

# Exercices : 23 - Dipôles électriques et dipôles magnétiques

— Solutions —

## A. Dipôle électrostatique

### 1. Dipôle et spire chargée

Réponses :  $\vec{E}_{sp} = \frac{\lambda a}{2\epsilon_0} \frac{z}{(a^2+z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$ ,  $\vec{F} = p \frac{\partial E_z}{\partial z} \vec{e}_z = \frac{p\lambda a}{2\epsilon_0} \left[ \frac{(a^2+z^2)^{3/2} - 3z^2(a^2+z^2)^{1/2}}{(a^2+z^2)^3} \right] \vec{e}_z$  et  $\vec{F} = p \left. \frac{\partial E_z}{\partial z} \right|_{z=0} \vec{e}_z = \frac{p\lambda}{2\epsilon_0 a^2} \vec{e}_z$ .

### 2. Sphère dipolaire

Réponses : On calcule la charge de l'hémisphère supérieure positive par  $q_+ = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \sigma_0 \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ ,  $q_+ = -q_- = \pi R^2 \sigma_0$ , barycentre  $G_+$  est sur l'axe  $Oz$  par symétrie, il est défini par  $q_+ \overrightarrow{OG_+} = \vec{e}_z \iint (\vec{e}_z \cdot \vec{e}_r) \sigma_0 \cos \theta R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , on trouve en  $\overrightarrow{OG_+} = \frac{2R}{3} \vec{e}_z$ ,  $\vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \vec{e}_z$ , on utilise les résultats du cours ou on redémontre que  $V = \frac{\vec{p} \cdot \vec{e}_r}{4\pi\epsilon_0 r^2}$  et  $\vec{E}$  par la relation  $\vec{E} = -\text{grad} V$ . On effectue le calcul au centre  $O$  de la sphère par intégration des contributions du champ électrique élémentaire créé par un morceau de la surface  $d\vec{E} = \vec{e}_z \frac{\sigma_0 \cos \theta}{4\pi R^2} (-\vec{e}_r \cdot \vec{e}_z) R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ , on arrive à  $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} \vec{e}_z$ .

## B. Moments magnétiques

### 3. Disque chargé en surface

Réponses :  $\vec{m} = \frac{\pi\sigma\omega a^4}{4} \vec{e}_z$ ,  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{16} \frac{\sigma\omega a^4}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$ .

### 4. Sphère chargée en volume

Réponses :  $\vec{m} = \frac{4\pi\rho\omega a^5}{15} \vec{e}_z$ ,  $\vec{B} = \frac{\mu_0}{15} \frac{\rho\omega a^5}{r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$ .

## C. Dipôle magnétique passif

### 5. Force exercée sur une spire

Réponses :  $E_{pot}(r) = -iab \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$ ,  $E_{pot}(r=D) = -iab \frac{\mu_0 I}{2\pi D}$ ,  $F_r = -\left(\frac{dE_{pot}}{dr}\right)_{r=D}$ ,  $F_r = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{iIab}{D^2}$ .

