

## Exercices : 25 - Équations de Maxwell

### A. Distributions de charges et de courants

#### 1. Distributions électrostatiques

1. On appelle  $r$  la distance à un point fixe. Calculer les densités de charge statique volumique et surfacique nécessaires pour créer le potentiel :

$$V(r < a) = k r^2 \quad \text{et} \quad V(r > a) = k \frac{a^3}{r}$$

2. Soit  $x$  la distance algébrique à un plan fixe et une distribution volumique de charges (avec  $a > 0$ ) :

$$\rho(x < 0) = \rho_0 \exp \frac{x}{a} \quad \text{et} \quad \rho(x > 0) = 0$$

En plus de la distribution volumique de charges, il existe une distribution surfacique  $\sigma = -\rho_0 a$ . Calculer le champ électrique en tout point de l'espace.

#### 2. Émission de charges par un plan

Un plan infini, d'équation  $x = 0$  en coordonnées cartésiennes, possède initialement une densité surfacique de charges  $\sigma_0$ . À partir de l'instant  $t = 0$  et jusqu'à ce que le plan soit totalement déchargé, les charges quittent le plan du côté des  $x$  positifs, avec une vitesse constante  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  et un débit de charge  $a$  (en  $\text{C} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$ ). On ne tient pas compte des interactions entre charges.

1. Déterminer le champ électrique  $\vec{E}$  au point  $M$  tel que  $O\vec{M} = X \vec{e}_x$  avec  $0 < X < \frac{\sigma_0 v_0}{a}$ .
2. Même question pour le champ magnétique.
3. Vérifier la compatibilité des résultats obtenus avec l'équation de MAXWELL-AMPÈRE.

#### 3. Électrolyte entre les plaques d'un condensateur

Les armatures d'un condensateur plan sont respectivement assimilées à des plans infinis, d'équations  $x = a$  et  $x = -a$  et de potentiels  $U$  et  $-U$ . On note  $V(x)$  le potentiel en un point d'abscisse  $x$ . On introduit entre les armatures un électrolyte constitué de cations de charge individuelle  $+q$  et d'anions de charge individuelle  $-q$ . En l'absence de champ (donc pour  $U = 0$ ), les anions et les cations ont la même densité particulière. L'ensemble est considéré à l'équilibre thermique à tout instant. De ce fait, la loi de BOLTZMANN (étudiée plus tard en Physique statistique) donne accès à la densité numérique  $n$  de particules d'énergie  $E$  selon :

$$n = n_0 \exp\left(-\frac{E}{k_B T}\right)$$

où  $k_B = R/\mathcal{N}_A$  est la constante de BOLTZMANN (rapport de la constante des gaz parfaits avec la constante d'AVOGADRO).

1. Exprimer la densité volumique de charge en fonction des données et de  $V(x)$ .
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par la fonction  $V(x)$ .
3. Connaissez-vous une méthode d'intégration de cette équation différentielle (on ne demande pas la mise en œuvre) ? Citer un autre domaine de la physique où une telle méthode est utilisée.
4. On suppose que  $|qV| \ll k_B T$  en tout point. Déterminer la fonction  $V(x)$ . On fera apparaître une longueur caractéristique  $\delta$  que l'on exprimera en fonction de  $k_B$ ,  $T$ ,  $\epsilon_0$ ,  $n_0$  et  $q$ .
5. On donne sur la figure 1, l'allure de la courbe  $V(x)$  pour différentes valeurs du paramètre  $\alpha = \delta/a$ . Chaque numéro de courbe correspond à chacune des valeurs de  $\alpha$  suivantes indiquées en accord :  $\alpha_1 = 5$ ,  $\alpha_2 = 0,6$ ,  $\alpha_3 = 0,3$ ,  $\alpha_4 = 0,1$ ,  $\alpha_5 = 0,01$ . Commenter soigneusement ces courbes.

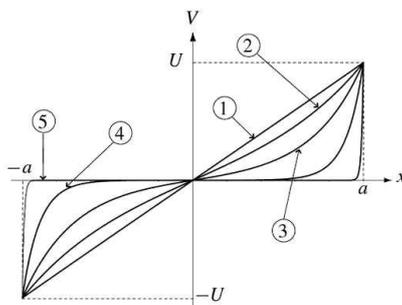


FIGURE 1 – Allures de l'évolution du potentiel

## B. Approximation des régimes quasi-permanents

### 4. Conditions de l'ARQP

Dans un conducteur non parfait de conductivité  $\gamma = 5,7 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$  (pour le cuivre), existe un champ électrique sinusoïdal dans le temps de pulsation  $\omega$ .

