

Exercices : 24 - Induction

A. Conducteur mobile dans un champ magnétique indépendant du temps

1. Induction et conversion d'énergie

Une tige rectiligne de longueur a , de masse m et de résistance R effectue un mouvement de translation le long de la verticale descendante \vec{e}_z en restant parallèle à une direction horizontale et tout en fermant un circuit rectangulaire qui comporte une bobine d'inductance L . La résistance totale du circuit est R quelque soit la position de la tige. L'ensemble du dispositif est plongé dans un champ magnétique $\vec{B} = -B\vec{e}_y$ uniforme et permanent. La tige est abandonnée à $t = 0$, avec une vitesse nulle. Son glissement s'effectue sans frottements, on notera v sa vitesse. Voir la figure 1.

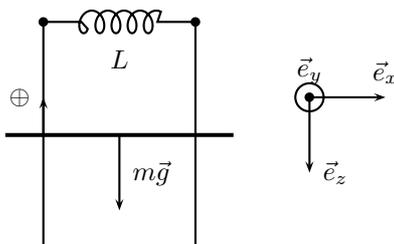


FIGURE 1 – Chute d'une barre dans le champ de pesanteur

1. En notant i l'intensité du courant qui circule à l'instant t , écrire une équation différentielle faisant intervenir i et sa dérivée par rapport au temps. Le sens arbitrairement choisi pour l'intensité i est donné sur la figure 1.
2. Établir une équation différentielle liant v et sa dérivée par rapport au temps.
3. En combinant convenablement les deux équations précédentes, faire apparaître une équation en puissance. On écrira le premier membre de cette équation comme la dérivée d'une énergie que l'on identifiera.
4. Écrire une équation différentielle faisant intervenir uniquement i .
5. Dans le cas d'une résistance assez grande, décrire qualitativement l'évolution des fonctions $i(t)$ et $v(t)$. Mettre en évidence un couple de valeurs particulières i_0 et v_0 dont on expliquera la signification physique.
6. Dans l'hypothèse inverse d'une résistance négligeable, calculer explicitement les fonctions $i(t)$, $v(t)$ et $z(t)$. Analyser la situation obtenue d'un point de vue énergétique.

2. Oscillateur amorti par induction

On considère un dispositif du type des rails de LAPLACE permettant d'étudier les oscillations amorties par induction. Le dispositif est constitué de deux rails conducteurs parallèles séparés par une distance a . Les deux rails dont on néglige la résistance électrique sont reliés à une extrémité par une résistance électrique R . Ils sont placés dans le plan horizontal. Une barre conductrice, de masse m , se déplace selon un axe Ox en étant en contact avec les rails. Le contact est supposé parfait sur le plan électrique mais aussi parfait sur le plan mécanique, c'est-à-dire que l'on néglige les frottements. la barre est accrochée à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . On choisit de prendre l'origine de l'axe Ox à la position d'équilibre du système barre-ressort. Le tout est plongé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$ perpendiculaire au plan horizontal. Voir le schéma de la figure 2. À la date $t = 0$, on écarte la barre de sa position d'équilibre en réalisant $x = x_0 > 0$ puis on lâche la barre.

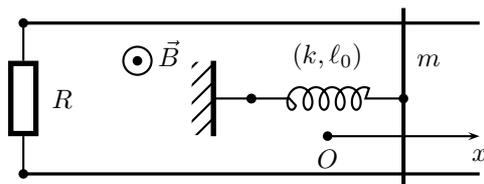


FIGURE 2 – Oscillateur amorti

1. Proposer une étude qualitative du problème.

2. Déterminer l'expression de l'intensité i du courant induit en fonction de la vitesse de la barre x entre autre.
3. Montrer que l'abscisse x de la barre obéit à l'équation différentielle : $\ddot{x} + \frac{\dot{x}}{\tau} + \omega_0^2 x = 0$. Exprimer τ et ω_0 .
4. Quelle est la condition pour que l'on observe des oscillations amorties ?
5. Établir l'expression de $x(t)$ dans ce cas.
6. Proposer un bilan énergétique et donner l'expression de l'énergie dissipée par effet JOULE.

