Exercices : 26 - Ondes électromagnétiques

A. Structure de l'onde

1. Caractérisation d'une OPPS

Une onde progressive plane monochromatique, de longueur d'onde $\lambda = 6 \times 10^{-7}$ m, se propage dans le vide. A tout instant t, son vecteur champ électrique complexe $\vec{E}$ au point $P(x, y, z)$ a pour composantes cartésiennes E_x, E_y, E_z avec :

$$E_z = 0 \qquad E_x = E_0 \exp(j\Phi) \qquad \text{où} \qquad \Phi = \frac{k}{3}(2x + 2y + z) - \omega t$$

On a de plus $E_0 = 10^{-4}\,\mathrm{V \cdot m^{-1}}$.

1. Calculer la fréquence de l'onde :

$$a) N = 10^{21}\,\mathrm{Hz} \quad b) N = 3 \times 10^{17}\,\mathrm{Hz} \quad c) N = 5 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} \quad d) N = 2 \times 10^{7}\,\mathrm{Hz}$$

2. Cette fréquence appartient-elle au domaine :

$a)$industriel $b)$radioélectrique $c)$optique $d)$gamma

3. Calculer la valeur numérique de k :

$$a) k = 1,047 \times 10^7\,\mathrm{m^{-1}} \quad b) k = 2 \times 10^5\,\mathrm{m^{-1}} \quad c) k = 3,092 \times 10^3\,\mathrm{m^{-1}} \quad d) k = 0,573 \times 10^2\,\mathrm{m^{-1}}$$

4. Indiquer l'équation cartésienne des plans d'onde :

$$a) 2x + 2y + z = Cte \quad b) x + y = Cte \quad c) z = Cte \quad d) x + y + 2z = Cte$$

5. Établir l'expression de E_y en fonction de E_x et indiquer leur relation de phase :

$a) E_y = E_x/3$ $b) E_y = -E_x$ $c)$phase $d)$opposition de phase

6. Calculer en fonction de E_x les trois composantes du vecteur champ magnétique de l'onde :

$$a)(E_x/2c; E_x/2c; E_x/c) \quad b)(E_x/3c; E_x/3c; -4E_x/3c)$$
$$c)(E_x/2c; E_x/2c; -2E_x/c) \quad d)(2E_x/3c; 2E_x/3c; E_x/3c)$$

7. Calculer en fonction de Φ la densité d'énergie électromagnétique au point P à la date t :

$$a) u = \varepsilon_0 E_0^2 \cos 2\Phi \quad b) u = 2\varepsilon_0 E_0^2 \sin 2\Phi \quad c) u = \varepsilon_0 E_0^2 \sin^2 \Phi \quad d) u = 2\varepsilon_0 E_0^2 \cos^2 \Phi$$

8. Calculer sa valeur moyenne sur une période en électronvolt (eV) par m^3 :

$$a) < u >_t = 0,55\mathrm{eV \cdot m^{-3}} \quad b) < u >_t = 2\mathrm{eV \cdot m^{-3}}$$
$$c) < u >_t = 5\mathrm{eV \cdot m^{-3}} \quad d) < u >_t = 0,02\mathrm{eV \cdot m^{-3}}$$

9. Calculer en fonction de Φ les composantes du vecteur de Poynting $\vec{R}$ de l'onde :

$$a)(\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi)$$
$$b)(\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; \varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/2; -2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi)$$
$$c)(4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3)$$
$$d)(4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 4\varepsilon_0 c E_0^2 \cos^2 \Phi/3; 2\varepsilon_0 c E_0^2 \cos\Phi \sin\Phi/3)$$

10. Calculer les valeurs numériques de la période T_R et de la valeur moyenne $< ||\vec{R}|| >_t$:

$$a) T_R = 5 \times 10^{-20}\,\mathrm{s} \quad b) T_R = 10^{-15}\,\mathrm{s}$$
$$c) < ||\vec{R}|| >_t = 1,32 \times 10^{-8}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}} \quad d) < ||\vec{R}|| >_t = 2,65 \times 10^{-11}\,\mathrm{W \cdot m^{-2}}$$

2. Onde Laser

Un faisceau laser émet une onde plane monochromatique polarisée rectilignement qui se propage dans le plan Oxy suivant une direction Ox' inclinée de $60\,^{\circ}$ par rapport à l'axe Ox.

