

Exercices : 24 - Induction

— Solutions —

A. Conducteur mobile dans un champ magnétique indépendant du temps

1. Induction et conversion d'énergie

Réponses : $L \frac{di}{dt} + Ri = -vBa$, $m \frac{dv}{dt} = mg + iBa$, $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Li^2) = mgv - Ri^2$, $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{a^2 B^2}{m} i = -Bag$, solutions générales tendent vite vers 0, $i_0 = -\frac{mg}{aB}$ et $v_0 = \frac{mgR}{a^2 B^2}$ force de LAPLACE compense le poids, $\omega_0 = \frac{aB}{\sqrt{mL}}$, $i(t) = i_0(1 - \cos \omega_0 t)$, $v = \frac{g}{\omega_0} \sin \omega_0 t$, $z = \frac{g}{\omega_0^2}(1 - \cos \omega_0 t)$, oscillation d'énergie mécanique en énergie électrique stockée dans la bobine.

2. Oscillateur amorti par induction

Réponses : lorsqu'on lâche la barre, le ressort exerce une force de rappel. La barre se déplace et réduit la surface du circuit électrique. Il y a une variation de flux et donc une fem induite. Le courant induit qui en résulte va être à l'origine d'une force de LAPLACE qui va freiner le déplacement de la barre par la loi de LENZ puisque les effets du courant induit s'oppose à la cause qui lui a donné naissance. La surface est $S = a(L + x)$, d'où $e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a \dot{x}$. Le courant induit est $i = -\frac{B_0 a \dot{x}}{R}$. On applique la relation de la Dynamique dans le référentiel du laboratoire considéré comme galiléen. En projection sur Ox , on obtient $m\ddot{x} = -kx + F_L$ où la force de LAPLACE est $F_L = iaB_0$. On obtient l'équation différentielle $\ddot{x} + \frac{B_0^2 a^2}{mR} \dot{x} + \frac{k}{m} x = 0$. On a donc $\tau = \frac{mR}{B_0^2 a^2}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Le discriminant de l'équation caractéristique est $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4\omega_0^2 < 0$ pour un régime pseudo-périodique. On doit donc avoir $\omega_0 \tau > \frac{1}{2}$. Les racines sont donc $r = -\frac{1}{2\tau} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2}}$. La solution, en tenant compte des conditions initiales, est $x(t) = x_0(\cos \Omega t + \frac{1}{2\Omega\tau} \sin \Omega t) \exp -\frac{t}{2\tau}$ avec $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4\omega_0^2 \tau^2}}$. On multiplie par \dot{x} l'équation mécanique et par i l'équation électrique, on arrive facilement à $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2) = -Ri^2$. À la date $t = 0$, il n'y a pas d'énergie cinétique, uniquement de l'énergie potentielle $\frac{1}{2}kx_0^2$, à la fin du mouvement, il n'y a ni énergie cinétique, ni énergie potentielle. Toute l'énergie de départ a été convertie en énergie thermique : $W_{\text{JOULE}} = \int_0^\infty Ri^2(t)dt = \frac{1}{2}kx_0^2$.

3. Pendule freiné

Réponses : $\sin \theta_{eq} = -\frac{Ea^2 B}{2mgbR}$, $E - Ri + \frac{B\theta a^2}{2} = 0$, $J\ddot{\theta} + \frac{B^2 a^4}{4R} \dot{\theta} + mgb \sin \theta = -\frac{Ea^2 B}{2R}$, $J\ddot{\epsilon} + mgb \cos \theta_{eq} \epsilon = 0$, $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgb \cos \theta_{eq}}{J}}$, $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