3. Pendule freiné

Soit une roue de Barlow sur laquelle est fixée rigidement une tige de masse négligeable portant une surcharge m située à la distance b du centre de la roue. Le moment d'inertie total du système mobile en rotation par rapport à l'axe horizontal de la roue est J . La roue fait partie d'un circuit comprenant un générateur de tension de fem E et une résistance totale R . On négligera l'inductance propre de ce circuit. La roue est plongée dans un champ magnétique horizontal uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Voir la figure 3. Le courant emprunte entre autre le parcours OD , on donne la distance $OD = a$. La résistance R est relié directement au point O . La roue et le pendule de masse m sont disposés dans un plan vertical.

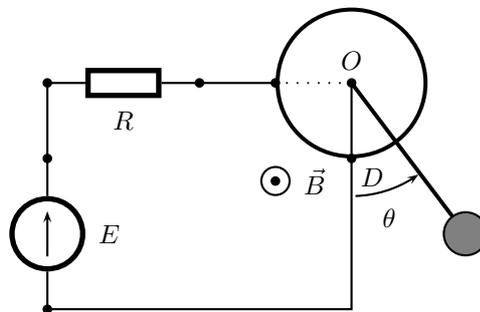


FIGURE 3 – Pendule freiné

1. Déterminer la position d'équilibre du système dans le champ de pesanteur.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement de la roue de BARLOW et de son pendule.
3. Déterminer la période des oscillations de faible amplitude non amorties.

4. Oscillations d'un cadre

On considère un cadre de masse m et de moment d'inertie J pour la rotation autour de l'axe Ox horizontal. La liaison pivot autour de l'axe Ox est parfaite. Le cadre est conducteur de résistance électrique R . Il est soumis à un champ magnétique uniforme et indépendant du temps $\vec{B}_0 = B_0\vec{e}_z$. On écarte le cadre de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 relativement faible et on le lâche. On observe qu'il effectue des oscillations amorties repérées par l'angle θ autour de l'axe Ox . Voir le schéma de la figure 4.

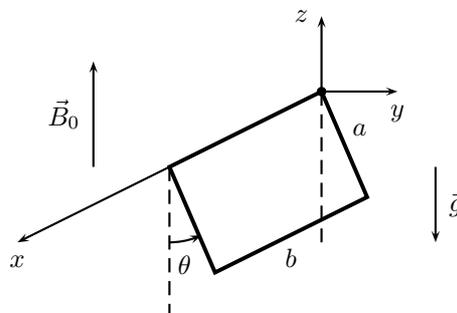


FIGURE 4 – Cadre oscillant

1. Expliquer qualitativement le phénomène observé.
2. Calculer le flux du champ magnétique pour un angle θ donné. Dans un premier temps, on travaille pour un angle θ quelconque.

3. En déduire l'équation électrique régissant l'évolution du cadre.
4. Établir l'équation mécanique permettant de décrire le mouvement du cadre.
5. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ en considérant uniquement les petits angles.
6. Quelle est la condition sur B_0 pour que l'on puisse observer des oscillations amorties ?
7. Proposer une analyse énergétique qualitative du problème.

5. Lois de Laplace. . .

On considère une enceinte parfaitement calorifugée contenant un gaz parfait identique dans les deux compartiments séparés par un piston mobile, lui aussi parfaitement calorifugée, qui est relié par une tige à un conducteur susceptible d'évoluer dans un champ magnétique uniforme. Voir le schéma de la figure 5. Lorsque la position du piston sépare en deux compartiments identiques l'enceinte ($x = 0$), le gaz dans chaque compartiment est caractérisé par une pression P_0 , une température T_0 et un volume V_0 . La section de l'enceinte perpendiculairement à l'axe Ox est notée S . Le déplacement du piston au contact des parois de l'enceinte s'effectue sans frottements. Le conducteur de longueur a se déplace sans frottement mécanique sur des rails horizontaux conducteurs de type rails de LAPLACE. Il règne au niveau de rails un champ magnétique uniforme vertical $\vec{B} = B\vec{e}_z$. Ces rails sont constitutifs d'un circuit de résistance invariable notée R . L'ensemble piston-tige est de masse m . Le gaz parfait est caractérisé par un coefficient $\gamma = c_p/c_v$.