1. Écrire les composantes du vecteur d'onde, du champ électrique, du champ magnétique et du vecteur de Poynting.
2. Calculer leurs normes dans le cas d'un laser à argon ionisé ($\lambda = 488\,\text{nm}$) qui émet en continu un faisceau cylindrique de $1\,\text{mm}^2$ de section, de puissance moyenne $1\,\text{W}$.
3. Quelle est l'énergie électromagnétique localisée en moyenne dans un tranche d'espace plane perpendiculaire à Ox', d'épaisseur dx' et de surface S ? Quelle est l'énergie rayonnée en moyenne à travers la surface S pendant le temps dt ? En déduire la vitesse à laquelle se propage l'énergie électromagnétique moyenne.

B. Ondes dans le vide

3. Ondes stationnaires

Un dispositif non précisé assure dans le demi-espace $x < 0$ la propagation le long de l'axe Ox, dans le vide, d'une onde :

$$\vec{E} = E_0 \exp -i\omega(\frac{x}{c} - t)\vec{e}_y$$

A partir du point O, un certain dispositif réfléchissant superpose à l'onde précédente dans le même demi-espace une onde de même direction, se propageant en sens inverse, d'amplitude $-E_0$ et de même pulsation :

$$\vec{E} = -E_0 \exp -i\omega(\frac{x}{c} + t)\vec{e}_y$$

1. Déterminer le champ électrique de l'onde totale.
2. Déterminer le champ magnétique correspondant ; on utilisera l'équation de Maxwell-Faraday.
3. Justifier le terme d'onde stationnaire et préciser les lieux des nœuds et des ventres du champ électrique et du champ magnétique.

4. Création d'un champ électromagnétique

1. Soit une distribution surfacique plane (plan xOy) illimitée de vecteur densité de courant surfacique alternatif $\vec{j}_s = J_0\,\cos\omega t\,\vec{e}_x$. Déterminer le champ électromagnétique hors du plan.

5. Onde cylindrique

Dans le vide illimité se propage une onde électromagnétique cylindrique, c'est-à-dire telle que les potentiels scalaire et vecteur vérifient $V = V(r,t)$ et $\vec{A} = A(r,t)\vec{e}_z$ dans le système de coordonnées cylindriques (r,θ,z) d'axe (Oz). On indique que les potentiels V et $\vec{A}$ sont reliés aux champs par les relations suivantes :

$$\vec{E} = -\overrightarrow{grad}\,V - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \overrightarrow{rot}\,\vec{A}$$

et que le potentiel vecteur obéit à l'équation de jauge de Lorentz :

$$\text{div}\,\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial V}{\partial t} = 0$$

1. Déterminer les équations aux dérivées partielles du second ordre dont sont solutions les potentiels. Montrer que le potentiel scalaire est nécessairement nul dans le cadre de la jauge de Lorentz.
2. On cherche alors le potentiel vecteur sous la forme complexe $A(r,t) = \text{Re}\left(f(r)\exp\left(i\omega t\right)\right)$. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $f(r)$. Cette équation ne possède pas de solution simple.
3. On admettra que la source de l'onde est situé sur l'axe (Oz). On propose une solution approchée $f_0(r) = \frac{\alpha}{\sqrt{r}}\exp -i\frac{\omega}{c}r$ de cette équation à grande distance de l'axe où α est une constante positive. En déduire la vitesse de propagation d'une telle onde, ainsi que la géométrie des champs.
4. Donner les expressions approchées du champ électromagnétique en les recherchant sous la forme $\vec{E}\left(\mathbf{r},t\right) = \text{Re}\left(\vec{E}_0(r)\exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]\right)$ et $\vec{B}\left(\mathbf{r},t\right) = \text{Re}\left(\vec{B}_0(r)\exp\left[i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)\right]\right)$, où on précisera le vecteur d'onde $\vec{k}$ et les formes approchées des vecteurs $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$.
5. La puissance moyenne transportée par l'onde, sur une hauteur h le long de l'axe (Oz) et à la distance R de l'axe de symétrie Oz est notée P_0. Préciser les expressions de $\vec{E}_0$ et $\vec{B}_0$ en déterminant l'expression de α.