### 6. Oscillations de translation d'un dipôle magnétique

Réponses : l'énergie potentielle du dipôle magnétique dans le champ magnétique  $\mathcal{E}_p = -\vec{\mathcal{M}} \cdot \vec{B}$  est, pour l'équilibre stable, minimale. Par conséquent, pour cette position stable,  $\vec{\mathcal{M}}$  est parallèle à  $\vec{B}$ , de même sens, et le moment se trouve au point où  $\|\vec{B}\|$  est maximal (soit au centre de la spire, en  $x=0$ ). Plusieurs méthodes sont possibles : soit on utilise le théorème de l'énergie mécanique que l'on dérive, soit on utilise directement le théorème de la résultante dynamique. Le dipôle est soumis de la part du champ inhomogène de la spire à une force dont la projection suivant l'axe ( $Ox$ ) est  $F_x = \vec{\mathcal{M}} \cdot \frac{d\vec{B}}{dx} = \mathcal{M} \frac{dB}{dx}$  d'où  $B = B_0 \frac{R^3}{(R^2+x^2)^{3/2}}$ . On a posé  $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$  (champ au centre de la spire). Alors, on tire  $F_x = \mathcal{M} B_0 R^3 \frac{-3x}{(R^2+x^2)^{5/2}}$ . Au voisinage de la position d'équilibre  $x=0$ , cette force se réduit à une force de rappel (ce qui n'est pas étonnant car  $x=0$  correspond à un équilibre stable) de type  $-kx$  pour  $|x| \ll R$  :  $F_x \simeq -\frac{3\mathcal{M}B_0}{R^2} x$ . Le théorème de la résultante dynamique projeté sur ( $Ox$ ) donne  $m\ddot{x} = -\frac{3\mathcal{M}B_0}{R^2} x$ . On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique dont le mouvement oscillatoire a pour pulsation  $\omega = \sqrt{\frac{3\mathcal{M}B_0}{mR^2}}$ . En remplaçant  $B_0$ , on déduit la période des oscillations  $T = 2\pi \sqrt{\frac{2mR^3}{3\mu_0 \mathcal{M}I}}$ .

### 7. Cadre plongé dans un champ magnétique

Réponses :  $J\ddot{\theta} + IabB_0 \sin \theta = 0$ ,  $\theta = 0$  stable,  $\theta = \pi$  instable, autour de  $\theta = 0$  avec  $T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{IabB_0}}$ .

### 8. Piégeage dans le champ magnétique terrestre

Réponses : Sur la figure sont indiqués les pôles nord ( $N_g$ ) et sud ( $S_g$ ) géographiques de la Terre. Une aiguille aimantée (boussole) donne la direction et le sens du champ  $\vec{B}$  terrestre par sa direction et son sens sud-nord. Son pôle nord étant attiré par le pôle sud de  $\vec{\mathcal{M}}$ , on doit avoir  $\vec{\mathcal{M}}$  vers le bas. Le sud magnétique est vers le nord géographique  $N_g$ . Il y a inversion actuellement et l'exercice néglige l'inclinaison magnétique. Voir le schéma de la figure 1.

On pose  $\vec{\mathcal{M}} = -\mathcal{M} \vec{e}_z$  (où  $\mathcal{M} > 0$ ). Le champ magnétique terrestre est assimilé à celui du dipôle magnétique :  $\vec{B} = -\frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$ . En coordonnées cylindriques ( $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$ ), on a  $\overrightarrow{OM} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z$  donc  $\vec{v} = \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi + \dot{z} \vec{e}_z$  soit  $\vec{a} \cdot \vec{e}_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} \rho^2)$ . Ensuite, on remarque que pour les coordonnées sphériques, cette composante de l'accélération est la même, en introduisant  $\rho = r \sin \theta$ . Par conséquent,