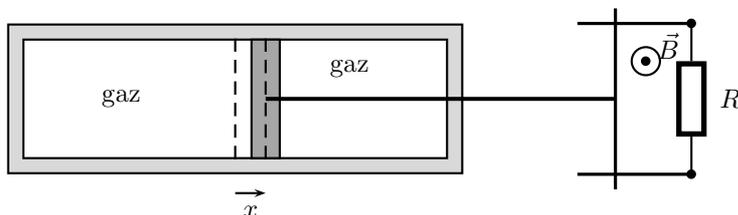


FIGURE 5 – Le cylindre, le piston et les rails de LAPLACE

1. On écarte le piston de la position médiane d'une quantité $x_0 > 0$ et on le lâche. Décrire qualitativement le phénomène que l'on va observer en justifiant.
2. Établir l'équation différentielle du mouvement du piston pour des mouvements de petites amplitudes.
3. Discuter les formes des solutions de l'équation différentielle en fonction de la valeur du champ magnétique \vec{B} uniforme imposé.
4. Dans le cas d'un champ magnétique faible, établir l'expression de l'abscisse du piston $x(t)$.

6. Poursuite de tiges !

On considère $n + 1$ tiges identiques, de masse m , de résistance R et de coefficient d'auto-induction négligeable, pouvant glisser sans frottement sur deux rails horizontaux équidistants de a . L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme. La tige T_0 est maintenue fixe et on impose une vitesse initiale $v_n = v_0$ à la tige T_n . À l'instant initial, les tiges sont placées de telle sorte que $x_k(0) = ka$ et toutes les tiges sauf T_n sont immobiles. Voir le schéma de la figure 6.

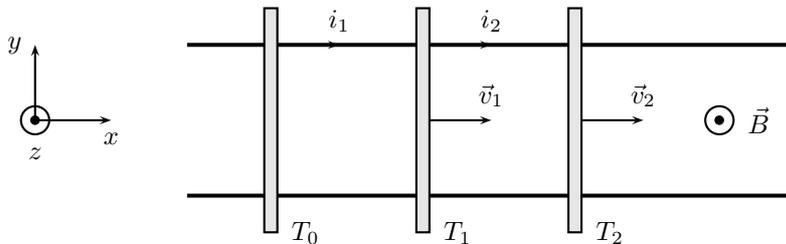


FIGURE 6 – Tiges mobiles sur des rails horizontaux sans frottement

1. Dans le cas $n = 1$, démontrer que la force électromotrice induite dans le circuit est $e_1 = Bav_1$.

En généralisant le résultat, on admet que pour $n \geq 1$, la force électromotrice qui apparaît dans chacune des tiges est $e_n = Bav_n$.

2. On se place dans le cas $n = 2$. Quel est le schéma électrique équivalent du circuit ? Quelle équation vérifie la vitesse de la tige T_1 ? En déduire la loi $v_1(t)$.
3. Quel est le mouvement des tiges en régime permanent ? pouvait-on obtenir ce résultat sans faire une étude mécanique complète du système ?

On considère maintenant $n = 3$.

4. Exprimer les courants i_n en fonction de v_n . En déduire $v_1(t)$ et $v_2(t)$. Que remarque-t-on ? Comparer au cas $n = 2$. Quel est le mouvement en régime permanent ?
5. En utilisant le programme *Python* dénommé *2017-006-BarreInduction*, étudier l'évolution de l'énergie du système entre l'instant initial et le régime permanent final ?
6. On se place dans le cas n quelconque. Quel est le mouvement en régime permanent ? Comment varie l'énergie du système entre l'instant initial et le régime permanent final ?