6. Biprisme

Un biprisme d'angle au sommet A et d'indice optique n dévie vers sa base une onde électromagnétique monochromatique plane progressive, de pulsation ω, d'amplitude E_0 d'un angle θ (cf. figure 1) où on admet que $\sin(A+\theta) = n \sin A$. L'angle A est petit.

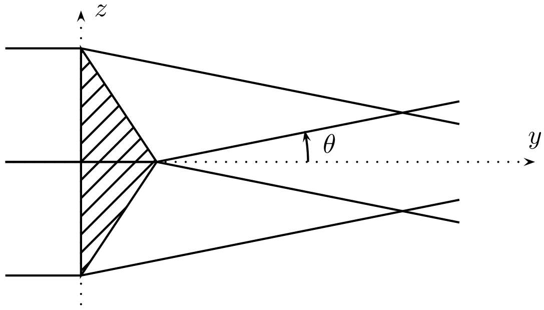

FIGURE 1 – Biprisme

On considère que le champ électrique de chacune des deux ondes considérées est en permanence perpendiculaire au plan de figure.

1. Déterminer les champs électrique et magnétique complexes de l'onde issue du prisme supérieur.
2. Déterminer de même les champs de l'onde issue du prisme inférieur.
3. Déterminer les expressions de $\vec{E}$ et de $\vec{B}$ dans la zone de superposition des ondes.
4. Déterminer le vecteur de Poynting et la densité volumique d'énergie en tout point du champ d'interférence. On s'intéressera en particulier à ce qu'on peut observer sur l'écran, perpendiculaire à l'axe (Oy) et situé dans le champ d'interférences.
5. En déduire la relation entre l'interfrange i (période spatiale de variation de l'énergie transportée), l'angle θ et la longueur d'onde λ de la lumière.

7. Réflexions obliques

On considère une onde électromagétique dans le vide qui arrive avec l'angle d'incidence θ sur un miroir plan formé par un conducteur parfait, voir le schéma de la figure 2. L'onde incidente est une onde plane progressive sinusoïdale de pulsation ω polarisée dans le plan d'incidence. On note E_0 l'amplitude du champ électrique de cette onde caractérisée par un champ électrique $\vec{E}_i$ et un vecteur d'onde $\vec{k}_i$. Le miroir plan est d'assez grande dimension pour ne pas considérer les effets de la diffraction.

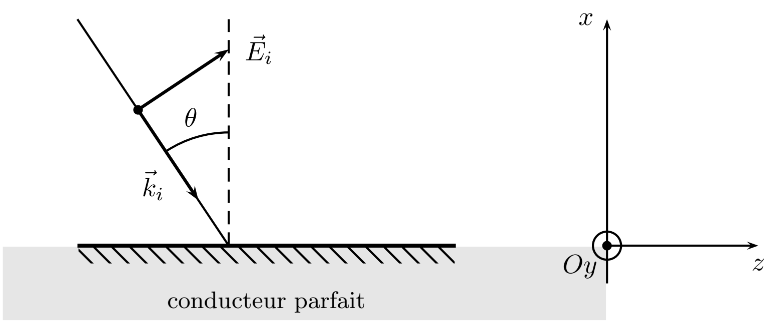

FIGURE 2 – Réflexion sous incidence non nulle d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait

1. Déterminer l'expression du vecteur d'onde de l'onde incidente $\vec{k}_i$ et celle de son champ électrique $\vec{E}_i$.
2. On recherche le vecteur d'onde $\vec{k}_r$ et le champ électrique $\vec{E}_r$ de l'onde réfléchie sous la forme la plus générale $\vec{E}_r = (E_{0rx}\vec{e}_x + E_{0ry}\vec{e}_y + E_{0rz}\vec{e}_z) \exp i(\omega' t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})$ avec $\vec{k}_r = k_{rx}\vec{e}_x + k_{ry}\vec{e}_y + k_{rz}\vec{e}_z$. Déterminer ω' ainsi que toutes les composantes des vecteurs $\vec{k}_r$ et $\vec{E}_r$ en utilisant la relation de passage du champ électrique en $x = 0$.
3. Déterminer l'expression du champ électrique règnant dans le vide.
4. Déterminer l'expression du champ magnétique règnant dans le vide.
5. Existe-t-il une charge surfacique σ et des courants surfaciques $\vec{j}_s$ à la surface du miroir plan en $x = 0$?