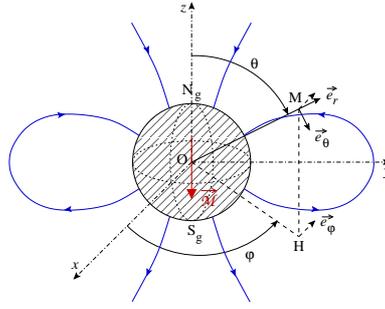


FIGURE 1 – Trajectoires dans un champ magnétique

$a_\varphi = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta)$ . L'électron est soumis à la force de Lorentz  $\vec{F} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$  et le théorème de la résultante dynamique dans le référentiel géocentrique galiléen donne  $m \vec{a} = -e \vec{v} \wedge \vec{B}$ . En projection sur  $\vec{e}_\varphi$ , on obtient  $m a_\varphi = -e (v_r B_\theta - v_\theta B_r)$  avec les composantes  $v_r = \dot{r}$  et  $v_\theta = r \dot{\theta}$ . En remplaçant, on tire  $\frac{m}{\sin \theta} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta) = \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi r^2} (\dot{r} \sin \theta - 2 r \dot{\theta} \cos \theta)$ . Ensuite, on obtient  $-\frac{4\pi m}{\mu_0 \mathcal{M} e} \frac{d}{dt} (\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta) = \sin^2 \theta \frac{d}{dt} \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (\sin^2 \theta)$  d'où, finalement, le résultat attendu  $\dot{\varphi} r^2 \sin^2 \theta + \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi m r} \sin^2 \theta = K$ . La force de LORENTZ uniquement magnétique ne travaille pas donc l'énergie cinétique est constante :  $\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$ . On en déduit l'expression de l'énergie potentielle effective :  $V(r, \theta) = \frac{m}{2 r^2 \sin^2 \theta} \left( K - \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi m r} \sin^2 \theta \right)^2$ . Puisqu'on a forcément  $\frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) \geq 0$  alors  $V(r, \theta) \leq \frac{1}{2} m v_0^2$  et on en déduit les zones interdites qui ne vérifient pas cette condition. De plus, on note que  $V(r, \theta) \rightarrow \infty$  pour  $r \rightarrow 0$  et  $V(r, \theta) \rightarrow 0$  pour  $r \rightarrow \infty$ . Enfin, on constate que si  $K > 0$ , alors  $V$  présente un minimum (nul) en  $r_{min} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi m K} \sin^2 \theta$ . Alors,  $V$  présente forcément un maximum pour une distance  $r_{max}$ . En calculant et annulant la dérivée de  $V(r, \theta)$  à  $\theta$  fixé, on trouve  $r_{max} = 2 r_{min}$ . Le tracé de l'énergie potentielle effective à  $\theta$  fixé est donné sur la figure 2, dans le cas  $K > 0$  de piégeage, ce piégeage se faisant pour  $r_1 \leq r \leq r_2$  lorsque  $V_{max} \geq \frac{1}{2} m v_0^2$  (la zone  $r \geq r_3$  est une zone de liberté et les zones  $r < r_1$  et  $r_2 < r < r_3$  sont interdites).

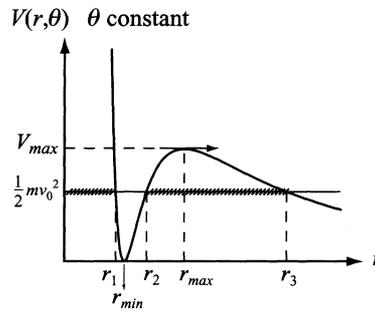


FIGURE 2 – Évolution du potentiel (énergie potentielle) effectif

En exprimant la colinéarité de  $\vec{B}$  et de  $\vec{l}$  le long d'une ligne dans un plan méridien, on trouve l'équation des lignes de champ magnétique dipolaires (où  $\alpha = Cte$  fixant chaque ligne) :  $r = \alpha \sin^2 \theta$ . Ici, le piégeage se fait autour de  $r_{min} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi m K} \sin^2 \theta = \alpha \sin^2 \theta$  et se fait donc bien autour des lignes de champ magnétique ! On a vu la condition de piégeage  $V_{max} \geq \frac{1}{2} m v_0^2$  (\*) et on en déduit qu'il y a un piégeage pour  $\theta$  quelconque si  $\frac{\pi K^2 m}{\mu_0 \mathcal{M} e v_0} \geq 1$ . On obtient  $r_1(\theta)$ ,  $r_2(\theta)$  et  $r_3(\theta)$  en résolvant le cas d'égalité de (\*) :  $\pm r^2 v_0 \sin \theta - K r + \frac{\mu_0 \mathcal{M} e}{4\pi m} \sin^2 \theta = 0$ . Les racines positives sont alors  $r_1(\theta) = \frac{-K + \sqrt{K^2 + \frac{\mu_0 \mathcal{M} e v_0}{\pi m} \sin^3 \theta}}{2 v_0 \sin \theta}$ ,  $r_2(\theta) = \frac{K - \sqrt{K^2 - \frac{\mu_0 \mathcal{M} e v_0}{\pi m} \sin^3 \theta}}{2 v_0 \sin \theta}$  et  $r_3(\theta) = \frac{K + \sqrt{K^2 - \frac{\mu_0 \mathcal{M} e v_0}{\pi m} \sin^3 \theta}}{2 v_0 \sin \theta}$ . Les courbes associées sont représentées sur la figure 3. Les zones interdites sont hachurées. La zone de liberté est à droite et la zone de piégeage entre les deux courbes  $r_1(\theta)$  et  $r_2(\theta)$ . Le point  $M$  représenté est en zone de liberté. Il suffit de faire tourner ces zones autour de  $(Oz)$  pour obtenir leur géométrie spatiale de révolution. Les rayons cosmiques produisent des particules chargées qui se retrouvent piégées dans la zone de piégeage et qui provoquent, près des pôles, les aurores boréales par interaction avec l'atmosphère.