4. Oscillations d'un cadre

Réponses : le flux dans le cadre varie, il y induction et un courant induit qui tend à s'opposer au mouvement dû au poids qui lui a donné naissance selon la loi de LENZ. Il y a freinage du mouvement. $\Phi = B_0 ab \sin \theta$. $e = -B_0 ab \dot{\theta} \cos \theta = Ri$ donne un courant induit $i = -\frac{B_0 ab}{R} \dot{\theta} \cos \theta$. On applique le théorème du moment cinétique en projection sur l'axe Ox au cadre qui n'est soumis qu'au moment de son poids $-mg \frac{a}{2} \sin \theta$ et à celui de la force de LAPLACE agissant sur le coté horizontal du cadre (en bas) de moment $iB_0 ba \cos \theta$ d'où $J\ddot{\theta} = -mg \frac{a}{2} \sin \theta + iB_0 ba \cos \theta$. L'équation différentielle à laquelle obéit θ est $J\ddot{\theta} + \frac{B_0^2 a^4 b^2}{R} \dot{\theta} \cos^2 \theta + mg \frac{a}{2} \sin \theta = 0$. Pour rester à l'ordre 1, on écrit $\sin \theta \simeq \theta$ et $\dot{\theta} \cos^2 \theta \simeq \dot{\theta}$ d'où $J\ddot{\theta} + \frac{B_0^2 a^4 b^2}{R} \dot{\theta} + mg \frac{a}{2} \theta = 0$. Il y a des oscillations si le discriminant de l'équation caractéristique associée est négatif, d'où la condition $B_0^4 a^4 b^4 - R^2 2Jmga < 0$ d'où $B_0 < \frac{1}{ab}(2R^2 Jmga)^{1/4}$. Lorsque le cadre est lâché depuis la position θ_0 , il possède de l'énergie potentielle de pesanteur. Cette énergie va être transformée en énergie interne par l'intermédiaire de la résistance R et de l'effet JOULE associé pendant le régime pseudo-périodique qui se produit.

5. Lois de Laplace...

Réponses : Si le piston est écarté de la position médiane, il va y avoir un déséquilibre des pressions autour du piston. Il va donc se mettre en mouvement. Il se produit alors un phénomène d'induction puisque la tige solidaire du piston va se déplacer dans un champ magnétique uniforme. Le circuit contenant la résistance R va être le siège d'un courant induit qui va, par loi de LENZ, créer une force de LAPLACE sur la tige tendant à freiner le déplacement de la tige et donc du piston. On peut prévoir que le piston effectuera des oscillations amorties où bien reviendra près ou à sa position d'équilibre. Si l'on note L la longueur du circuit induit lorsque le piston est en position médiane, on a une longueur $L - x$ lorsque son abscisse est x . Le flux du champ magnétique est $\phi = (L - x)aB$. On en déduit $e = a\dot{x}$ et $i = \frac{aB}{R}\dot{x}$. La force de LAPLACE subie par la tige et $\vec{F} = -\frac{a^2 B^2}{R} \dot{x} \vec{e}_x$. On note P_1 la pression dans le compartiment situé à gauche du piston et P_2 celle dans l'autre compartiment. La relation de la Dynamique appliquée à la masse m dans le référentiel du laboratoire supposé

galiléen est $m\ddot{x} = P_1S - P_2S - \frac{a^2B^2}{R}\dot{x}$. Comme tous les parois sont parfaitement calorifugées et que l'on étudie uniquement des petits mouvements, on va supposer que chaque gaz effectue une transformation adiabatique et réversible. On peut donc écrire la loi de LAPLACE pour chaque compartiment $P_1V_1^\gamma = P_0V_0^\gamma$ et $P_2V_2^\gamma = P_0V_0^\gamma$. On a donc $P_1 = P_0 \left(\frac{V_0}{V_0+Sx}\right)^\gamma$. En réalisant un développement limité, on peut écrire que $P_1 \simeq P_0(1 - \frac{\gamma Sx}{V_0})$ et de la même façon $P_2 \simeq P_0(1 + \frac{\gamma Sx}{V_0})$. En utilisant ces deux expressions dans la relation de la Dynamique, il vient $m\ddot{x} = -\frac{2\gamma S^2P_0}{V_0}x - \frac{a^2B^2}{R}\dot{x}$. L'équation différentielle est donc $\ddot{x} + \frac{a^2B^2}{mR}\dot{x} + \frac{2\gamma S^2P_0}{V_0}x = 0$. C'est l'équation d'un oscillateur amorti que l'on peut encore écrire $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2x = 0$. Plus la valeur de B est élevée, plus le freinage est important, le discriminant de l'équation caractéristique ayant alors plus de chance d'être positif. Par ordre de freinage décroissant : le mouvement sera apériodique sur-critique, puis apériodique critique et, pour un discriminant négatif, pseudo-périodique. Pour un champ magnétique faible, on se placera dans le cas où le régime est pseudo-périodique. La solution est alors $x(t) = x_0 \exp\left(-\frac{\omega_0 t}{2Q}\right) \left(\cos\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}t\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin\left(\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}t\right)\right)$.