6. Déterminer la moyenne temporelle du vecteur de POYNTING dans le vide. Commenter le résultat.
7. On envisage maintenant une onde incidente polarisée rectilignement perpendiculairement au plan d'incidence. Cette onde possède donc un champ électrique $\vec{E} = E_1 f(x,z,t)\vec{e}_y$ où E_1 est son amplitude. Reprendre l'intégralité des questions précédentes.

8. Porte de four à micro-ondes

1. La porte d'un four à micro-ondes présente usuellement un feuille métallique percée d'une multitude de trous disposés selon une structure hexagonale. À quoi sert cette feuille métallique ? À quoi servent les trous ? Pour information, la fréquence des ondes dans le four en fonctionnement est typiquement de 2,5 GHz.

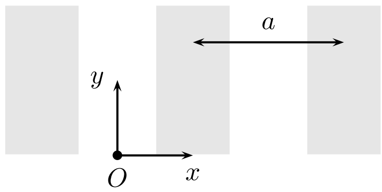

FIGURE 3 – Modélisation simplifiée de la grille

2. Dans la suite de l'exercice, on simplifie la géométrie de la feuille métallique précédente pour faciliter l'étude : on adopte une grille infinie de pas a, contenue dans un plan xOy (voir la figure 3, les bandes sombres correspondent aux bandes métalliques). Le four est situé dans la partie $z < 0$. On suppose connaître le champ électrique en $z = 0^+$ (côté extérieur) sous l'écriture complexe :

$$\underline{\vec{E}}(x,y,z=0^+,t) = \underline{E}_0(x)\,\exp j\omega t\,\vec{e}_y$$

avec $\int_0^a \underline{E}_0(x)\,\mathrm{d}x = 0$ et $\underline{E}_0(x) = \underline{E}_{0,\mathrm{amp}} + \sum_{n=1}^{\infty} \underline{E}_{n,\mathrm{amp}}\,\cos(K_n\,x)$

Justifier autant que possible et sans calcul ce choix d'écriture de la fonction $\underline{E}_0(x)$. Préciser l'expression de K_n (positif) en fonction de n et a, ainsi que la valeur de $\underline{E}_{0,\mathrm{amp}}$.

3. On veut trouver comment chaque terme de la décomposition précédente évolue en dehors de la porte, dans le demi-espace $z > 0$. On cherche pour cela, pour le n-ième terme, une solution de la forme :

$$\underline{\vec{E}}_n(x,y,z,t) = \underline{F}_n(z)\,\cos(K_n\,x)\,\exp j\omega t\,\vec{e}_y$$

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $\underline{F}_n(z)$. Écrire la condition sur le pas a pour que le champ s'atténue lorsque l'on s'éloigne de la porte. Déterminer alors $\underline{F}_n(z)$ et faire apparaître une distance caractéristique d'atténuation d_n. Comment s'appelle ce type d'onde ?

4. Calculer le champ magnétique complexe associé $\underline{\vec{B}}_n(x,y,z,t)$, puis le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}_n(x,y,z,t)$ et, enfin, sa valeur moyenne. On pourra poser $\underline{E}_{n,\mathrm{amp}} = E_{n,\mathrm{amp}}\,\exp j\varphi_n$. Commenter le dernier résultat obtenu.
5. Calculer numériquement, pour un pas $a = 2\,\mathrm{mm}$, la distance caractéristique sur laquelle le champ électromagnétique est présent à l'extérieur du four. Jugez-vous suffisant de rajouter une vitre en plastique d'un centimètre d'épaisseur sur la grille du côté $z > 0$?

9. Réflexion sur un miroir mobile et effet Doppler

Une plaque métallique parfaitement conductrice, plane et perpendiculaire à (Ox), se déplace à la vitesse constante $\vec{v} = v\,\vec{e}_x$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen ($v > 0$). Elle coïncide à l'instant t avec le plan d'équation $x = v\,t$. Une onde électromagnétique de champ électrique $\vec{E}_i$ se réfléchit sur cette surface, le champ électrique de l'onde réfléchie étant $\vec{E}_r$. On suppose que :

$$\vec{E}_i(x,t) = E_0\,\cos\left[\omega_i\left(t - \frac{x}{c}\right)\right]\,\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \vec{E}_r(x,t) = E_r\,\cos\left[\omega_r\left(t + \frac{x}{c}\right)\right]\,\vec{e}_z$$

