

Exercices : 25 - Équations de Maxwell

— Solutions —

A. Distributions de charges et de courants

1. Distributions électrostatiques

Réponses : l'équation de POISSON donne $\rho = -\epsilon_0 \Delta V$. On prend le formulaire d'analyse vectorielle, et on en déduit que $\rho = -\epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dV}{dr} \right)$. Le calcul donne alors $\rho(r > a) = 0$ et $\rho(r < a) = -6\epsilon_0 k$. Ensuite, on calcule le champ électrostatique $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(r) = -\frac{dV}{dr} \vec{e}_r$ dans chaque domaine ($r < a$ et $r > a$) et on écrit la relation de passage à l'interface $r = a$, le champ y étant normal : $E_r(r = a^+) - E_r(r = a^-) = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$. On en déduit la charge surfacique σ en $r = a$: $\sigma = 3\epsilon_0 k a$. Il est aussi possible d'envisager une méthode s'appuyant sur le théorème de GAUSS, après calcul du champ électrostatique par $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$, pour remonter aux sources en profitant de la symétrie sphérique du problème. Il y a invariance des sources parallèlement au plan yOz donc V ne dépend que de x , de même que $\vec{E}$. On note aussi, en coordonnées cartésiennes, que $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V(x) = -\frac{dV}{dx} \vec{e}_x$. Le champ électrique est suivant $\vec{e}_x$, ce qui était prévisible par les symétries puisque tout plan contenant cette direction est de symétrie positive pour les sources. Ensuite, plutôt que d'utiliser l'équation de POISSON, il est plus rapide de considérer l'équation de MAXWELL-GAUSS : $\frac{dE}{dx} = \frac{\rho(x)}{\epsilon_0}$. On l'intègre dans chaque domaine et on fixe une constante d'intégration grâce à la relation de passage en $x = 0$ pour le champ électrique qui est normal. Ainsi, $\vec{E}(x < 0) = \left[\frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \exp x/a + C \right] \vec{e}_x$ et $\vec{E}(x > 0) = C \vec{e}_x$. La constante reste à déterminer. On peut l'obtenir en disant que lorsque $x \rightarrow \infty$, la distribution volumique tend vers une distribution surfacique $\sigma_{eq} = \int_{-\infty}^0 \rho_0 \exp \frac{x}{a} dx = \rho_0 a$. Celle-ci, superposée à la distribution surfacique $-\rho_0 a$ déjà présente en $x = 0$, donne une répartition surfacique de charges équivalente globale localement nulle partout. Ainsi, aucun champ n'est produit pour $x \rightarrow \infty$ et $\vec{E}(x < 0) = \frac{\rho_0 a}{\epsilon_0} \exp \frac{x}{a} \vec{e}_x$ et $\vec{E}(x > 0) = \vec{0}$. Il y a une méthode plus rapide pour trouver ce résultat. Il suffit de découper la distribution volumique $\rho(x)$ en tranches situées en x_t et d'épaisseur dx_t . Chaque tranche a une répartition surfacique de charges équivalente uniforme $d\sigma(x_t) = \rho(x_t) dx_t$ et produit un champ électrostatique connu (voir champ produit par un plan infini chargé uniformément en surface) : $d\vec{E}(x > x_t) = \frac{d\sigma(x_t)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$ et $d\vec{E}(x < x_t) = -\frac{d\sigma(x_t)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$. Il suffit ensuite de cumuler ces champs en intégrant la variable x_t de $-\infty$ à 0 et de superposer le champ produit par $\sigma = -\rho_0 a$ en $x = 0$ et on retrouve le même résultat final.