7. Principe du frein électromagnétique

Les véhicules routiers lourds utilisent le frein électromagnétique décrit sur la figure 7 qui en précise le principe général : les forces de LAPLACE exercées sur les courants de FOUCAULT engendrés par la rotation d'un disque métallique en ralentissent la rotation. Sur la partie gauche du schéma, on observe la disposition alternée du courant dans les $2N$ bobines (alimentées par la batterie du camion) donc la répartition alternée du champ magnétique.

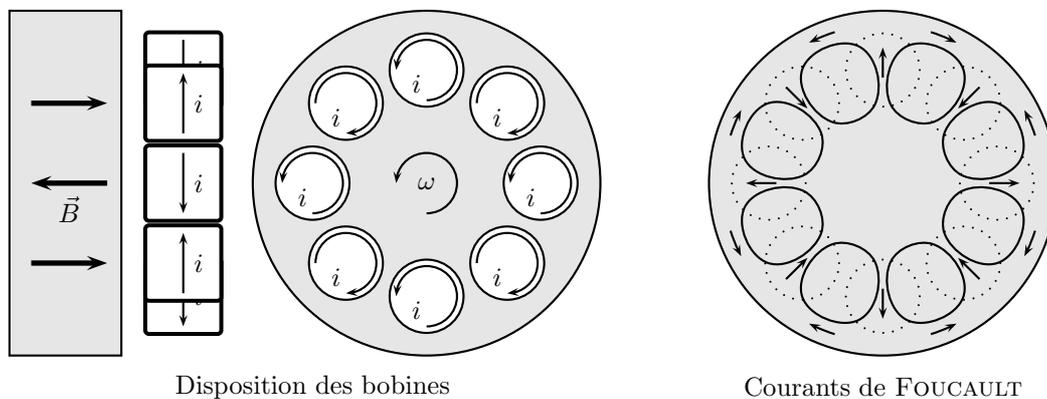


FIGURE 7 – Principe du frein électromagnétique

Lorsque le frein est en service, les $2N$ bobines sont parcourues par le courant i . Le disque métallique représenté est solidaire des axes des roues et tourne donc à la vitesse angulaire ω . Chaque disque comporte donc $2N$ régions subissant le champ magnétique alterné $\pm B_0 \vec{e}_z$, en utilisant une base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ pour la description du disque tournant. On notera R la distance moyenne au centre du disque de chacune de ces bobines ; on supposera que, du fait de la conductivité γ du disque tournant, des courants de FOUCAULT apparaissent dans le disque, et que ces courants sont pratiquement radiaux dans chaque zone située en face d'une bobine.

1. On s'intéresse à une des N régions du disque où le champ est $\vec{B} = +B_0 \vec{e}_z$; déterminer la densité volumique des courants induits.
2. En déduire la force de LAPLACE exercée par unité de surface du disque, en fonction de γ , ω , B_0 , R , et de l'épaisseur e du disque.
3. Calculer la puissance totale dissipée par ces forces de freinage ; on l'exprimera en fonction de γ , ω , R , B_0 , e et de la surface utile S_u du disque, c'est-à-dire la partie de cette surface qui est disposée en face d'une bobine.
Comment retrouver cette expression par une autre méthode ?
4. Montrer que le disque est soumis à un couple de freinage par unité de volume utile de disque tournant donné par $\frac{d\Gamma_{\text{freinage}}}{d\tau} = -\gamma \omega R^2 B_0^2$. Commenter.

8. Principe d'un sismographe à détection électromagnétique

Un sismographe est constitué d'un bâti (A), rigidement lié au sol, auquel on suspend par un système ressort-amortisseur un cylindre de masse élevée m . Ce cylindre est aussi un aimant cylindrique, dont le cylindre intérieur est le pôle nord et le cylindre extérieur le pôle sud (cf. figure 8).