1. Pour exprimer la réflexion de l'onde et vérifier les conditions aux limites, il convient d'étudier la réflexion dans le référentiel $\mathcal{R}'$ dans lequel la plaque est immobile. On indique que, dans la limite de la physique non relativiste admise pour la suite, la transformation du champ électromagnétique par changement de référentiel galiléen est :

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v_e} \wedge \vec{B} \qquad \text{et} \qquad \vec{B}' = \vec{B}$$

en notant $(\vec{E},\vec{B})$ un champ électromagnétique dans le référentiel $\mathcal{R}$ et $(\vec{E}',\vec{B}')$ celui correspondant dans le référentiel $\mathcal{R}'$ de vitesse $\vec{v_e}$ de translation par rapport à $\mathcal{R}$.

2. Exprimer $\vec{B_i}$ en fonction de E_0, c, ω_i, t et x, puis $\vec{E_i}'$ en fonction de E_0, c, ω_i, t, x et v.
3. Exprimer $\vec{E_r}'$ en fonction de E_r, c, ω_r, t, x et v.
4. À la surface de la plaque, le champ électrique total doit être orthogonal à la plaque. En déduire ω_r en fonction de ω_i, v et c.
5. Donner E_r en fonction de E_0, v et c.
6. Soit $R = \frac{\langle\vec{\Pi_r}\rangle.(-\vec{e_x})}{\langle\vec{\Pi_i}\rangle.\vec{e_x}}$ où $\langle\vec{\Pi_i}\rangle$ et $\langle\vec{\Pi_r}\rangle$ sont les valeurs moyennes respectives des vecteurs de Poynting des ondes incidente et réfléchie. Donner la signification physique de R. Exprimer R en fonction de v et c. Comment expliquez-vous le fait que $R < 1$?

10. Réception d'onde par un cadre

Un émetteur de puissance moyenne $\mathcal{P}_m = 3\,\text{kW}$ émet des ondes électromagnétiques monochromatiques de fréquence $\nu = 1\,\text{MHz}$ de manière isotrope dans tout l'espace. À une distance $r = 50\,\text{km}$ de l'émetteur, on place un cadre de réception plan carré de côté $a = 20\,\text{cm}$ sur lequel on a enroulé $N = 100$ spires de fil conducteur. Soit U la fem qui apparaît aux bornes A et B du cadre supposées très proches. On cherche à obtenir une valeur efficace U_{eff} de U la plus grande possible.

1. Déterminer l'orientation du cadre ainsi que la valeur correspondante de U_{eff} (on considèrera une polarisation rectiligne de l'onde incidente).

11. Pression de radiation

Une onde plane progressive monochromatique polarisée rectilignement arrive sur une surface plane séparant le vide d'un métal assimilé à un milieu conducteur parfait (champ électromagnétique interne nul). L'onde incidente fait un angle θ avec la normale à la surface et la polarisation rectiligne est orthogonale au plan d'incidence.

1. Calculer les caractéristiques de l'onde réfléchie. En déduire la densité surfacique de courant $\vec{j_s}$ et la densité surfacique de charges σ apparaissant à la surface du conducteur.
2. On admet que l'onde exerce une pression électrique dirigée vers l'extérieur du conducteur valant $\sigma^2/(2\epsilon_0)$ et une pression magnétique dirigée vers l'intérieur valant $\mu_0\, j_s^2/2$. Calculer la pression moyenne, appelée pression de radiation, qu'exerce l'onde sur le conducteur.
3. Retrouver ce résultat (admis indépendant de l'état de polarisation de l'onde incidente) à partir de la notion de photons, en faisant comme si ils rebondissaient comme des billes en conservant leur fréquence.
4. Une bille d'aluminium est placée dans un faisceau laser homogène (puissance $1\,\text{W}$, section $1\,\text{mm}^2$) se propageant suivant la verticale ascendante. Estimer l'ordre de grandeur du rayon de la bille pour qu'elle soit en lévitation dans le faisceau. En pratique, qu'est-ce qui limite le phénomène ?

