en utilisant uniquement un champ électrostatique puisque la solution $\exp \frac{t}{\tau}$ va diverger au cours du temps, c'est la même chose sur Oy . En fait la position $(0, 0, 0)$ est une position d'équilibre un peu spéciale puisqu'elle est stable sur Oz et instable sur Ox et Oy . La relation de la Dynamique est $m\vec{a} = q\vec{E} + q(\dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z) \wedge B_0\vec{e}_z$. En développant, on trouve

$m\vec{a} = qA'x\vec{e}_x + qA'y\vec{e}_y - 2qA'z\vec{e}_z - qB_0\dot{x}\vec{e}_y + qB_0\dot{y}\vec{e}_x$. En rassemblant les éléments, on obtient $\ddot{x} = \frac{qA'}{m}x + \frac{qB_0}{m}\dot{y}$, $\ddot{y} = \frac{qA'}{m}y - \frac{qB_0}{m}\dot{x}$ et $\ddot{z} = -2\frac{qA'}{m}z$. On peut donc écrire le système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} \ddot{x} - \frac{x}{\tau^2} = \omega_c \dot{y} \\ \ddot{y} - \frac{y}{\tau^2} = -\omega_c \dot{x} \\ \ddot{z} + \frac{2z}{\tau^2} = 0 \end{cases}$$

où on a posé la pulsation cyclotron $\omega_c = \frac{qB_0}{m}$. On observe rapidement que $\ddot{Z} = \frac{Z}{\tau^2} + \omega_c(\dot{y} - i\dot{x})$. On comprend l'intérêt du changement de variable considéré par l'énoncé puisque l'on peut écrire alors que $\ddot{Z} + i\omega_c\dot{Z} - \frac{Z}{\tau^2} = 0$. En testant la forme de solution proposée, on arrive à la contrainte sur σ donnée par la vérification de l'équation du second degré suivante : $\sigma^2 + \omega_c\sigma + \frac{1}{\tau^2} = 0$. Le mouvement sera borné uniquement si σ est un réel. Pour cela, il faut que le discriminant de l'équation du second degré soit positif. Or, $\Delta = \omega_c^2 - \frac{4}{\tau^2} \geq 0$. La condition recherchée est donc : $\omega_c\tau \geq 2$. Lorsque la condition d'un mouvement borné est assurée, on obtient des solutions harmoniques de même pulsation pour x et pour y . Leurs amplitudes et leurs phases ne sont pas forcément les mêmes. Les trajectoires obtenues dans le plan Oxy sont donc des ellipses qui peuvent être - si les conditions initiales sont réunies - des cercles, voire des segments.

15. Éviter une collision

Réponses : au départ, les particules vont s'attirer mutuellement sous l'effet de la force de COULOMB. Elles vont donc prendre de la vitesse et à ce moment-là la partie magnétique de la force de LORENTZ $q\vec{v} \wedge \vec{B}$ va jouer. La situation présente un plan de symétrie, le plan Oyz . Les deux particules chargées sont toujours symétrique par rapport à l'axe Oz et la force de COULOMB toujours alignée sur \vec{e}_x . Comme les particules partent sans vitesse initiale, le mouvement sera toujours dans le plan Ozx . On raisonne pour la particule q . Il peut y avoir un choc évité si à un moment donné pour $\dot{x} = 0$ on a $\dot{z} \neq 0$ pour $x > 0$. Plus les particules posséderont de l'énergie cinétique, plus le champ magnétique devra être élevé pour arriver à suffisamment dévier les particules chargées. La relation de la Dynamique donne $m\ddot{x} = qB\dot{z} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)^2}$ et $\ddot{z} = -qB\dot{x}$. Ces équations permettent de compléter le programme PYTHON. On peut toutefois intégrer aisément la seconde équation pour obtenir $\dot{z} = \omega_c(a - x)$. Si on écrit la conservation de l'énergie, on obtient $m(\dot{x}^2 + \dot{z}^2) - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2x)} = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2a)}$. On peut encore écrire que $\dot{x}^2 + \dot{z}^2 = \frac{q^2}{8\pi\epsilon_0 m}(\frac{1}{x} - \frac{1}{a})$. En utilisant $\dot{z}^2 = \frac{q^2 B^2}{m^2}(a - x)^2$, on arrive à l'équation $x(a - x) = \frac{m}{8\pi\epsilon_0 a B^2} = \ell^2$ avec $\ell^2 = \frac{m}{8\pi\epsilon_0 a B^2}$ pour avoir $\dot{x}^2 = 0$. On obtient l'équation du second degré $x^2 - ax + \ell^2 = 0$ qui possède une solution réelle pour $\Delta = a^2 - 4\ell^2 > 0$. La solution est alors $x = \frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 - 4\ell^2})$ à condition que le champ magnétique vérifie $B > B_c$ avec $B_c = \sqrt{\frac{m}{2\pi\epsilon_0 a^3}}$. Avec les valeurs numériques proposées, on arrive à $B_c = 4045$ T ce qui est une valeur inaccessible. Pour que cela soit possible, il faut que les particules soient beaucoup plus éloignée l'une de l'autre. Si l'on prend par exemple $a = 1$ cm, le champ magnétique sera $B_c \simeq 10^{-7}$ T. Cette valeur est très largement accessible puisque le champ magnétique terrestre est supérieur. Encore faut-il être capable de placer les deux particules à de telles distance l'une de l'autre... Si l'on calcule la distance a correspondant à $B_c = 1$ T qui est raisonnablement accessible, on trouve $a = 250$ nm. Si l'on reprend les valeur numériques de l'énoncé, on peut faire fonctionner le programme Python dont le corrigé est donné ci-dessous. On obtient les deux trajectoires de la figure 3.

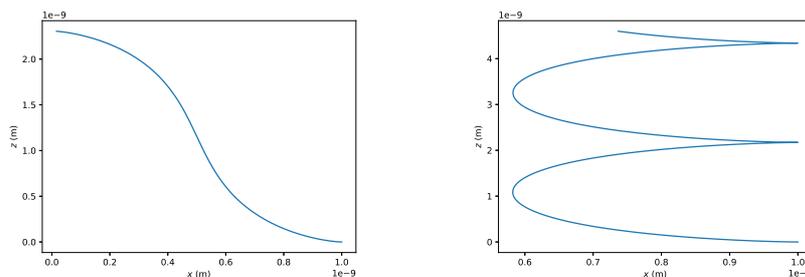


FIGURE 3 – Trajectoire pour $B < B_c$ à gauche et pour $B > B_c$ à droite.

Résolution numérique

```
def syst(t, y):  
    x, v_x, z, v_z = y  
    dx = v_x  
    dv_x = omega_c*v_z-q**2/(m**4*np.pi*epsilon_0**4*x**2)  
    dz = v_z  
    dv_z = -omega_c*v_x  
    return np.array([dx, dv_x, dz, dv_z])
```

```
# Conditions initiales
```

```
x0 = a  
z0 = 0  
v_x0 = 0  
v_z0 = 0  
CI = [x0,v_x0,z0,v_z0]
```