6. Poursuite de tiges !

Réponses :

1. On calcule le flux en faisant attention à l'orientation du sens de parcours par i_1 . On note x_1 l'abscisse de la tige T_1 , sachant $x = 0$ pour T_0 . On a, par uniformité du champ magnétique, $\phi = -bax_1$. Ainsi, il vient $e_1 = -\frac{d\phi}{dt} = Bav_1$.
2. On considère que la résistance des rails est négligeable, seules les tiges possèdent toutes la résistance R . Le montage électrique est donné à la figure 1.

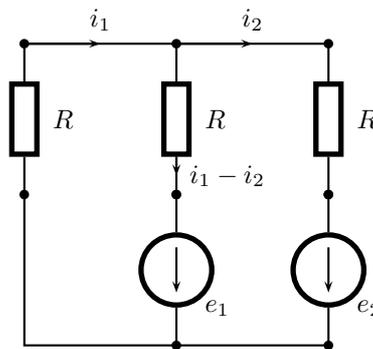


FIGURE 1 - Cas $n = 2$. Circuit électrique équivalent

La loi des mailles dans la petite maille sur la gauche donne $Ri_1 = Bav_1 - R(i_1 - i_2)$. De la même façon, dans la grande maille, on obtient $Ri_1 = Bav_2 - Ri_2$. En substituant l'expression de i_1 dans l'autre relation et en calculant, on arrive au système d'équations :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{Ba}{3R}(v_1 + v_2) \\ i_2 = \frac{Ba}{3R}(-v_1 + 2v_2) \end{cases}$$

La force de LAPLACE agissant sur la tige T_1 permet d'écrire $m\frac{dv_1}{dt} = -Ba(i_1 - i_2)$ alors pour la tige T_2 , c'est $m\frac{dv_2}{dt} = -Bai_2$. On pose $\tau = \frac{mR}{B^2a^2}$, on obtient le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{3\tau}(2v_1 - v_2) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{3\tau}(-v_1 + 2v_2) \end{cases}$$

Si l'on note $S = v_1 + v_2$ la somme des vitesses, on obtient, par combinaison linéaire, l'équation différentielle $\frac{dS}{dt} + \frac{1}{3\tau}S = 0$. La solution est simple en tenant compte des conditions initiales $v_1 = 0$ et $v_2 = v_0$, on arrive à $v_1 + v_2 = v_0 \exp\left(-\frac{t}{3\tau}\right)$. Si l'on s'intéresse maintenant la différence des vitesses $D = v_1 - v_2$, on arrive à $\frac{dD}{dt} + \frac{1}{\tau}D = 0$ et donc une solution de la force $D = -v_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Cette expression permet d'arriver à l'expression des vitesses :

$$\begin{cases} v_1(t) = \frac{v_0}{2} \left(\exp\left(-\frac{t}{3\tau}\right) - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \\ v_2(t) = \frac{v_0}{2} \left(\exp\left(-\frac{t}{3\tau}\right) + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \end{cases}$$

3. En régime permanent, les tiges T_n sont immobiles. On pouvait trouver ce résultat sans analyse détaillée, en pensant au bilan énergétique. Au départ, le système possède une énergie cinétique $\frac{1}{2}mv_0^2$. Le mouvement des barres provoque de l'induction et donc des courants i_1 et i_2 qui vont circuler dans le circuit. En passant dans les résistances R , l'énergie va être transformée en énergie interne, la température des résistances va augmenter, c'est l'effet JOULE. Les tiges s'immobilisent au bout de quelques τ en réalité, toute l'énergie cinétique a été dissipée.
4. L'étude est du même type que pour le cas précédent en rajoutant une branche en parallèle des trois autres dans le circuit électrique équivalent. On écrit à nouveau les lois des mailles et aussi, bien évidemment, les lois des nœuds. En étant attentif aux calculs, on arrive à :

$$\begin{cases} i_1 = \frac{Ba}{4R}(v_1 + v_2 + v_3) \\ i_2 = \frac{Ba}{4R}(-2v_1 + 2v_2 + 2v_3) \\ i_3 = \frac{Ba}{4R}(-v_1 - v_2 + 3v_3) \end{cases}$$