- Supposons qu'en un point intérieur au conducteur, existe à la date  $t = 0$  un supplément local de charge correspondant à la densité volumique  $\rho_0$ . En utilisant la loi d'Ohm et une équation de MAXWELL, montrer que la densité initiale disparaît en un temps très bref qu'on estimera en fonction d'une constante de temps  $\tau$  bien choisie.
- La pulsation du champ électrique est  $\omega < 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ . Montrer dans ces conditions que le terme dit « courant de déplacement » de l'équation de MAXWELL-AMPÈRE peut être négligé devant la densité volumique de courant.
- Écrire à l'aide des deux approximations précédentes, les équations de MAXWELL où ne figurent que les champs  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  et les constantes  $c$ , et  $\tau$ .
- Donner l'équation vérifiée par le champ électrique  $\vec{E}$  et commenter.

### 5. Effet de peau

Un matériau conducteur ohmique de conductivité  $\gamma$  occupe le demi-espace  $z > 0$ . Dans celui-ci, on étudie un champ électromagnétique de la forme :

$$\vec{E}(z, t) = \mathcal{R}e[E(z) \exp(j\omega t)\vec{e}_x] \quad \text{et} \quad \vec{B}(z, t) = \mathcal{R}e[B(z) \exp(j\omega t)\vec{e}_y]$$

- Dans quel domaine de fréquence peut-on négliger le courant de déplacement de MAXWELL devant le courant électrique ? On prendra  $\gamma = 5,7 \times 10^7 \text{ S} \cdot \text{m}^{-1}$ .
- En déduire la forme simplifiée des équations de MAXWELL dans ce matériau.
- Le conducteur étant illimité dans le sens  $z > 0$ , résoudre ces équations ; on admettra qu'un certain dispositif impose le champ électrique à la surface du conducteur :  $E(z = 0) = E_0$ .
- On appelle épaisseur de peau  $\delta$  du matériau la profondeur à partir de laquelle l'amplitude des champs est divisée par  $e$  (base des logarithmes népériens). Évaluer  $\delta$  pour ce conducteur pour une fréquence de 50 Hz puis pour une fréquence de 1 MHz.

### 6. Résistance en haute fréquence : effet de peau ou effet Kelvin

Une bobine est alimentée en courant alternatif sinusoïdal de pulsation  $\omega$ . La répartition du courant dans un fil à section cylindrique donne lieu à des calculs compliqués. On se contente donc du modèle suivant dans lequel le fil a la forme d'un ruban, voir la figure 2. On pourra ainsi dégager des ordres de grandeurs valables.

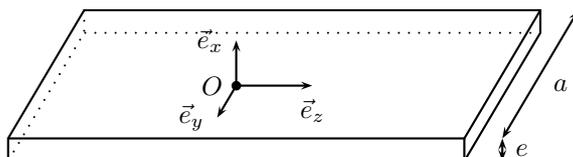


FIGURE 2 – Ruban conducteur pour la modélisation de l'effet KELVIN

On considère un fil conducteur dont la forme est celle d'un ruban rectiligne à section rectangulaire d'épaisseur  $e$  et de largeur  $a$ , tel que représenté. On prendra  $e \ll a$ . Soient  $Oz$  l'axe parallèle à la longueur du ruban passant

par le centre  $O$  de sa section,  $Ox$  l'axe normal au ruban et l'axe  $Oy$  dans le plan du ruban. Pour simplifier, on supposera qu'à l'intérieur du ruban, on peut négliger les effets de bord, c'est-à-dire que le vecteur densité de courant  $\vec{j}$  est en tout point parallèle à  $Oz$  et que son module ne dépend ni de  $y$ , ni de  $z$ . Le conducteur suit la loi d'Ohm et sa conductivité est  $\sigma$ .

1. Montrer que pour des conditions usuelles d'utilisation de la bobine, le courant de déplacement est négligeable dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE. On se place dans ce cadre dans la suite.
2. Écrire, en utilisant la notation complexe en  $\exp i\omega t$ , les trois équations qui lient les vecteurs champs électrique  $\vec{E}$ , magnétique  $\vec{B}$  et le vecteur  $\vec{j}$  dans le ruban. En déduire que le vecteur  $\vec{j}$  satisfait à une équation différentielle qui peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial x^2} - K^2 \vec{j} = \vec{0}$$

où  $K$  est complexe.