C. Ondes dans les milieux matériels

12. Champs dans un câble coaxial

Dans un câble coaxial d'axe (Oz), de rayons intérieur R_1 et extérieur $R_2 > R_1$, on étudie la propagation d'une onde de champ électrique $\vec{E} = E(r)\exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right]\vec{e}_r$, en coordonnées cylindriques, dans l'espace inter-armatures.
Le métal des armatures sera assimilé à un conducteur parfait, d'épaisseur de peau nulle : le champ électrique y est donc identiquement nul.

1. Par application du théorème de Gauss, déterminer $E(r)$. On posera $E(r = R_1) = E_0\exp\left[i\left(\omega t - kz\right)\right]$.
2. Déterminer les charges surfaciques portées par les armatures.
3. Par application de l'équation de Maxwell-Faraday, déterminer le champ magnétique. On négligera toute composante continue de ce champ.
4. Déterminer les courants surfaciques portés par les armatures.
5. Relier ω et k ; commenter.
6. Déterminer la moyenne temporelle de l'énergie électromagnétique volumique contenue dans le câble.
7. Déterminer le vecteur de Poynting et sa valeur moyenne.
8. Déduire des deux relations précédentes la vitesse de transport de l'énergie dans le câble. Commenter.

13. Réflexion sur un plasma

Un plasma comportant n électrons libres (masse m, charge $-e$) par unité de volume est caractérisé par la conductivité complexe $\gamma = -i\dfrac{ne^2}{m\omega}$ lorsqu'il est parcouru par une onde de champ électrique $\vec{E} = E_0\vec{e}_y \exp[i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$. Ce plasma occupe le demi-espace $z > 0$; la région $z < 0$ est vide. On admet que le plan $z = 0$ ne comporte aucun courant.

1. Établir l'équation de dispersion pour l'onde qui se propage dans le plasma.
2. Une onde de vecteur d'onde $\vec{k}_i$ se dirige du vide vers la surface $z = 0$ qu'elle atteint sous l'incidence θ. Son champ électrique est de la forme $\vec{E}_i = E_0\vec{e}_y \exp[i(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})]$. Montrer l'existence d'une onde réfléchie, et déterminer ses caractéristiques. On étudiera les divers cas possibles.

14. Ionosphère

La haute atmosphère de la Terre est partiellement ionisée (dans la zone dite ionosphère) et se présente sous forme d'ions positifs et d'électrons, à raison de $n = 10^{12}\,\text{m}^{-3}$ électrons par unité de volume.

1. Montrer que la conduction ionique est négligeable devant la conduction électronique. Pour cela, on établira l'expression de la vitesse et de la conductivité correspondant aux ions et aux électrons. On montrera qu'on peut négliger les forces magnétiques devant les forces électriques, si le plasma est peu dense.

   On considère la propagation d'ondes planes :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \qquad \text{et} \qquad \vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

2. Déterminer l'équation de dispersion pour la propagation d'une onde plane dans ce milieu.
3. Déterminer la vitesse de phase, la vitesse de groupe et la fréquence de coupure f_0 de l'onde.
4. A.N. : Déterminer la fréquence de coupure, déterminer l'écart relatif entre la vitesse de groupe de l'onde et la vitesse correspondante dans le vide, pour une onde de fréquence égale à $100\,\text{MHz}$.
5. On suppose $f > f_0$. Calculer le vecteur de Poynting moyen. On fera l'hypothèse d'une vibration rectiligne.
6. Déterminer aussi la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique u. Déterminer enfin la densité volumique moyenne d'énergie cinétique des électrons e_c.
7. Comparer vitesse de l'énergie et vitesse de groupe.

   On s'intéresse maintenant à des ondes électromagnétiques provenant d'une nébuleuse située à 4 000 années-lumière de la Terre. On mesure le retard $\tau = 0,1\,\text{s}$ d'une onde de longueur d'onde $\lambda_1 = 1\,\text{m}$ que cette onde met à nous parvenir par rapport à une autre onde de longueur d'onde $\lambda_2 = 1\,\text{cm}$. Pour interpréter ce fait, on tient compte de l'existence d'un plasma intersidéral de densité volumique d'électrons et de protons de valeur n.

8. Déterminer un ordre de grandeur de n. Que pensez-vous du résultat sachant que la pression du "vide" intersidéral est d'environ 10^{-21} bar ?