Comme avant, on écrit la relation de la Dynamique en calculant la force de LAPLACE et on arrive à :

$$\begin{cases} \frac{dv_1}{dt} = -\frac{1}{4\tau}(3v_1 - v_2 - v_3) \\ \frac{dv_2}{dt} = -\frac{1}{4\tau}(-v_1 + 3v_2 - v_3) \\ \frac{dv_3}{dt} = -\frac{1}{4\tau}(-v_1 - v_2 + 3v_3) \end{cases}$$

Si, comme avant, on somme les vitesses, on a $S = v_1 + v_2 + v_3$ et l'équation différentielle $\frac{dS}{dt} + \frac{1}{4\tau}S = 0$ d'où $v_1 + v_2 + v_3 = v_0 \exp -\frac{t}{4\tau}$. Si l'on fait la différence entre la première équation différentielle et la deuxième, on arrive à $\frac{d(v_1 - v_2)}{dt} + \frac{1}{\tau}(v_1 - v_2) = 0$ d'où une solution en $v_1 - v_2 = A \exp -\frac{t}{\tau}$. Mais les conditions initiales sont $v_1 = v_2 = 0$, on en déduit que $A = 0$ et donc $v_1(t) = v_2(t) \forall t$. Maintenant, si l'on fait la différence entre la deuxième équation différentielle et la troisième, on arrive à $\frac{d(v_2 - v_3)}{dt} + \frac{1}{\tau}(v_2 - v_3) = 0$ qui a pour solution $v_2 - v_3 = A' \exp -\frac{t}{\tau}$. La condition initiale sur v_3 est $v_3 = v_0$, cela permet de trouver que $A' = -v_0$. À partir de cela, on peut trouver les équations horaires des vitesses :

$$\begin{cases} v_1(t) = v_2(t) = \frac{v_0}{3} (\exp -\frac{t}{4\tau} - \exp -\frac{t}{\tau}) \\ v_3(t) = \frac{v_0}{3} (\exp -\frac{t}{4\tau} + 2 \exp -\frac{t}{\tau}) \end{cases}$$

5. En utilisant le programme *Python 2017-006-BarreInduction*, on peut étudier l'énergie cinétique : $E_c = \frac{1}{2}m(2v_1^2 + v_3^2)$. On ne peut que la voir diminuer de façon monotone, il ne peut pas y avoir d'augmentation même temporaire car le système est toujours d'ordre 1. Ce n'est clairement pas un système d'ordre 2, cela le deviendrait si on ne négligeait pas l'autoinduction. Dans ce cas, ce serait une autre affaire sur le plan des calculs. . .
6. Dans le cas n quelconque, on peut intuitivement les réponses suivantes pour les vitesses à la lumière de ce qui a été vu pour $n = 2$, puis pour $n = 2$:

$$\begin{cases} v_{0 < p < n}(t) = \frac{v_0}{n} \left(\exp -\frac{t}{(n+1)\tau} - \exp -\frac{t}{\tau} \right) \\ v_n(t) = \frac{v_0}{n} \left(\exp -\frac{t}{(n+1)\tau} + (n-1) \exp -\frac{t}{\tau} \right) \end{cases}$$

Il est inutile d'en dire plus sur le fait que le régime permanent correspond à l'immobilité des tiges puisque cela a été déjà décrit avant. le nombre de tiges ne change rien au raisonnement.

7. Principe du frein électromagnétique

Réponses : $\vec{j} = \gamma R \omega B_0 \vec{e}_r$, $\frac{d\vec{f}}{ds} = -\gamma R \omega B_0^2 e \vec{e}_\theta$, $P_{tot} = -\gamma R^2 \omega^2 B_0^2 e S_u$, $P_{tot} = -\vec{j} \cdot \vec{E} \tau = -\gamma \vec{E}^2 e S_u$, $P_{tot} = \frac{d\Gamma_{freinage}}{d\tau} \omega \tau$, le couple diminue si ω diminue, freine mais n'arrête pas.