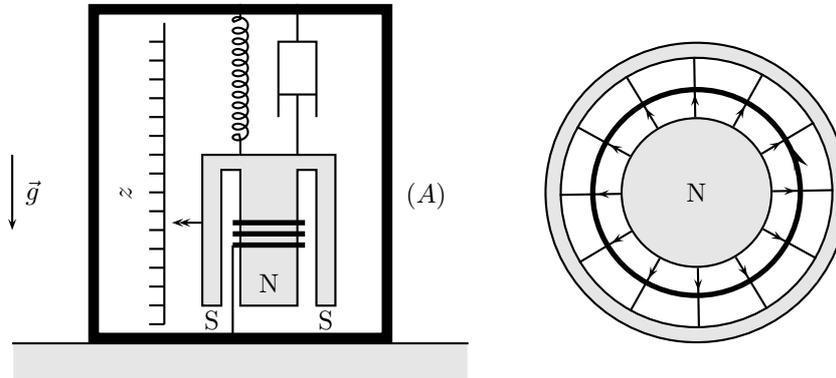


FIGURE 8 – Principe d'un sismographe à détection électromagnétique

La même figure montre les lignes de champ (radiales) du champ magnétique, et le circuit de détection, formé de N spires circulaires de même rayon a , liées au bâti, orientées comme l'indique la figure. Le champ magnétique au niveau de la boucle de détection est d'intensité constante B_0 . On note k la constante de raideur du ressort et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$; durant le passage d'une onde sismique, le sol est soumis à l'accélération verticale $\vec{a} = \gamma_0 \cos \omega t \vec{e}_z$, l'axe (Oz) étant vertical ascendant. On étudie les vibrations du sismographe, c'est-à-dire les oscillations verticales $z(t)$ de la masse m relativement au bâti, par rapport à sa position d'équilibre en l'absence d'onde sismique. La force d'amortissement est de la forme $-h\dot{z}\vec{e}_z$ avec $h = 2m\xi\omega_0$.

Pour cela, le circuit de détection est ouvert et on mesure la tension $u(t)$ à ses bornes.

1. Justifier soigneusement l'équation différentielle $\ddot{z} + 2\xi\omega_0\dot{z} + \omega_0^2z = -\gamma_0 \cos \omega t$.
2. Expliciter la force électro-motrice induite le long du circuit de détection.
3. Déterminer, en régime harmonique, la fonction de transfert complexe $\bar{K} = \bar{u}/\gamma_0$, où u est la tension aux bornes du circuit de détection. Commenter.

9. Rail de Laplace

Dans le plan horizontal du référentiel galiléen $\mathcal{R} = (O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, on place comme représenté sur la figure 9, un circuit électrique composé de deux rails distants de h , reliés par une impédance \underline{Z} et d'une barre $[MN]$, de masse m glissant sans frottement sur les rails, en restant perpendiculaire aux rails. On néglige la résistance des deux rails et de la barre ainsi que le coefficient d'autoinductance du circuit devant \underline{Z} . Le système est placé dans un champ magnétique constant et uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$ avec $B > 0$. À l'instant $t = 0$, un opérateur exerce une force sur la barre $[MN]$, de manière à lui donner la vitesse $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ suivant les x croissants. On note $\vec{g} = -g\vec{e}_z$, le champ de pesanteur. Dans un premier temps, l'impédance $\underline{Z} = R$ est une résistance électrique.

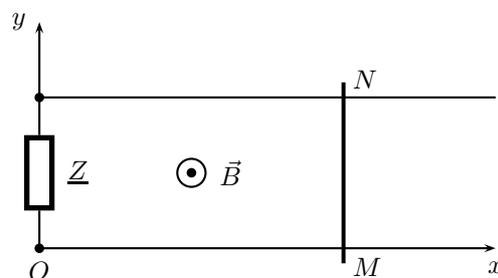


FIGURE 9 – Rail de LAPLACE

1. En effectuant un raisonnement qualitatif, indiquer le sens du courant induit dans le circuit. La barre $[MN]$ agit comme un générateur, quelle est sa borne positive ?
2. Établir l'équation différentielle suivie par la vitesse v de la barre. Donner sa solution.