2. Émission de charges par un plan

Réponses : posons, car c'est fort utile pour la suite, la date $t_2 = \frac{\sigma_0}{a}$. À l'instant t , le système est caractérisé par la distribution surfacique de charges $\sigma(t) = \sigma_0 - at$ pour $0 \leq t \leq t_2$, $\sigma(t) = 0$ pour $t \geq t_2$ et par une distribution volumique de charges de densité $\rho = \frac{aSt}{v_0 t S} = \frac{a}{v_0}$ s'étendant de $x = 0$ à $x = v_0 t$ pour $0 \leq t \leq t_2$, $x = v_0(t - t_2)$ à $x = v_0 t$ pour $t \geq t_2$. De plus, le point M est atteint par le vent de charges à la date t_1 définie par $t_1 = \frac{X}{v_0}$. D'après ce qui précède, force est de constater que l'on doit considérer quatre phases :

- Phase (I) de $t = 0$ à t_1 : le plan est chargé $\sigma(t) \neq 0$ et les charges émises ne sont pas encore arrivées au niveau de M .
- Phase (II) de t_1 à t_2 : le plan est chargé $\sigma(t) \neq 0$ et le point M est dans le vent de charges (c'est-à-dire dans la répartition volumique de densité ρ).
- Phase (III) de t_2 à $t_1 + t_2$: le plan n'est plus chargé ($\sigma = 0$) et le point M est dans le vent de charges.
- Phase (IV) après $t_1 + t_2$: le plan n'est plus chargé ($\sigma = 0$) et l'arrière du vent de charges est au-delà du point M de sorte que ce point n'est plus dans la distribution volumique de densité ρ .

Dans tous les cas, tous les plans contenant $(M, \vec{e}_x)$ sont de symétrie positive pour les répartitions de charges en jeu donc le champ électrique en M est suivant $\vec{e}_x$. On pose dans la suite $\vec{E}(M, t) = E(t) \vec{e}_x$. Afin de calculer le champ dans les diverses phases, intéressons-nous à des champs particuliers :

- Champ $\vec{E}_1$ créé par un plan $x = 0$ chargé $\sigma(t)$: l'analyse de symétrie des sources montre que ce champ est symétrique par le plan. Posons alors $\vec{E}_1 = \text{sgn}(x) E_1 \vec{e}_x$. Le théorème de GAUSS appliqué à une boîte cylindrique de section S , d'axe normal au plan et non à cheval sur le plan montre que le champ est uniforme de part et d'autre du plan. Enfin, la même boîte à cheval sur le plan donne avec le théorème de GAUSS $2 E_1 S = \frac{\sigma(t) S}{\epsilon_0}$ soit $\vec{E}_1 = \text{sgn}(x) \frac{\sigma(t)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$.
- Champ $\vec{E}_2$ créé en M d'abscisse X par un volume de charges entre deux plans $x = x_1 < X$ et $x = x_2 \leq X$ ($x_1 < x_2$) et de densité ρ uniforme : on procède de même en exploitant la symétrie par le plan $x = (x_1 + x_2)/2$ et le théorème de GAUSS et on trouve $\vec{E}_2 = \frac{1}{2\epsilon_0} (x_2 - x_1) \rho \vec{e}_x$.

On peut à présent traiter les quatre phases en utilisant à loisir le théorème de superposition (les équations de MAXWELL étant linéaires nous l'autorisant) :

- Phase (I) : on superpose le champ $\vec{E}_1$ créé par le plan avec $\sigma(t)$ et le champ $\vec{E}_2$ créé par le vent de charges (avec $x_2 - x_1 = v_0 t$), soit $E(t) = \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma(t) + a t)$ donc $\vec{E} = \frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$
- Phase (II) : on superpose le champ $\vec{E}_1$ créé par le plan avec $\sigma(t)$, le champ $\vec{E}_{2a}$ créé par la partie du vent de charges à gauche de M (avec $x_2 - x_1 = X$) et le champ $\vec{E}_{2b}$ créé par la partie à droite de M (champ de sens contraire et $x_2 - x_1 = v_0 (t - t_1)$), soit $E(t) = \frac{1}{2\epsilon_0} (\sigma(t) + a t_1 - a (t - t_1))$ donc $\vec{E} = \frac{\sigma_0 + 2a(t_1 - t)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$
- Phase (III) : seuls interviennent, d'une part, le champ $\vec{E}_{2a}$ créé par la partie du vent de charges à gauche de M (avec $x_2 - x_1 = X - v_0 (t - t_1)$) et, d'autre part, le champ $\vec{E}_{2b}$ créé par la partie à droite de M (champ de sens contraire et $x_2 - x_1 = v_0 (t - t_1)$). On trouve alors le même résultat que pour la phase (II), ce qui est logique car la charge totale à gauche de M est finalement inchangée (sans changer les propriétés de symétrie), soit $\vec{E} = \frac{\sigma_0 + 2a(t_1 - t)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$
- Phase (IV) : seul intervient le champ $\vec{E}_{2b}$ créé par le vent de charges intégralement à droite de M (champ de sens contraire à $\vec{e}_x$ et $x_2 - x_1 = v_0 t_2$), d'où $\vec{E} = -\frac{\sigma_0}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$