8. Principe d'un sismographe à détection électromagnétique

Réponses : Relation de la dynamique en référentiel non galiléen : $m\ddot{z} = k(l_{eq} - z - l_0) - mg - 2m\xi\omega_0\dot{z} - ma_{ent}$, $k(l_{eq} - l_0) = mg$, ξ coefficient d'amortissement, $f_{laplace} = 0$ car $i = 0$ circuit ouvert ; $\vec{E}_m = \dot{z}\vec{e}_z \wedge B_0\vec{e}_r = \dot{z}B_0\vec{e}_\theta$, $e = N2\pi a B_0 \dot{z}$, $u(t) = \pm e(t)$ en fonction du branchement ; $\vec{K} = \frac{N2\pi a B_0}{\omega_0} \frac{\pm 1}{2\xi + j(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})}$, $|\vec{K}| = \frac{N2\pi a B_0}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega})^2 + 4\xi^2}}$, filtre passe-bande d'ordre 2 avec résonance en $\omega = \omega_0$.

9. Rail de Laplace

Réponses : la barre se déplace vers la droite, cela augmente la surface du circuit donc le flux varie, il y a induction et le sens du courant tend à s'opposer à la cause qui lui donne naissance (loi de LENZ), la force de LAPLACE sur la barre s'oppose au mouvement, freine la barre $[MN]$, le courant induit parcourt la barre de N vers M , M est la borne positive, on oriente le circuit dans le sens trigonométrique $\phi = Bh\dot{x}$ et $e = -Bh\dot{x}$, $i = -\frac{Bh}{R}\dot{x}$, l'équation du mouvement de la barre est $\ddot{x} + \frac{B^2h^2}{mR}\dot{x} = 0$, avec une bobine on a $e = L\frac{di}{dt} = -BH\dot{x}$, on intègre $Li = -BHx + Cte$, à $t = 0$ $\dot{x} = 0$ et $i = 0$ d'où $Cte = 0$, on a donc $i = -\frac{Bh}{L}x$, l'équation du mouvement est $\ddot{x} + \frac{B^2h^2}{mL}x = 0$, pour le condensateur $e = u_c = -Bh\dot{x}$ et $i = C\frac{du_c}{dt} = -BH C\ddot{x}$, donc $m\ddot{x} = ihB = -B^2h^2 C\ddot{x}$ d'où $\ddot{x} = 0$, $\dot{x} = v_0$ constante, le condensateur a été chargé par la fem au moment où on donne la vitesse v_0 à la barre, il n'y a plus de courant induit ensuite, on a maintenant $\phi = Bh \cos \alpha x'$ et donc $i = -\frac{Bh \cos \alpha}{R} \dot{x}'$, le courant induit circule toujours dans le sens N vers M , M reste la borne positive, l'équation du mouvement fait intervenir le poids en plus, projetée sur Ox' , on obtient $\ddot{x}' + \frac{B^2h^2 \cos^2 \alpha}{mR} \dot{x}' = g \sin \alpha$, il suffit de changer α en $-\alpha$ et le sens de la force de LAPLACE, cela change aussi le sens des polarités et du courant induit.

10. Freinage d'un cadre conducteur

Réponses : On a $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, le cadre étant en mouvement le flux du champ magnétique va varier, il y aura un courant induit qui va s'opposer à la cause qui lui a donné naissance et donc ralentir le cadre par le biais de la force de LAPLACE, on a $\phi = \frac{\mu_0 I h}{2\pi} \ln(1 + \frac{a}{r})$ et $e = \frac{\mu_0 I h a}{2\pi} \frac{1}{r(r+a)} \frac{dr}{dt}$, la force de LAPLACE est $F = -\frac{\mu_0^2 I^2 h^2 a^2}{4\pi^2 R} \frac{1}{r^2 (r+a)^2} \frac{dr}{dt}$, par la relation de la dynamique $F = m \frac{d^2 r}{dt^2}$ avec l'hypothèse $r \gg a$, on arrive à $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{\alpha}{r^4} \frac{dr}{dt}$ avec $\alpha = \frac{\mu_0^2 I^2 h^2 a^2}{m 4\pi^2 R}$, on en déduit que $v = v_0 + \frac{\alpha}{3} (\frac{1}{r^3} - \frac{1}{L^3})$, le cadre pourra atteindre l'infini si $v_0 > \frac{\alpha}{3L^3}$.

B. Conducteur fixe dans un champ magnétique dépendant du temps

11. Pince ampèremétrique

Réponses : $\vec{B} = \frac{\mu_0(Ni+I)}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, $\Phi = \frac{\mu_0 N a}{2\pi} (Ni + I) \ln 2 = Li + MI$, $\frac{i_m}{I_0} = \frac{M\omega}{\sqrt{(R+r)^2 + L^2\omega^2}}$, mesure d'intensité sans coupure du circuit pour placer l'ampèremètre.