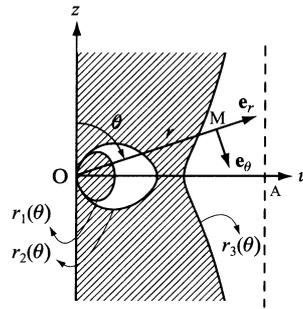


FIGURE 3 – Les différentes zones

## D. Dipôle magnétique actif

### 9. Comparaison de deux modèles

Réponses : tous les plans contenant l'axe  $z$  sont des plans d'antisymétrie de la distribution des courants,  $\vec{B}$  appartient à ces plans donc à leur intersection constituée par l'axe  $Oz$ , le plan de la spire  $Oxy$  est un plan de symétrie de la distribution des courants,  $B_z(-z) = B_z(z)$   $\vec{B}$  est paire car c'est un pseudo-vecteur,  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2R} \sin^3 \alpha \vec{e}_z$  est maximum en  $z = 0$ , c'est-à-dire en  $\alpha = \pi/2$ , courbe en cloche de maximum en  $z = 0$ ,  $\int_A^{A'} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ ,  $\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I (1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + R^2}})$ ,  $\vec{m} = I\pi R^2 \vec{e}_z$ ,  $\vec{B}_{dip} = \frac{\mu_0 m}{4\pi r^3} (2 \cos \theta \vec{e}_r + \sin \theta \vec{e}_\theta)$ ,  $\int_C \vec{B}_{dip} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I \pi R^2}{4\pi a^2} \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \mu_0 I \frac{R^2}{2a^2}$ , retrouvé par développement limité de l'autre expression pour  $R \ll a$ .