Finalement, la valeur $E(t)$ du champ électrique ne varie que lors du passage du vent de charges par dessus le point M . Cette variation est linéaire car v_0 est constante et le débit a aussi. Tout plan contenant $(M, \vec{e}_x)$ est à tout instant plan de symétrie positive des sources donc, le champ magnétique en M devant être orthogonal à tous ces plans, il ne peut être que nul ! $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$. L'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$. On a alors deux cas à considérer :

- Cas où M est en dehors du vent de charges, c'est-à-dire non compris dans la zone de charges en mouvement, alors $\vec{j} = \vec{0}$ et on a vu que $\vec{B} = \vec{0}$. De plus, on a vu aussi que dans cette situation $\vec{E} = \pm \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$. Ainsi, il est clair que l'équation de MAXWELL-AMPÈRE est vérifiée.
- Cas où M est dans le vent de charges : alors, il se trouve en ce point $\vec{j} = \rho v_0 \vec{e}_x = a \vec{e}_x$ et on a vu que $\vec{B} = \vec{0}$ et $\vec{E} = \frac{\sigma_0 + 2a(t_1 - t)}{2\epsilon_0} \vec{e}_x$. Le report de ces résultats dans l'équation de MAXWELL-AMPÈRE montre que cette dernière est encore vérifiée.

3. Électrolyte entre les plaques d'un condensateur

Réponses : la densité volumique de charge dans l'électrolyte est, en notant respectivement n_+ et n_- les densités numériques des populations de charges $+q$ et $-q$ d'énergies électrostatique $+qV$ et $-qV$, $\rho = +qn_+ - qn_- = qn_0 \exp\left(-\frac{qV}{k_B T}\right) - qn_0 \exp\left(-\frac{-qV}{k_B T}\right)$ soit $\rho = -2n_0 q \operatorname{sh}\left(\frac{qV}{k_B T}\right)$. Le potentiel électrostatique vérifie l'équation de POISSON (issue de la loi statique $\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V$, injectée dans l'équation de MAXWELL-GAUSS) : $\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ soit $\frac{d^2 V}{dx^2} - 2 \frac{n_0 q}{\epsilon_0} \operatorname{sh}\left(\frac{qV}{k_B T}\right) = 0$. On peut utiliser la méthode du facteur intégrant : on multiplie l'équation précédente par dV/dx , ce qui permet de l'intégrer une première fois pour obtenir une équation différentielle d'ordre 1 dans laquelle on pense à déterminer la constante d'intégration par une condition limite. Ensuite, on effectue la dernière intégration par séparation préalable des variables V et x . Ce type de démarche est par exemple aussi utilisée en Mécanique lorsqu'on souhaite intégrer une équation différentielle du mouvement d'ordre 2 issue de la relation fondamentale de la dynamique pour un problème (éventuellement réduit) à un seul degré de liberté. La première intégration par la méthode du facteur intégrant conduit généralement à une intégrale première du mouvement qui aurait aussi pu être obtenue par une démarche énergétique (TEM ou TEC)... Comme $|qV| \ll k_B T$, on peut simplifier l'équation différentielle précédente en $\frac{d^2 V}{dx^2} - 2 \frac{n_0 q^2}{\epsilon_0 k_B T} V = 0$. Cette équation du second ordre à coefficients constants sans second membre s'intègre directement. On trouve $V(x) = A \operatorname{ch}\left(\frac{x}{\delta}\right) + B \operatorname{sh}\left(\frac{x}{\delta}\right)$ où $\delta = \sqrt{\frac{\epsilon_0 k_B T}{2 n_0 q^2}}$. Puisque les conditions aux limites sont $V(a) = U$ et $V(-a) = -U$, il vient $V(x) = U \frac{\operatorname{sh}\left(\frac{x}{\delta}\right)}{\operatorname{sh}\left(\frac{a}{\delta}\right)}$. La longueur δ est la longueur caractéristique sur laquelle se fait ressentir l'effet de la présence de l'électrolyte par rapport à la situation du vide entre armatures. C'est la longueur caractéristique sur laquelle s'accumulent les anions et les cations respectivement à proximité de chaque armature puisque la densité de charge $\rho(x)$ est proportionnelle à $V(x)$ dans l'approximation de forte agitation thermique $|qV| \ll k_B T$ traitée. Si $a \ll \delta$, ce qui est le cas de la courbe 1, la présence de l'électrolyte entre les plaques du condensateur ne modifie quasiment pas la répartition du potentiel entre les armatures (évolution quasi-affine comme pour le vide). Si $a \gg \delta$, ce qui est le cas de la courbe 5, la présence de l'électrolyte masque complètement l'effet des charges des armatures du condensateur sur le potentiel (c'est un effet d'écran ou écrantage par l'électrolyte). Dans les cas intermédiaires, la répartition du potentiel entre les deux armatures est influencée par les deux types de charges, les ions de l'électrolyte et les charges portées par les armatures du condensateur (écrantage partiel).