3. L'impédance \underline{Z} est maintenant une bobine idéale de coefficient d'inductance L . Quelle est l'équation différentielle du mouvement de la barre ? Faire une analyse physique de la situation.
4. L'impédance \underline{Z} est maintenant un condensateur parfait de capacité C . Quelle est l'équation différentielle du mouvement de la barre ? Faire une analyse physique de la situation.

On fait subir au plan du circuit une rotation d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le point M de la barre appartient alors à l'axe Ox' et le mouvement de la barre est décrit par la variable x' , voir le schéma de la figure 10. La barre est initialement immobile, elle est mise en mouvement par l'action de la pesanteur.

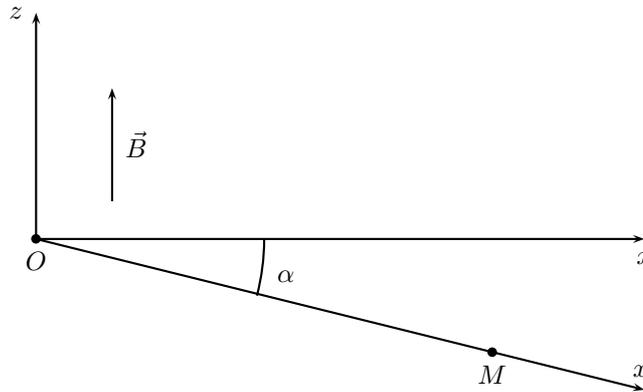


FIGURE 10 – Rail de LAPLACE incliné

5. Déterminer le sens du courant induit et la polarité de la barre $[MN]$ considérée en tant que générateur.
6. Établir l'équation différentielle donnant le mouvement de la barre.
7. Que se passe-t-il si on incline le plan du circuit, toujours d'un angle α , non pas vers le bas mais vers le haut ?

10. Freinage d'un cadre conducteur

On considère un fil rectiligne infini dans lequel circule un courant permanent d'intensité I . On considère aussi un cadre rectangulaire indéformable maintenu sans frottement dans le plan vertical de la figure 11. Ce cadre peut se déplacer sur un axe horizontal (Or). La hauteur du cadre est h , sa largeur assez petite est a . Le cadre est formé d'un conducteur ohmique de résistance R . À la date $t = 0$, le cadre est situé à une distance $L \gg a$ du fil infini. On lui donne une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_r$.

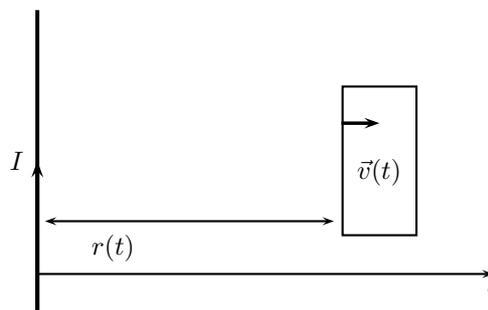


FIGURE 11 – Cadre freiné

1. Déterminer l'expression du champ magnétique créé par le fil infini.
2. Montrer qualitativement que le cadre va subir une force qui tend à le ralentir.
3. Établir l'équation différentielle r du mouvement permettant de déterminer la vitesse $v = \frac{dr}{dt}$ du cadre.
4. Discuter.

B. Conducteur fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

11. Pince ampèremétrique

Une pince ampèremétrique est constituée d'un tore de section carrée de côté $a = 1$ cm, d'axe Oz et de rayon moyen $3/2a$, sur lequel on a bobiné régulièrement un grand nombre (10^4) de spires carrées de côté a en série. Ce circuit de résistance $R = 0,2 \Omega$, est fermé sur un ampèremètre de résistance $r = 0,3 \Omega$. D'autre part, un fil infini, confondu avec l'axe Oz , est parcouru par un courant d'intensité $I(t) = I_0 \cos \omega t$, de fréquence $f = 50$ Hz. Soit $i(t) = i_m \cos(\omega t + \varphi)$ la valeur du courant dans la pince ampèremétrique en régime sinusoïdal forcé. On songera à utiliser la notation complexe.