### 10. Ligne bifilaire infinie

Réponses : on commence par étudier le cas d'un fil infini seul et on trouve en procédant comme en cours (symétries, invariances puis théorème d'AMPÈRE) :  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_r$  en coordonnées cylindriques d'axe le fil (où  $I$  est selon  $(Oz)$ ). Finalement,  $\vec{B} = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}} f(r)$  avec  $f(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r}{r_0}$  où  $r_0$  est une constante quelconque. On passe par le théorème de superposition ! Il n'est pas simple de superposer directement les champs magnétiques produits par chacun des fils car les coordonnées cylindriques utilisées pour exprimer ces champs ne sont pas de même axe ! Dans une telle situation, sommer des champs vectoriels est trop pénible et on tente de sommer plutôt des champs scalaires. Grâce à la question précédente, on peut ruser ! Dans le problème des deux fils, on note  $(Oz)$  un axe parallèle aux fils placé dans le plan des fils à mi-distance entre eux ; on pose  $(Ox)$  un axe orthogonal à  $(Oz)$  dans le plan des fils et les positions des fils sont repérées par  $x = -a/2$  et  $x = +a/2$ . On note  $(r_1, \theta_1, z)$  les coordonnées cylindriques d'axe le fil (indiqué 1) parcouru par  $I$  en  $x = a/2$  et  $(r_2, \theta_2, z)$  les coordonnées cylindriques d'axe le fil (indiqué 2) parcouru par  $-I$  en  $x = -a/2$ . Enfin,  $(r, \theta, z)$  sont les coordonnées cylindriques d'axe  $(Oz)$  dans lesquelles on recherche le résultat final. Le champ total est  $\vec{B}(M) = \vec{e}_z \wedge (\overrightarrow{\text{grad}} f_1 + \overrightarrow{\text{grad}} f_2) = \vec{e}_z \wedge \overrightarrow{\text{grad}} (f_1 + f_2)$  avec  $f_1 + f_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}$  à une constante près sans importance (en fait, elle est forcément nulle car  $f$  est un vrai-scalaire et le plan  $x = 0$  est de symétrie négative des sources donc  $f$  doit être nulle en  $x = 0$ ). Or, avec le théorème d'Al-Kashi,  $r_1^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} - ar \cos \theta$  et  $r_2^2 = r^2 + \frac{a^2}{4} + ar \cos \theta$ . Puisque  $r \gg a$ , on effectue un développement limité à l'ordre 1 pour trouver  $r_1 \simeq r(1 - \frac{a}{2r} \cos \theta)$  et  $r_2 \simeq r(1 + \frac{a}{2r} \cos \theta)$  donc  $f_1 + f_2 \simeq \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln(1 - \frac{a}{r} \cos \theta) \simeq -\frac{\mu_0 I a}{2\pi r} \cos \theta$ . Il ne reste qu'à calculer le gradient et à passer au champ magnétique. On trouve  $\vec{B} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi r^2} [-\sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta]$ . On constate déjà que les lignes de champ magnétique sont dans des plans  $z = \text{cte}$  car  $B_z = 0$  (ce qui est cohérent avec l'antisymétrie des sources par chacun de ces plans). On se place alors dans l'un de ces plans. Soit  $d\vec{l} = dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta$  un déplacement élémentaire le long d'une ligne de champ.  $d\vec{l}$  est parallèle à  $\vec{B}$ , d'où  $\frac{dr}{r d\theta} = -\frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ . Cette dernière équation (à variables séparables) s'intègre en  $\ln r = \ln |\cos \theta| + \text{cte}$  soit  $r = 2R |\cos \theta|$ . Les lignes de champ sont des cercles tangents en  $O$  à l'axe  $(Oy)$ . Attention, elles ne sont correctes qu'à grande distance des fils !

### 11. Oscillateur à deux dipôles

Réponses :  $\vec{B}_1(A_2) = \frac{\mu_0 m}{4\pi a^3} [2 \cos \alpha_1 \vec{e}_r + \sin \alpha_1 \vec{e}_\theta]$ ,  $\vec{m}_2 = m[\cos \alpha_2 \vec{e}_r - \sin \alpha_2 \vec{e}_\theta]$ ,  $W = W_0[-2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2]$ ;  $\frac{\partial W}{\partial \alpha_1} = 0$ ,  $\frac{\partial W}{\partial \alpha_2} = 0$ ,  $2 \cos \alpha_2 \sin \alpha_1 = -\cos \alpha_1 \sin \alpha_2$ ,  $2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = -\cos \alpha_2 \sin \alpha_1$ ,  $\cos \alpha_1 \sin \alpha_2 = 0$  et  $\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 = 0$ ,  $(0, 0)$  stable,  $(\pi, \pi)$  stable,  $(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2})$  stable,  $(0, \pi)$  instable,  $(\pi, 0)$  instable,  $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$  instable;  $J\dot{\epsilon} + 2W_0\epsilon = 0$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2W_0}{J}}$  autour de  $(0, 0)$ .