B. Approximation des régimes quasi-permanents

4. Conditions de l'ARQP

Réponses : $\rho = \rho_0 \exp -\frac{t}{\tau}$, $\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}$, $\gamma \gg \epsilon_0 \omega$, $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \frac{1}{c^2 \tau} \vec{E}$, $\Delta \vec{E} = \frac{1}{c^2 \tau} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, diffusion.

5. Effet de peau

Réponses : $\gamma \gg \epsilon_0 \omega$, $\omega \ll 6 \times 10^{18} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, $\text{div } \vec{E} = 0$, $\text{div } \vec{B} = 0$, $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \gamma \vec{E}$, $\Delta \vec{E} = \mu_0 \gamma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$, $E(z) = E_0 \exp -\frac{z}{\delta}$ avec $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$, $\delta_{50 \text{ Hz}} = 1,67 \text{ cm}$ et $\delta_{1 \text{ MHz}} = 94 \mu\text{m}$.

6. Résistance en haute fréquence : effet de peau ou effet Kelvin

Réponses : Le courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ admet pour ordre de grandeur $\epsilon_0 \omega \tilde{E}$ pour l'harmonique sinusoïdale à la pulsation ω tandis que le courant de conduction $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ est de l'ordre de $\sigma \tilde{E}$. Ainsi, $\frac{\vec{j}_d}{\vec{j}} = \frac{\epsilon_0 \omega}{\sigma}$. Ce rapport est négligeable devant l'unité dans les conditions usuelles puisque l'ordre de grandeur de σ d'un conducteur est $10^7 - 10^8 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$, donc σ/ϵ_0 est de l'ordre de $10^{18} - 10^{19} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$: on a de la marge car il suffit que $\omega \ll 10^{18} - 10^{19} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ pour pouvoir négliger le courant de déplacement devant le courant de conduction ! Notons tout de même qu'avant d'atteindre de telles pulsations, la loi locale d'OHM réelle sera déjà à remettre en cause en raison de la propagation d'ondes dans les milieux conducteurs ; on conserve de la marge, la condition de validité étant alors $\omega \ll 10^{14} - 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. On néglige le courant de déplacement $\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ devant le courant de conduction $\vec{j}$. Les équations du problème sont donc (en passant aux notations complexes en $\exp i\omega t$) $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$. On en déduit, après élimination du champ électrique, les deux équations suivantes à découpler : $\vec{\text{rot}} \vec{j} = -i\sigma\omega \vec{B}$ et $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$. Pour découpler ce système, on utilise l'analyse vectorielle en écrivant $\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{j} = \text{grad} \underbrace{\text{div } \vec{j}}_{\vec{0} \text{ car } \text{div } \vec{E}=0} - \Delta \vec{j} = -i\sigma\omega \vec{\text{rot}} \vec{B}$ donc $-\Delta \vec{j} = -i\sigma\omega \mu_0 \vec{j}$. La