12. Résistance équivalente aux pertes par courants de Foucault

Réponses : on procède comme en cours avec le flux $\phi = L_0 I$ (ou bien avec l'énergie magnétique) et on trouve $L_0 = \mu_0 \frac{N^2}{l} S$. L'étude usuelle des symétries donne $\vec{j} = j \vec{e}_\theta$ et $\vec{B} = B \vec{e}_z$ pour \vec{B}_0 et \vec{B}_1 . Le théorème d'AMPÈRE fournit comme d'habitude pour l'intérieur du solénoïde $B_0 = \mu_0 \frac{N}{l} i = \frac{L_0}{NS} i$ avec accord avec $\phi = L_0 i$ bien sûr. Le tube de métal se comporte comme un solénoïde parcouru par un courant $j b$ par unité de longueur de tube, donc, à l'intérieur du tube, on a $B_1 = \mu_0 j b$. Notez que le champ induit est nul à l'extérieur du tube tout comme le champ est nul en dehors du solénoïde (en négligeant les effets de bord). On calcule la circulation de $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ sur le cercle orienté par \vec{e}_θ de rayon a (paroi du tube) et on utilise l'équation de MAXWELL-FARADAY, donc $\oint_{\text{cercle}} \vec{j} \cdot d\vec{l} = 2\pi a j = -\gamma \frac{d(B_0+B_1)}{dt} \pi a^2$ et comme $j = \frac{B_1}{\mu_0 b}$, on en déduit en notation complexe en $\underline{X} = \underline{X}_0 \exp j\omega t$, $\underline{B}_1 = \frac{B_0}{-1 + \frac{2j}{\mu_0 \gamma \omega a b}}$. L'équation électrique pour le solénoïde s'écrit alors $\underline{u} = R_0 \underline{i} - \frac{d\phi}{dt}$ soit $\underline{u} = R_0 \underline{i} + j\omega N(S \underline{B}_0 + \pi a^2 \underline{B}_1) = \underline{Z} \underline{i}$ avec $\underline{Z}(\omega) = R(\omega) + jL(\omega)\omega$ où $R(\omega) = R_0 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{2L_0}{1 + (\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega a b})^2}$ et $L(\omega) = L_0 \left[1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{1 + (\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega a b})^2} \right]$. L'ordre de grandeur donné par l'approche précédente est correct, selon les informations de l'énoncé sur l'effet de peau, tant que $b \ll \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. On en déduit simplement le domaine des fréquences acceptables. À 1 kHz, l'épaisseur de peau δ est de 2 mm donc l'approximation est grossièrement acceptable. Avec $S = \pi a^2$, on peut évaluer avec ce qui précède $R \simeq 0,2 \text{ k}\Omega$. On est obligé de tenir compte en TP de la dépendance en fréquence de la résistance du système.

C. Cas général

13. Pendule avec effet inductif

Réponses : le mouvement de la tige pourra s'obtenir en appliquant le TMC par rapport à l'axe Oy fixe dans le référentiel d'étude : $\frac{dL_{Oy}}{dt} = \mathcal{M}_{Oy,ext}$ avec $\mathcal{M}_{Oy,ext} = \underbrace{\mathcal{M}_{Oy,poids}}_{-\frac{mg}{2} \sin \theta} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oy,pivot}}_{0 \text{ (parfait)}} + \underbrace{\mathcal{M}_{Oy,L}}_{\text{LAPLACE}}$. Il reste à déterminer

le moment des actions de LAPLACE, non nul car du fait du mouvement du pendule, le flux magnétique $\phi(t)$ à travers la spire varie, ce qui cause un courant induit $i(t)$ dans celle-ci, donc la spire génère un champ magnétique qui provoque un moment sur le dipôle ; ce moment doit être résistant en raison de la loi de LENZ (les effets de l'induction modèrent sa cause, ici le mouvement). Voir le schéma de la figure 2 pour l'orientation du dipôle magnétique.

