Exercices : 23 - Dipôles électriques et dipôles magnétiques

A. Dipôle électrostatique

1. Dipôle et spire chargée

Un dipôle $\vec{p}$ est placé au centre O d'une spire circulaire de rayon a portant la charge par unité de longueur λ, uniforme. $\vec{p}$ est aligné sur l'axe de la spire (cf. figure 1).

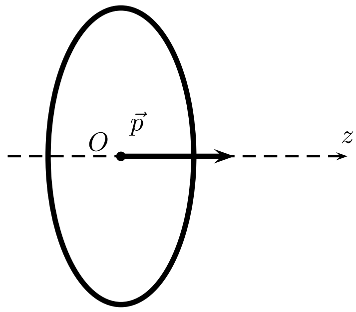


FIGURE 1 – Dipôle et fil circulaire

1. Calculer le champ électrique sur l'axe du dipôle.
2. En remarquant que le champ électrique n'est pas uniforme, calculer la résultante des efforts exercés sur le dipôle rigide.

2. Sphère dipolaire

Une sphère de centre O et de rayon R porte en un point quelconque M de sa surface la densité surfacique de charges $\sigma(M)$ donnée par $\sigma(M) = \sigma_0 \cos\theta$, où (R, θ, φ) désignent les coordonnées sphériques de M d'axe (Oz).

1. Montrer que cette distribution de charges est dipolaire et calculer le moment dipolaire correspondant.
2. Déterminer l'expression du champ électrique produit à une distance $r \gg R$ de la sphère.
3. On admet que cette distribution crée un champ électrique uniforme colinéaire à (Oz) à l'intérieur de la sphère. Déterminer la valeur du champ intérieur.

B. Moments magnétiques

3. Disque chargé en surface

Soit un disque isolant d'axe Oz et de rayon a qui porte une charge superficielle σ uniforme sur l'ensemble de la surface. Ce disque est mis en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. Déterminer l'expression du moment magnétique et l'expression du champ magnétique créé loin de la sphère en utilisant l'expression du cours donnant le champ magnétique d'un dipôle.

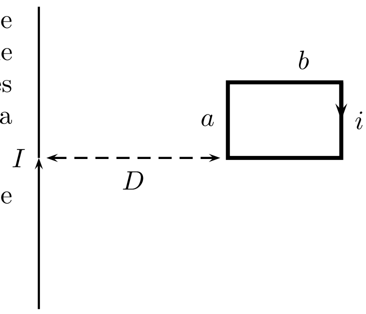
4. Sphère chargée en volume

Soit une sphère d'axe Oz et de rayon a qui porte une charge volumique ρ uniformément répartie. Cette sphère est mise en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Oz. Déterminer l'expression du moment magnétique et l'expression du champ magnétique créé loin de la sphère en utilisant l'expression du cours donnant le champ magnétique d'un dipôle.

C. Dipôle magnétique passif

5. Force exercée sur une spire

Un fil rectiligne infini, parcouru par un courant I, est disposé dans le vide dans le même plan qu'un rectangle de fil parcouru par un courant i. Les côtés du rectangle parallèles au fil sont de longueur a et placés aux distances D et $D + b$ du fil ; les deux autres côtés du rectangle sont de longueur b. On supposera $D \gg b$. Voir la figure ci-contre.



Déterminer la force de Laplace exercée par le fil sur la spire en considérant cette dernière comme un dipôle passif.

6. Oscillations de translation d'un dipôle magnétique

Une spire circulaire de rayon R, de centre O et d'axe $x'Ox$, est parcourue par un courant d'intensité I constante. Sur son axe, à l'abscisse x, est placé un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ de direction quelconque et libre de se déplacer en rotation comme en translation. On rappelle le champ magnétique créé par la spire sur son axe, à l'abscisse x :

$$\vec{B} = B_0 \frac{R^3}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}} \vec{e}_x \qquad \text{avec} \qquad B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

1. Trouver la position d'équilibre stable du dipôle (en orientation et position).
2. Le dipôle garde son orientation stable précédente mais est légèrement écarté sur l'axe Ox de sa position d'équilibre. Sachant que sa masse est m et que, suivant cet axe, il n'est soumis qu'à la seule force magnétique, donner la période T de ses petites oscillations.

7. Cadre plongé dans un champ magnétique

Un cadre rectangulaire $ABCD$ indéformable peut pivoter autour d'un axe médian MN. La surface du cadre est S. Il est parcouru par un courant I dans le sens $ABCD$. Il est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}_0$ placé dans un plan horizontal perpendiculaire à MN. On note J le moment d'inertie du cadre par rapport à l'axe MN. Voir la figure 2. On donne $AB = a$ et $BC = b$. La normale au cadre est représentée en pointillés.

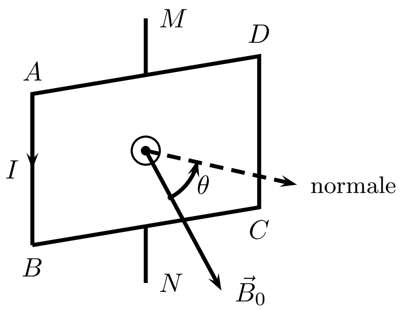


FIGURE 2 – Cadre

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement du cadre.
2. Quelles sont les positions d'équilibre ?
3. À quels endroits peut-on observer des oscillations de petites amplitudes dont on calculera la période ?