géométrie et l'énoncé imposant $\vec{j} = j(x) \vec{e}_z$, l'équation obtenue conduit bien à $\frac{\partial^2 \vec{j}}{\partial x^2} - K^2 \vec{j} = \vec{0}$ avec $K^2 = i\sigma\omega\mu_0$. La constante K^2 peut encore s'écrire $K^2 = \exp i\pi/2 \sigma\omega\mu_0 = (\exp i\pi/4 \sqrt{\sigma\omega\mu_0})^2 = (\frac{1+i}{\delta})^2$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma\omega\mu_0}}$. D'après l'équation du courant, K^2 est homogène à $1/x^2$ donc δ à une longueur. La solution générale de l'équation du courant est alors $j(x) = C_1 \exp(1+i)x/\delta + C_2 \exp-(1+i)x/\delta$. Les applications numériques attendues sont les suivantes :

f	50 Hz	5 000 Hz	500 kHz	50 MHz
δ	9 mm	0,9 mm	0,09 mm	9 μm

Le paramètre δ est appelé épaisseur de peau (ou profondeur de peau). Lorsqu'on étudie $j(x, t)$, on se rend compte que δ représente l'épaisseur caractéristique à travers laquelle le courant circule majoritairement dans le fil près des côtés ($x = \pm e/2$). Plus la fréquence est grande, plus δ est petit et le courant tend alors à circuler seulement au niveau des surfaces du ruban. On dit qu'il y a effet de peau (ou effet KELVIN) à haute fréquence. Il est aussi à noter que le modèle plan adopté est valable dans la mesure où la dimension caractéristique du conducteur étudié (son diamètre par exemple) est très grande devant δ . Par exemple, dans le câble coaxial de télévision, la fréquence utilisée est de l'ordre de 400 MHz, ce qui correspond à δ de l'ordre de 3 μm très petite devant le diamètre de l'âme du câble : le modèle plan est alors adapté. D'après la géométrie du problème, la fonction $j(x)$ est forcément paire donc les constantes d'intégration sont égales : $C_1 = C_2 = C/2$. On a ainsi une solution de la forme $j(x, t) = C \exp i\omega t \text{ ch}[(1+i)x/\delta]$. On détermine la constante C en calculant le courant total I . En complexes,

sur une section S du ruban, $\underline{I} = \iint_S \vec{j} \cdot dS \vec{e}_z = 2 \int_0^{e/2} j(x, t) a dx$ soit $\underline{I} = \frac{2Ca\delta}{1+i} \exp i\omega t \text{ sh} \frac{(1+i)e}{2\delta}$. Cette dernière équation détermine la constante C , d'où $j(x, t) = \frac{(1+i)\underline{I}}{2a\delta \text{ sh} \frac{(1+i)e}{2\delta}} \text{ ch} \frac{(1+i)x}{\delta}$. Il ne reste qu'à faire le calcul de

l'amplitude $j(x)$ du courant $j(x, t) = j(x) \cos(\omega t + \varphi)$ (φ est une avance de phase non demandée). $j(x) = \sqrt{j \cdot j^*}$

et les formules données dans l'énoncé permettent de trouver $j(x) = \frac{I}{\sqrt{2}a\delta} \sqrt{\frac{\text{ch} \frac{2x}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta}}{\text{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta}}}$ et $E(x) = \frac{j(x)}{\sigma}$. La densité volumique de puissance moyenne dissipée est $\mathcal{P}_{\text{vol}, \text{moy}} = \langle j(x, t) E(x, t) \rangle = \frac{1}{\sigma} \langle j^2(x, t) \rangle$. L'intégration