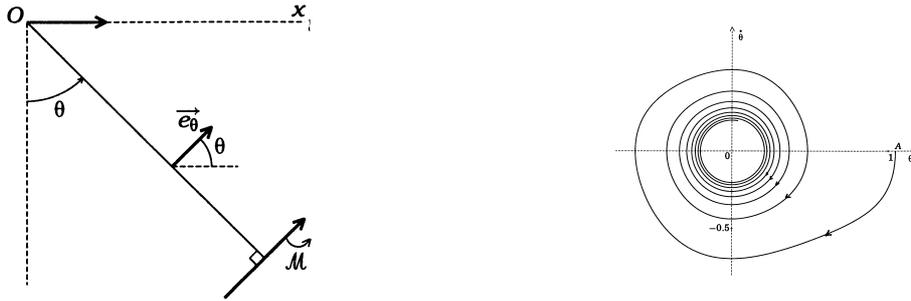


FIGURE 2 – Orientation du moment magnétique à gauche - Portrait de phase à droite

On calcule $\phi(t)$ compte tenu du champ du dipôle en O et de $l \gg a$: $\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi l^3} (-\vec{e}_\theta)$ donc $\phi(t) \simeq \vec{B}(O) \cdot (\pi a^2 \vec{e}_x) = -\pi a^2 \frac{\mu_0 \mathcal{M}}{4\pi l^3} \cos \theta$. On en déduit le courant induit en négligeant l'auto-induction (une seule spire simple) via l'équation électrique : $i(t) = \frac{e(t)}{R} = -\frac{1}{R} \frac{d\phi}{dt}$ soit $i(t) = -\frac{a^2 \mu_0 \mathcal{M}}{4l^3 R} \sin \theta \dot{\theta}$. Le moment $\mathcal{M}_{Oy,L}$ des actions magnétiques de la spire sur le dipôle est l'opposé de celui du dipôle sur la spire (PAR) donc, en assimilant la spire à un moment magnétique $\vec{M}' = i \pi a^2 \vec{e}_x$ avec $l \gg a$, il vient $\mathcal{M}_{Oy,L} = -\mathcal{M}_{Oy,dip \rightarrow spire} = -[\vec{M}' \wedge \vec{B}(O)] \cdot \vec{e}_y$ soit $\mathcal{M}_{Oy,L} = \frac{\mu_0 \mathcal{M} i a^2}{4l^3} \sin \theta$. En remplaçant l'expression précédente de l'intensité, on obtient bien un moment résistant $\mathcal{M}_{Oy,L} = -\left(\frac{\mu_0 \mathcal{M} a^2}{4l^3}\right)^2 \frac{1}{R} \sin \theta \dot{\theta}$. Finalement, on trouve l'équation du mouvement en remplaçant le moment des actions de LAPLACE sur le dipôle dans le TMC précédemment exprimé : $\frac{d^2\theta}{dt^2} + \lambda \omega_0 \sin^2 \theta \frac{d\theta}{dt} + \omega_0^2 \sin \theta = 0$ avec $\omega_0^2 = \frac{3g}{2l}$ et $\lambda \omega_0 = \left(\frac{\mu_0 \mathcal{M} a^2}{4l^3}\right)^2 \frac{3}{m l^2 R}$. Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire de solution analytique non connue. Néanmoins, on peut prévoir physiquement l'évolution du système : le mouvement pendulaire va voir son amplitude diminuer à chaque demi-oscillation (à cause du terme en $\dot{\theta}$ dû à l'induction qui freine) mais l'effet de ce terme va en s'atténuant lorsqu'on s'approche de la position d'équilibre $\theta = 0$ du fait de la présence du facteur en $\sin^2 \theta$. Il faut attendre un temps infini avant de voir le freinage inductif stopper le pendule à sa position d'équilibre stable $\theta = 0$! L'allure du portrait de phase est donnée à la figure 2, pour le cas du mouvement pendulaire dans lequel on arrive forcément.

14. Champ magnétique tournant

Réponses : $\vec{B} = B_0 \vec{e}_r$, $(\vec{e}_r; \vec{e}_x) = \omega t$, \vec{B} vecteur tournant, $e = NsB_0(\Omega - \omega) \sin(\Omega - \omega)t$.

D. Coefficients d'inductance

15. Couplage mutuel et adaptation d'impédance

Réponses : a) et c), b), a), $1 \pm k = \frac{5}{24}$ d), $P_u = \frac{R_u E_{0eff}^2}{(R_g + R_u)^2 + (2L(1 \pm k)\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ d).