8. Piégeage dans le champ magnétique terrestre

Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui d'un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ placé au centre O de la Terre (on néglige son inclinaison).

1. Préciser la direction et le sens du dipôle. Exprimer le champ magnétique en coordonnées sphériques d'axe $(O, -\vec{\mathcal{M}})$.
2. Un électron de charge $-e$ et de masse m se déplace dans ce champ. Retrouver l'expression de la composante a_φ de son accélération dans le référentiel géocentrique supposé galiléen et, par application du théorème de la quantité de mouvement, en déduire :

$$\dot{\varphi}\, r^2 \sin^2\theta + \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi m} \frac{\sin^2\theta}{r} = K \quad \text{(Cte)}$$

3. Par application du théorème e l'énergie cinétique, trouver une seconde grandeur qui se conserve au cours du mouvement et introduire un potentiel (énergie) effectif $V(r,\theta)$ tel que :

$$\frac{1}{2} m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + V(r,\theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$$

4. Représenter graphiquement $V(r,\theta)$ en fonction de r (à θ donné) en cas de piégeage de l'électron.
5. Donner l'équation des lignes de champ magnétique et montrer que le piégeage se fait autour des lignes de champ magnétique.

6. Établirla condition sur K pour avoir un piégeage pour toute valeur de θ. Déterminer alors les trois équations polaires $r_1(\theta)$, $r_2(\theta)$ et $r_3(\theta)$ des courbes qui délimitent les zones de piégeage, interdite et de liberté. Sur un même graphique polaire, en donner une représentation graphique en indiquant les trois zones précédentes.

D. Dipôle magnétique actif

9. Comparaison de deux modèles

Soit une spire circulaire de centre O et de rayon R parcourue par un courant I. Soient A et A' deux points de l'axe de la spire tels que $OA = OA' = a$. Soit $\vec{B}$ le champ créé par la spire. Voir la figure 3.

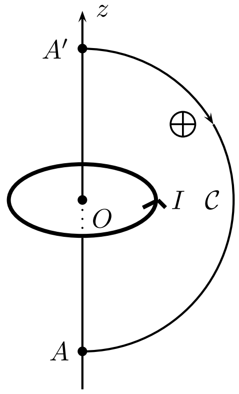


FIGURE 3 – Spire et dipôle

1. Une telle spire de courant de produit un champ magnétique sur son axe Oz colinéaire à $\vec{e}_z$. Justifier cette affirmation. Ce champ magnétique est-il pair ou impair avec z ?
2. On considère un point M situé sur l'axe de cote z. La spire est vue depuis ce point M sous un angle α où cet angle est mesuré entre l'axe et le bord de la spire. On donne la formule du champ magnétique produit :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \, \vec{e}_z$$

   Rechercher l'endroit où le champ magnétique est maximal. Tracer l'allure de l'évolution de $B_z(z)$.
3. Déterminer la circulation de $\vec{B}$ le long de $\overrightarrow{AA'}$.
4. En utilisant le théorème d'Ampère (le long du circuit fermé $AA' + \mathcal{C}$), en déduire la circulation de $\vec{B}$ le long du circuit $\mathcal{C}$, demi-cercle de centre O et de rayon a.
5. Déterminer le moment magnétique $\vec{M}$ de la spire, le champ créé par ce moment et la circulation de ce champ le long de $\mathcal{C}$. Comparer au résultat de la question précédente.

10. Ligne bifilaire infinie

Soient deux fils infinis parallèles distants de a et parcourus par des courants permanents identiques I mais de sens contraire.

1. Montrer que le champ magnétique produit par un seul fil parallèle à $\vec{e}_z$ est forcément de la forme :

$$\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{grad}\, f(r)$$

   où $f(r)$ est une fonction à préciser.
2. Déterminer le champ magnétique en tout point à grande distance des fils (distance $r \gg a$).
3. Tracer les lignes de champ.

11. Oscillateur à deux dipôles

Deux dipôles magnétiques (cf. fig. 4) de même moment dipolaire m constant peuvent tourner librement autour de deux axes parallèles, fixes, perpendiculaires à la droite AB qui les joint ($AB = a$).

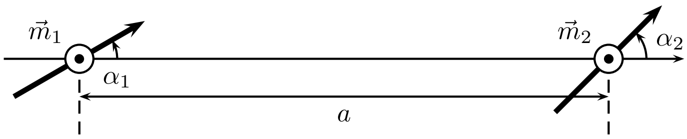


FIGURE 4 – Oscillateur à deux dipôles

1. Établir l'expression de l'énergie potentielle d'interaction entre ces deux dipôles, en fonction des angles α_1 et α_2 faits par les deux moments dipolaires avec la droite AB. On posera $W_0 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{m^2}{a^3}$.
2. Déterminer les états d'équilibre du système. Étudier leur stabilité.
3. On appelle J le moment d'inertie d'un de ces dipôles par rapport à son axe de rotation. Déterminer la pulsation des petites oscillations autour de l'équilibre d'un dipôle lorsque l'orientation de l'autre est bloquée.