sur la section du ruban donne la puissance moyenne dégagée par unité de longueur $\mathcal{P}_m = \iint_S \frac{1}{\sigma} \langle j^2(x, t) \rangle dS$

soit $\mathcal{P}_m = \iint_S \frac{1}{\sigma} j^2(x) \underbrace{\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \rangle}_{1/2} dS$ donc $\mathcal{P}_m = 2 \int_0^{e/2} \frac{1}{2\sigma} j^2(x) a dx$ d'où $\mathcal{P}_m = \frac{a I^2}{2\sigma a^2 \delta^2 (\text{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta})} \times$

$\int_0^{e/2} (\operatorname{ch} \frac{2x}{\delta} + \cos \frac{2x}{\delta}) dx$ donc $\mathcal{P}_m = \frac{I^2}{4\sigma a \delta} \frac{\operatorname{sh} \frac{e}{\delta} + \sin \frac{e}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta}}$. On identifie le résultat à l'expression classique de la puissance moyenne dissipée par effet JOULE (par unité de longueur ici) : $\mathcal{P}_m = R_m I_{eff}^2 = \frac{1}{2} R_m I^2$ d'où $R_m = \frac{1}{2\sigma a \delta} \frac{\operatorname{sh} \frac{e}{\delta} + \sin \frac{e}{\delta}}{\operatorname{ch} \frac{e}{\delta} - \cos \frac{e}{\delta}}$. En régime continu, $\omega \rightarrow 0$ et $\delta \rightarrow \infty$ donc on trouve $R_m \rightarrow \frac{1}{\sigma a e}$, ce qui est cohérent avec la formule $R = \frac{1}{\sigma} \frac{\ell}{S}$ en régime continu pour une unité de longueur. On remarquera que pour $\omega \rightarrow \infty$ (régime HF), la résistance devient infinie d'après ce calcul mais on sort de l'approximation de la première question alors la démarche n'est plus du tout valable !

C. Étude de condensateurs

7. Décharge d'un condensateur plan

Réponses : $\vec{B} = -\frac{r}{2} \frac{E_0}{c^2 \tau} \exp -\frac{t}{\tau} \vec{e}_\theta$, $\frac{u_{mag}}{u_{el}} = \frac{r^2}{4c^2 \tau^2}$, τ grand $u_{mag} \ll u_{el}$, $\tau_{min} \simeq 10^{-6}$ s et $a \simeq 10^{-2}$ m alors $\frac{u_{mag}}{u_{el}} \simeq 10^{-5}$, $\vec{\Pi} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2 r}{c^2 \tau} \exp -\frac{2t}{\tau} \vec{e}_r$, vers l'extérieur décharge du condensateur, $P_{ray} = \frac{1}{2\mu_0} \frac{E_0^2 2\pi a^2 e}{c^2 \tau} \exp -\frac{2t}{\tau}$, $P_{ray} = \frac{\varepsilon_0 E^2 V}{\tau}$, $P_{ray} = -\frac{dW_{cond}}{dt}$ avec $W_{cond} = \frac{\varepsilon_0}{2} E^2 V$.

8. Étude électromagnétique d'un condensateur sphérique

Réponses : $\vec{E}, \vec{j}$ radiaux, $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta) = \Pi^+$ et $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi) = \Pi^+$ donc $\vec{B} = \vec{0}$; $\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \gamma \vec{E} = \vec{0}$, $\vec{E} = \frac{Q_0}{4\pi \varepsilon_0 r^2} \exp -\frac{t}{\tau} \vec{e}_r$ avec $\tau = \frac{\varepsilon_0}{\gamma}$; $\vec{\Pi} = \vec{0}$, $\frac{\partial u}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$ avec $u = \frac{\varepsilon_0}{2} \vec{E}^2$; $\tau' = \frac{\tau}{2}$; $W_e = \int u 4\pi r^2 dr = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 (b-a)}{4\pi \varepsilon_0 ab} \exp -\frac{2t}{\tau}$; $W_J = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2 (b-a)}{4\pi \varepsilon_0 ab}$.