3. Donner la solution générale de cette équation pour le ruban. On fera apparaître une longueur caractéristique  $\delta$ , que l'on exprimera à l'aide des données. Donner les valeurs numériques de  $\delta$  pour le cuivre ( $\sigma = 6 \times 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$  pour des fréquences égales à 50 Hz, 5 000 Hz, 500 kHz et 50 MHz).
4. Le fil est traversé par un courant d'intensité totale  $I$  ( $\underline{I}$  en complexes). Expliciter complètement, en fonction de  $I$  notamment, les amplitudes réelles  $j(x)$  et  $E(x)$  des vecteurs  $\vec{j}$  et  $\vec{E}$ . Les formules suivantes seront éventuellement utiles

$$2 \operatorname{sh}(1+i)u \operatorname{sh}(1-i)u = \operatorname{ch} 2u - \cos 2u \quad \text{et} \quad 2 \operatorname{ch}(1+i)u \operatorname{ch}(1-i)u = \operatorname{ch} 2u + \cos 2u$$

5. En utilisant la puissance dissipée par effet JOULE, calculer la résistance du fil par unité de longueur. Que devient ce résultat en régime continu ?

## C. Étude de condensateurs

### 7. Décharge d'un condensateur plan

Un condensateur plan est formé de deux disques conducteurs de même rayon  $a$  de quelques centimètres et de même axe  $Oz$ . Les disques portent des charges  $q(t)$  et  $-q(t)$ . Ils sont séparés par une distance  $e$ . On néglige tout effet de bord en supposant le champ électrique uniforme et les lignes de champ magnétique circulaires d'axe  $Oz$ . On suppose qu'il se décharge dans un circuit résistif, en régime lentement variable tel que le champ électrique obéit à :  $E_z = E_0 \exp(-t/\tau)$  avec  $\vec{E} = E_z \vec{e}_z$ . On le suppose uniforme dans tout le volume du condensateur, c'est à dire indépendant de  $r$ .

1. Déterminer le champ magnétique correspondant sous la forme  $\vec{B} = B(r, t) \vec{e}_\theta$ . Donner l'expression de  $B$  en fonction de  $E$ ,  $r$  et  $\tau$ .
2. En un point du volume du condensateur, exprimer en fonction de  $r$  et de  $\lambda = c\tau$  le rapport des contributions électrique et magnétique à la densité d'énergie électromagnétique.
3. Montrer que, pour un régime lentement variable (concept que l'on précisera), il est bien légitime de considérer un condensateur comme un système purement électrique (c'est à dire non magnétique).
4. Proposer des ordres de grandeurs les plus défavorables pour cette approximation que l'on puisse rencontrer en TP, conclure.
5. Calculer le vecteur de Poynting en un point intérieur au condensateur et commenter la direction de celui-ci.
6. Donner l'expression du flux de ce vecteur, à travers le cylindre de rayon  $a$  et de hauteur  $e$  en fonction de  $E$ , et du volume  $V$  de ce cylindre. Interpréter le résultat précédent à l'aide d'un bilan énergétique.

### 8. Étude électromagnétique d'un condensateur sphérique

Un condensateur sphérique est constitué de deux armatures métalliques parfaitement conductrices, sphériques, concentriques, de centre  $O$  et de rayons  $a$  et  $b > a$ . L'espace compris entre ces armatures est rempli d'un milieu conducteur de conductivité  $\gamma$ . On cherche pour ce système un champ électromagnétique variable, respectant la symétrie sphérique :  $\vec{E} = E(r, t) \vec{e}_r$  à l'exclusion de toute composante statique. On suppose aussi qu'à l'instant  $t = 0$ , le condensateur était chargé :  $\iint_S \sigma_{t=0, r=a} dS = Q_0$ .

1. Montrer que le champ magnétique est nul pour des raisons de symétrie.
2. Établir et résoudre les équations vérifiées par le champ électromagnétique.
3. Définir et calculer la constante de temps  $\tau$  du système.

4. Montrer qu'aucune puissance électromagnétique n'est rayonnée par ce système. Établir le bilan local des puissances pour ce système. Quelle est la constante de temps pour les puissances ?
5. Établir l'expression de l'énergie emmagasinée dans le condensateur pour une date  $t$  quelconque.
6. En déduire l'expression de l'énergie dissipée par effet JOULE entre  $t = 0$  et  $t \rightarrow \infty$ .