15. Gaz interstellaire et effet Faraday

On étudie un gaz interstellaire, plasma formé d'atomes d'hydrogène partiellement ionisés, dans lequel règne un champ magnétique statique, uniforme et constant, de norme B_1, colinéaire à (Oz). On considère une oppm se propageant dans ce milieu dans la direction du champ magnétique :

$$\vec{E} = \vec{E}_0\ \exp\Big[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\Big] \qquad \vec{B} = B_1\,\vec{e}_z + \vec{B}_0\ \exp\Big[i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})\Big] \qquad \vec{k} = k\,\vec{e}_z$$

On appelle n la densité volumique commune des électrons et des protons.

1. Montrer que l'onde est transverse.
2. Établir l'équation simplifiée du mouvement des électrons. Montrer que $[M]\,\vec{j} = \vec{E}$ où $[M]$ désigne une matrice complexe 3x3 que l'on déterminera en fonction de ω, ε_0 et des pulsations cyclotron $\omega_c = \dfrac{eB_1}{m}$ et de plasma $\omega_p = \sqrt{\dfrac{ne^2}{m\varepsilon_0}}$.
3. Établir l'équation de dispersion et la vitesse de phase pour une onde polarisée circulairement à droite ($\underline{E}_y = i\,\underline{E}_x$), puis à gauche ($\underline{E}_y = -i\,\underline{E}_x$).

4. On envoie dans ce milieu, venant du vide, une onde qui est initialement polarisée rectilignement et qui traverse ce milieu sur une longueur L avant de repasser dans le vide. Décrire l'onde obtenue au bout de ce parcours en la caractérisant à l'aide de L et des caractéristiques du plasma.

D. Guides et cavités

16. Onde guidée entre deux plans conducteurs

Dans le vide situé entre deux plans métalliques infinis parfaitement conducteurs distants de a (plans $x = \pm a/2$), on étudie la propagation le long de l'axe Oz d'une onde électromagnétique dont le champ électrique est polarisé parallèlement aux plans métalliques :

$$\vec{E} = E_0 f(x) \cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

1. Exprimer le champ magnétique de l'onde.
2. Déterminer les formes possibles de la fonction f. On fera apparaître un nombre entier n (numéro du mode de propagation), qui sera choisi de sorte que la fonction f s'annule $n-1$ fois entre les deux plans. On pourra aussi choisir f de sorte que son maximum $\mathrm{Max}(f)$ soit égal à 1 dans l'intervalle $[-a/2; a/2]$.
3. Déterminer l'équation de dispersion liant ω et k. Quelle est la vitesse de phase de l'onde ? Commentaire ? Quelle est sa vitesse de groupe $v_g = d\omega/dk$?
4. Quelle est la puissance moyenne transportée par l'onde, pour une longueur unité le long de l'axe Oy ? Quelle est la densité volumique moyenne d'énergie électromagnétique entre les deux plans métalliques ? En déduire la vitesse de propagation de l'énergie électromagnétique. Commentaire ?

17. Cavité résonante et circuit résonant LC

Une cavité parallélépipédique est définie par :

$$0 \leq x \leq a \quad ; \quad 0 \leq y \leq b \quad ; \quad 0 \leq z \leq c$$

Elle est vide et délimitée par des plans parfaitement conducteurs. Un générateur de haute fréquence entretient dans cette cavité une onde électromagnétique sinusoïdale de pulsation ω.

1. Montrer que le champ électrique suivant est solution de l'équation d'onde pourvu que la pulsation ait une valeur que l'on déterminera.

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_z \sin\frac{\pi x}{a} \sin\frac{\pi y}{b} \exp -i\omega t$$

2. Quel est le champ magnétique associé ?
3. Calculer la moyenne spatiale de l'énergie volumique électrique, puis de l'énergie volumique magnétique. Montrer que l'énergie électromagnétique volumique est constante en moyenne et qu'elle oscille périodiquement entre sa forme électrique et sa forme magnétique.
4. Calculer la charge surfacique sur les parois et montrer que la cavité se comporte comme un condensateur plan dont on évaluera la charge. Déduire de l'énergie la valeur de sa capacité.
5. En s'appuyant sur une analogie avec un circuit résonant LC, trouver le coefficient d'auto-inductance de cette cavité. Expliquer son origine physique.