1. Soit \vec{B} le champ magnétique total créé par la pince et le fil. Justifier que $\vec{B} = B_0(r)\vec{e}_\theta$ et déterminer $B_0(r)$ en un point P situé dans la section d'une spire carrée du tore.
2. En déduire le flux magnétique total Φ à travers les N spires. Donner les expressions du coefficient d'inductance propre du tore L et le coefficient d'inductance mutuelle M entre le tore et le fil.
3. Calculer le rapport i_m/I_0 dans les conditions de l'étude. Intérêt et utilisation d'un tel dispositif?

12. Résistance équivalente aux pertes par courants de Foucault

À l'intérieur d'un solénoïde très long, de longueur l , comportant N spires d'aire S , normales à l'axe (Oz) et de résistance R_0 , on introduit un tube cylindrique creux conducteur de conductivité γ , de rayon a et de même longueur l ; son épaisseur b est faible devant a .

1. Quelle est l'inductance L_0 du solénoïde en l'absence du tube?
2. Le solénoïde est parcouru par un courant sinusoïdal $i(t) = i_m \cos \omega t$ et il apparaît dans le tube un courant induit de densité volumique \vec{j} de valeur uniforme : en effet, on oublie l'autoinduction dans le tube dont la paroi est suffisamment mince, ce qui veut dire que l'effet de peau y est négligé (l'effet de peau se traduirait par la circulation des courants dans le tube essentiellement sur une épaisseur de peau $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$).
 - (a) Déterminer le champ \vec{B}_0 créé par le courant i , puis le champ \vec{B}_1 créé par le courant induit dans le tube.
 - (b) Déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jL(\omega)\omega$ entre les bornes du solénoïde, en fonction de L_0 , γ , ω , a et b .
 - (c) Un solénoïde, de section circulaire de rayon $a = 1$ cm est bobiné sur un anneau creux de cuivre de conductivité $\gamma = 6,0 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ et d'épaisseur $b = 1$ mm. En basse fréquence, la résistance du solénoïde est $R_0 = 10 \Omega$ et son inductance est $L_0 = 0,1$ H. Préciser les fréquences pour lesquelles le modèle précédent est acceptable et calculer l'ordre de grandeur de $R(\omega)$ à 1 kHz.

C. Cas général

13. Pendule avec effet inductif

Une tige, de masse m et de longueur l , peut osciller sans frottement autour de l'axe Oy . Son moment d'inertie par rapport à cet axe est $J = ml^2/3$. On a placé un moment magnétique \vec{M} en l'extrémité A (\vec{M} est perpendiculaire à la tige et est contenu dans le plan d'oscillation xOz). La liaison en O est particulière : on ne donne pas les détails de sa réalisation technique mais elle présente un rôle physique électromagnétique modélisable virtuellement par une petite spire immobile en O , de rayon a et d'axe Ox . Cette spire possède une résistance R et on néglige son auto-inductance. Voir le schéma de la figure 12. On considérera comme connue l'expression du champ magnétique créé à grande distance par un moment magnétique.

1. Étudier le mouvement de la tige dans l'hypothèse où la longueur l est très grande devant a .

14. Champ magnétique tournant

Un système de bobines de Helmholtz d'axe horizontal Ox , parcourues par un courant sinusoïdal de pulsation ω , assure autour du point O un champ magnétique quasiment uniforme : $\vec{B}_1 = B_0 \cos \omega t \vec{e}_x$ tandis qu'un autre système de bobines, disposée à 90° du précédent et parcouru par un courant de mêmes intensité et pulsation mais déphasé de $\pi/2$, assure le champ magnétique également quasiment uniforme : $\vec{B}_2 = B_0 \sin \omega t \vec{e}_y$.