### D. Situation générale

#### 9. Mise en rotation d'un cylindre chargé

On considère le circuit de la figure 3 à gauche. Un générateur de tension continue  $U$  alimente une bobine de coefficient d'autoinductance  $L$  et de résistance  $R$ . Pour  $t < 0$ , l'interrupteur  $K$  est fermé alors que  $K'$  est ouvert. À la date  $t = 0$ , on inverse la situation des deux interrupteurs. Dans la bobine de rayon  $a$ , de longueur  $\ell$  et présentant  $n$  spires par mètre, on a placé un cylindre chargé de rayon  $b < a$ , de hauteur  $\ell$ . Ce cylindre est fixé à l'axe  $Oz$ , axe de symétrie de la bobine, cet axe lui permet d'avoir une rotation sans frottement autour de l'axe  $Oz$ . Le moment d'inertie du cylindre de masse  $m$  est  $J = \frac{1}{2}mb^2$ . On supposera que, quel que soit l'état de mouvement du cylindre, sa charge volumique est  $\rho_0$  uniforme. On suppose aussi qu'il n'y a pas de courants de FOUCAULT dans le cylindre. On considère que les constantes électromagnétiques sont  $\epsilon_0$  et  $\mu_0$ .

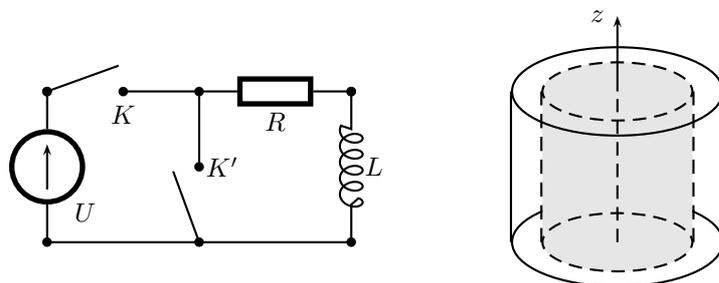


FIGURE 3 – Circuit d'alimentation de la bobine et cylindre

1. Établir l'expression de l'intensité  $i(t)$  circulant dans la bobine pour  $t < 0$  et ensuite pour  $t \geq 0$  en ne prenant pas en compte ce qu'il se passe au niveau du cylindre.
2. Rappeler l'expression du champ magnétique produit par la bobine en l'assimilant à un solénoïde infini. On se place dans l'approximation des régimes quasi-permanents.
3. En déduire l'expression du champ électrique créé dans la bobine.
4. Le cylindre est immobile à la date  $t = 0$ , établir la loi donnant  $\vec{\omega} = \omega(t)\vec{e}_z$ , c'est-à-dire la loi d'évolution de sa vitesse de rotation.

#### 10. Modèle d'une diode à vide

On considère un cylindre métallique de rayon  $R$  et de hauteur  $h$ . Celui-ci est vide à l'exception de son axe où l'on trouve un fil conducteur qui émet des électrons avec une vitesse faible que l'on négligera. On se place en situation de régime indépendant du temps. Le fil émetteur d'électrons est relié à la masse alors que l'armature cylindrique externe de rayon  $R$  est portée au potentiel  $V_0$ , voir le schéma de la figure 4. On négligera les effets de bord, ce qui revient à considérer que le cylindre est de hauteur infinie.

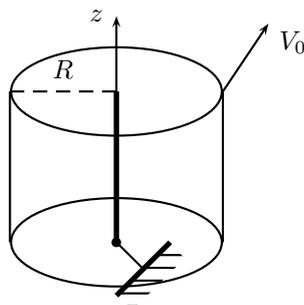


FIGURE 4 – Modélisation d'une diode à vide

1. Quel doit être le signe de  $V_0$  pour que les électrons se dirigent vers l'électrode extérieure? Donner l'expression de leur vitesse lorsqu'ils y parviennent.
2. Les électrons se déplaçant vers l'électrode cylindrique sont responsables de l'existence d'une charge volumique  $\rho(r)$  entre les deux électrodes. On note  $V(r)$  le potentiel électrique existant à la distance  $r$  de l'axe et donc de l'électrode émettrice d'électrons. Donner l'équation différentielle vérifiée par  $V(r)$  en fonction entre autre de l'intensité  $I$  qui traverse la diode à vide.
3. On cherche une solution particulière de la forme  $V(r) = Ar^\alpha$  où  $A$  et  $\alpha$  sont des constantes réelles. Déterminer  $A$  et  $\alpha$ . On s'attachera à caractériser l'intensité  $I$  dans le cadre de l'étude proposée.