D. Situation générale

9. Mise en rotation d'un cylindre chargé

Réponses : L'intensité pour $t < 0$ est $i = \frac{U}{R}$ puisque le régime permanent est nécessairement atteint. Ensuite, l'intensité obéit à $L \frac{di}{dt} + Ri = 0$. Comme l'intensité est continue dans la bobine, on a $i(t) = \frac{U}{R} \exp -\frac{t}{\tau}$ avec $\tau = \frac{L}{R}$. On a $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{e}_z$. À l'intérieur de la bobine, l'existence d'un champ magnétique variable provoque l'existence d'un champ électrique $\vec{\operatorname{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. Par symétrie $\vec{E} = E_\theta(r, t) \vec{e}_\theta$, on a donc $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\phi}{dt}$. Sur un cercle C de rayon r , on arrive à $\vec{E} = \frac{r}{2} \mu_0 n \frac{U}{L} \exp -\frac{t}{\tau} \vec{e}_\theta$. Un volume élémentaire situé à la distance r de l'axe est soumis à une force électrique élémentaire $d\vec{F} = \rho_0 r dr d\theta dz \frac{r}{2} \mu_0 n \frac{U}{L} \exp -\frac{t}{\tau} \vec{e}_\theta$. Cette force possède un moment par rapport à l'axe Oz de bras de levier r . La force magnétique ne possède pas de moment, tout comme le poids du cylindre et la réaction d'axe. Comme la liaison est parfaite, le théorème du moment cinétique sur l'axe Oz s'écrit $J \frac{d\omega}{dt} = \mathcal{M}_{elec}$. On calcule par intégration le moment de la force électrique, on trouve $\mathcal{M}_{elec} = \rho_0 \mu_0 n \frac{U}{4L} \pi b^4 \ell \exp -\frac{t}{\tau}$. On trouve $\omega(t) = \rho_0 \mu_0 n \frac{U}{4JR} \pi b^4 \ell (1 - \exp -\frac{t}{\tau})$.

10. Modèle d'une diode à vide

Réponses : $V_0 > 0$ pour que les électrons de charge négative soient attirés. On applique la conservation de l'énergie mécanique à l'électron en négligeant son poids : $0 + 0 = \frac{1}{2} m v_f^2 - e V_0$ d'où $v_f = \sqrt{\frac{2eV_0}{m}}$. L'équation de LAPLACE-POISSON est $\Delta V = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$. La charge volumique est reliée à l'intensité puisque $\vec{j} = \rho(r) v(r) \vec{e}_r$. L'intensité est donc $I = -\rho(r) v(r) 2\pi r h$. Par conservation de l'énergie, on montre que $v(r) = \sqrt{\frac{2e}{m}} V^{1/2}(r)$. En utilisant l'équation de LAPLACE-POISSON, on arrive à l'équation $I = \varepsilon_0 2\pi h \sqrt{\frac{2e}{m}} V^{1/2}(r) \frac{d}{dr} (r \frac{dV}{dr})$. On obtient $I = \varepsilon_0 2\pi h \sqrt{\frac{2e}{m}} \alpha^2 A^{3/2} r^{\frac{3\alpha}{2}-1}$. En régime permanent, l'intensité I est indépendante de r . on a donc $\alpha = \frac{2}{3}$. Par continuité du potentiel aux limites, on trouve que $V_0 = AR^{2/3}$, on a $A = \frac{V_0}{R^{2/3}}$. La loi d'évolution du potentiel dans la diode à vide est donc $V(r) = V_0 \left(\frac{r}{R}\right)^{2/3}$.