1. Faire un schéma du dispositif des bobines d'Helmholtz, en précisant les rôles respectifs.
2. Caractériser le champ magnétique total au voisinage du point O .

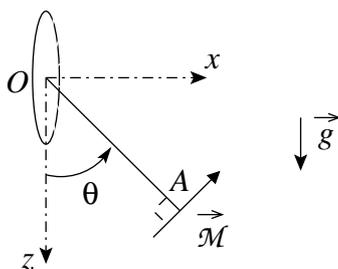


FIGURE 12 – Pendule doté d’un petit aimant

3. Au voisinage de O , on dispose une petite bobine plate circulaire, comportant N spires d’aire s , qui tourne autour d’un de ses diamètres vertical disposé selon Oz avec la vitesse angulaire Ω . Déterminer la fem induite dans la spire.

D. Coefficients d’inductance

15. Couplage mutuel et adaptation d’impédance

Un générateur de tension d’impédance $Z_g = R_g + jX_g$ alimente un circuit d’utilisation modélisé par une impédance complexe $Z_u = R_u + jX_u$.

1. Quelles doivent être les relations, entre R_g et R_u d’une part et X_g et X_u d’autre part, pour que la puissance absorbée par soit maximale ?

a) $R_g = R_u$ b) $X_g = X_u$ c) $X_g = -X_u$ d) $R_g = X_u$

On considère maintenant le circuit suivant constitué d’une générateur de tension sinusoïdale de fem $e(t) = E_0 \cos \omega t$ de 50 V efficaces et de résistance interne $R_g = 5 \Omega$. Il alimente un circuit série composé d’une résistance R_u , d’un condensateur de capacité C et de deux bobines parfaites de coefficient d’auto-inductance L . Ces deux bobines sont connectés de telle sorte qu’il y ait influence électromagnétique entre elles. Le coefficient d’induction mutuel algébrique est M . On appelle k le coefficient de couplage défini ainsi : $k = |M|/L$. La pulsation de la tension est telle que les impédances du condensateur et de chacune des bobines non couplée sont respectivement de 5Ω et 12Ω . Voir la figure 13.

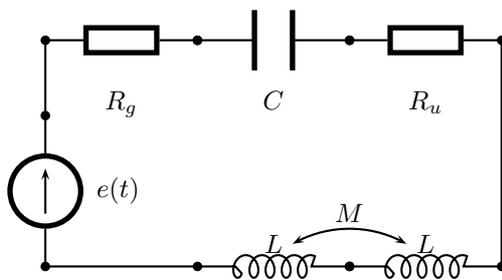


FIGURE 13 – Adaptation d’impédance

On désire que la puissance consommée dans R_u soit maximale.

2. Quelle doit être la valeur de R_u ?
 a) $R_u = 7 \Omega$ b) $R_u = 5 \Omega$ c) $R_u = 3 \Omega$ d) $R_u = 12 \Omega$
3. Calculer cette puissance maximale.
 a) $P_{umax} = 125 \text{ W}$ b) $P_{umax} = 25 \text{ W}$ c) $P_{umax} = 50 \text{ W}$ d) $P_{umax} = 75 \text{ W}$
4. Quelle doit être la valeur du coefficient de couplage k ?
 a) $k = 0,512$ b) $k = 0,317$ c) $k = 0,415$ d) $k = 0,792$
5. La résistance du résistor vaut maintenant $R_u = 10 \Omega$. On fait varier k et éventuellement le sens du couplage des bobines. Déterminer la gamme de puissance qui peut alors être fournie au résistor.
 a) $53 \text{ W} \leq P_u \leq 78 \text{ W}$ b) $47 \text{ W} \leq P_u \leq 92 \text{ W}$ c) $28 \text{ W} \leq P_u \leq 102 \text{ W}$ d) $12 \text{ W} \leq P_u \leq 100 \text{ W}$