On rappelle l'expression du laplacien scalaire en coordonnées cylindriques :

$$\Delta V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

## E. Puissance transportée, dissipée

### 11. Résistance d'une sphère

On se propose de calculer la résistance  $R$  d'une sphère creuse de rayon  $a$  et d'épaisseur  $e \ll a$ , constituée d'un matériau homogène de conductivité  $\sigma$  entre deux points  $A_1$  et  $A_2$  diamétralement opposés que l'on repérera en coordonnées sphériques par les colatitudes respectives  $\theta = 0$  et  $\theta = \pi$ . Voir la figure 5. On donne :

$$\int \frac{d\theta}{\sin \theta} = \ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| + \text{Cte}$$

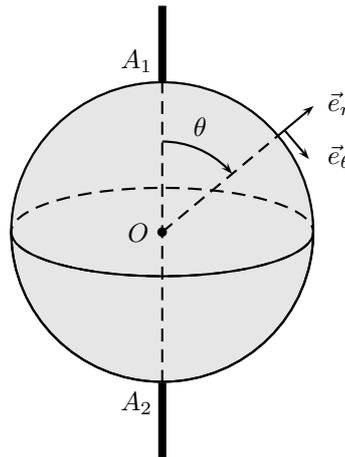


FIGURE 5 – Sphère conductrice

1. Expliquer qualitativement pourquoi le calcul de la résistance entre deux points est sans signification physique.
2. On considère qu'un courant d'intensité  $I$  est en fait amené en  $A_1$  sur un petit point de soudure circulaire centré sur ce point, défini en coordonnées sphériques par  $\theta < \alpha$  avec  $\alpha \ll 1$ . Le courant  $I$  sort par un point de soudure identique centré sur  $A_2$ , défini par  $\pi - \alpha < \theta < \pi$ .
  - (a) Proposer, compte tenu des symétries et conditions du problème, une structure simple des lignes de courant et exprimer la norme  $j$  de la densité de courant en un point de la sphère en fonction de  $a$ ,  $e$ ,  $I$  et  $\theta$ .
  - (b) À l'aide du résultat précédent, calculer la tension  $U = V_1 - V_2$  entre les points de soudure et en déduire l'expression de la résistance  $R$  de la sphère en fonction de  $\sigma$ ,  $a$ ,  $e$  et  $\alpha$ . Retrouver le résultat deviné à la première question.

**12. Résistance d'un conducteur ohmique**

On considère un cylindre de matériau conducteur, de conductivité  $\gamma$ , de rayon  $a$ , de longueur  $h$ , parcouru par le courant  $I$  uniformément réparti en volume. On néglige les effets de bord, on raisonnera comme si l'on avait affaire à un cylindre infini.

1. Déterminer le champ électrique en tout point intérieur au conducteur. Quelles sont les sources de ce champ ?
2. Déterminer de même le champ magnétique en tout point de l'espace.
3. Déterminer le vecteur de Poynting et son flux à travers la surface cylindrique entourant le conducteur. Commenter.

**13. Puissance transportée par un câble coaxial**

On considère un câble coaxial dont le milieu vide est limité par une âme métallique cylindrique de rayon  $a$  et d'axe  $Oz$  et une gaine cylindrique coaxiale et de rayon  $b$ . L'étude s'effectue en régime permanent. On cherche des solutions des équations de MAXWELL en coordonnées cylindriques sous la forme :

$$\vec{E}(r, \theta) = f(r)\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{B}(r, \theta) = g(r)\vec{e}_\theta$$

1. Montrer que ces formes sont solutions des équations de MAXWELL. Déterminer la forme de  $f$  et  $g$ . On utilisera la formule de la divergence en coordonnées polaires :

$$\operatorname{div} \vec{U} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial(rU_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z}$$

2. Relier  $f$  à la différence de potentiel  $U$  entre les armatures et  $g$  à l'intensité  $I$  transportée par l'armature interne.
3. Calculer le vecteur de Poynting et calculer son flux à travers une section droite de câble.

**14. Champs dans un câble coaxial**

Dans un câble coaxial d'axe  $(Oz)$ , de rayons intérieur  $R_1$  et extérieur  $R_2 > R_1$ , on étudie la propagation d'une onde de champ électrique  $\vec{E} = E(r) \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_r$ , en coordonnées cylindriques, dans l'espace inter-armatures.

Le métal des armatures sera assimilé à un conducteur parfait, d'épaisseur de peau nulle : le champ électrique y est donc identiquement nul.

1. Par application du théorème de Gauss, déterminer  $E(r)$ . On posera  $E(r = R_1) = E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$ .
2. Déterminer les charges surfaciques portées par les armatures.
3. Par application de l'équation de MAXWELL-FARADAY, déterminer le champ magnétique. On négligera toute composante continue de ce champ.
4. Déterminer les courants surfaciques portés par les armatures.
5. Relier  $\omega$  et  $k$  ; commenter.
6. Déterminer la moyenne temporelle de l'énergie électromagnétique volumique contenue dans le câble.
7. Déterminer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne.
8. Dédire des deux relations précédentes la vitesse de transport de l'énergie dans le câble. Commenter.