E. Puissance transportée, dissipée

11. Résistance d'une sphère

Réponses : le modèle d'arrivée du courant par un point est excessif. La formule donnant la résistance d'un tronçon cylindrique ($R = \rho l/S$) montre du reste que la résistance du conducteur au niveau de A_1 devient infinie s'il comporte une portion de section nulle. Le système admettant une symétrie de révolution d'axe $A_1 A_2$, les lignes de courant sont contenues dans des plans méridiens $\varphi = \text{cte}$; pour la même raison, la norme de $\vec{j}$ est indépendante de φ . En définitive, la densité de courant peut être raisonnablement cherchée sous la forme $\vec{j} = j(\theta) \vec{e}_\theta$. Appelons Σ la section de la sphère par un cône de demi-angle au sommet θ . L'aire de cette section est $2\pi e a \sin \theta$ (le développement de cette section est un rectangle de largeur e et de longueur égale à celle d'un cercle de rayon $a \sin \theta$). En exprimant que l'intensité (flux de $\vec{j}$) qui traverse Σ (orienté de A_1 vers A_2) est I (en régime permanent, l'intensité est la même à travers toute section du conducteur car $\operatorname{div} \vec{j} = 0$), on obtient

$\vec{j} = \frac{I}{2\pi a e} \frac{\vec{e}_\theta}{\sin \theta}$. En exprimant la forme locale $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ de la loi d'OHM, on peut calculer la tension U comme la circulation de $\vec{E}$ le long d'une ligne de courant en notant que le déplacement élémentaire le long de cette ligne se met sous la forme $d\vec{l} = a d\theta \vec{e}_\theta$: $U = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{I}{2\pi \sigma a e} \int_\alpha^{\pi-\alpha} \frac{a d\theta}{\sin \theta}$ soit $U = \frac{I}{2\pi \sigma e} \left[\ln \left| \tan \frac{\theta}{2} \right| \right]_\alpha^{\pi-\alpha}$ donc $U = R I$ avec $R = \frac{1}{\pi \sigma e} \ln \left[\cotan \frac{\alpha}{2} \right]$. On vérifie que la résistance diverge bien lorsque $\alpha \rightarrow 0$.

12. Résistance d'un conducteur ohmique

Réponses : $\vec{E} = \frac{1}{\gamma} \frac{I}{\pi a^2} \vec{e}_z$, générateur ; $\vec{B}_{r \leq a} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2} \vec{e}_\theta$, $\vec{B}_{r \geq a} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$; $\vec{\Pi}_{r=a} = -\frac{1}{\gamma} \frac{I^2}{2\pi^2 a^3} \vec{e}_r$, $\Phi_{\text{entrant}} = \frac{1}{\gamma} \frac{I^2 h}{\pi a^2}$, $R = \frac{1}{\gamma} \frac{h}{\pi a^2}$.

13. Puissance transportée par un câble coaxial

Réponses : $\text{div } \vec{E} = 0$ d'où $f(r) = \frac{\alpha}{r}$, $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \vec{0}$ d'où $g(r) = \frac{\beta}{r}$, $\int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l} = U$ donc $\vec{E} = \frac{U}{r \ln(a/b)} \vec{e}_r$, $\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{e}_\theta$, $P = \int \int \vec{\Pi} \cdot (r dr d\theta \vec{e}_z) = UI$.

14. Champs dans un câble coaxial

Réponses : $E(r) = E_0 \frac{R_1}{r}$, $\sigma_{r=R_1} = \varepsilon_0 E_0 \exp[i(\omega t - kz)]$, $\sigma_{r=R_2} = -\varepsilon_0 E_0 \frac{R_1}{R_2} \exp[i(\omega t - kz)]$;
 $\vec{B} = \frac{k}{\omega} E_0 \frac{R_1}{r} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_\theta$; $\vec{j}_{r=R_1} = \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0 \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_z$, $\vec{j}_{r=R_2} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0 \frac{R_1}{R_2} \exp[i(\omega t - kz)] \vec{e}_z$;
 $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$; $\langle u \rangle = \varepsilon_0 E_0^2 \frac{R_1^2}{2r^2}$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \frac{k}{\omega} E_0^2 \frac{R_1^2}{r^2} \vec{e}_z$; $\langle \vec{\Pi} \rangle = \langle u \rangle \vec{v}_{en}$, $\vec{v}_{en} = c \vec{e}_z$.