Exercices : 27 - Rayonnement dipolaire

1. Puissance d'une antenne

Une antenne rectiligne verticale est représentée par un dipôle oscillant vertical, situé au niveau du sol. On assimile l'air au vide sur le plan de la propagation des ondes électromagnétiques. L'antenne rayonne un champ électromagnétique de pulsation ω et de vecteur d'onde $k = \omega/c$. L'onde rayonnée est sphérique, son champ électrique en un point M de l'espace repéré par les coordonnées sphériques (r, θ, φ) est donné par l'expression :

$$\vec{E} = \frac{A}{r} \sin\theta \, \cos(\omega t - kr) \, \vec{e}_\theta$$

On donne l'expression du rotationnel en coordonnées sphériques :

$$\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{A} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$

1. Quels commentaires pouvez-vous faire sur l'expression du champ électrique précédent ?
2. Déterminer l'expression du champ magnétique $\vec{B}$ transporté par l'onde.
3. L'antenne rayonne une puissance $P = 200\,\mathrm{W}$ uniquement dans l'air. On considère un point M au niveau de la surface de la Terre à une distance $d = 1\,\mathrm{km}$. Quelle est l'amplitude du champ électrique en M ?

2. Puissance de Larmor

La puissance de Larmor correspond à la puissance rayonnée par une particule de charge q, d'accélération a. Parmi les formules suivantes, où c est la célérité de la lumière dans le vide, ε_0 la permittivité diélectrique du vide, laquelle peut correspondre à cette puissance ?

Proposition de réponses :

a) $\dfrac{q^4a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$ b) $\dfrac{q^4a^2}{6\pi\varepsilon_0^2 c^3}$ c) $\dfrac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}$ d) $\dfrac{q^2a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^2}$

3. Influence de la foudre

Un dipôle élémentaire placé en M produit les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ en un point A situé à la distance r dans une direction perpendiculaire à son moment dipolaire $\delta\vec{p}(t)$. Les champs sont donnés avec les notations habituelles des coordonnées sphériques, par les deux expressions ci-dessous. On notera que la dérivée $\delta\dot{\vec{p}}(t)$ doit être évaluée, à l'instant t et à la distance r, pour la valeur $u = t - \dfrac{r}{c}$ de l'argument :

$$\delta\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}(\delta p + \frac{r}{c}\delta\dot{p} + \frac{r^2}{c^2}\delta\ddot{p})\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2}(\delta\dot{p} + \frac{r}{c}\delta\ddot{p})\vec{e}_\varphi$$

1. Quel est le sens physique du remplacement de $\delta p(t)$ par $\delta p(t - r/c)$?
2. Dans une région de l'espace, à définir, les champs produits par un dipôle élémentaire $\delta p(t)$ dirigé selon Oz s'expriment par :

$$\delta\vec{E} = \frac{\delta p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\vec{e}_\theta \qquad \text{et} \qquad \delta\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} I dz \vec{e}_\varphi$$

   Commenter ces résultats.
3. Calculer l'ordre de grandeur du champ magnétique créé par un courant de crête (lors d'un coup de foudre) de $10^5\,\mathrm{A}$ circulant dans un élément de longueur de $1\,\mathrm{m}$ à une distance de $100\,\mathrm{m}$. Faire une comparaison intelligente.
4. Donner l'expression des champs rayonnés à très grande distance ($r \gg \lambda$). Commenter. On exprimera en particulier le rapport E/cB.

   On considère un point A situé très loin d'une antenne de hauteur H. On tient maintenant compte de la répartition du courant de foudre le long de la hauteur z de l'éclair de foudre. Chaque dipôle élémentaire rayonne une onde plane dans la même direction quasi orthogonale à l'antenne. On peut admettre que l'intensité $I(z,t)$ dans l'antenne est de la forme :

$$I(z,t) = -I_0(1 - \exp(\frac{z - 0,01ct}{c\tau}))$$

   avec $I_0 = 80\,\mathrm{kA}$ et $\tau = 80\,\mu\mathrm{s}$.

5. Calculer les champs électromagnétiques rayonnés par l'antenne de hauteur H.
6. Évaluer à l'instant $t = 40\,\mu s$, la valeur du champ électrique pour $r = 10\,\text{km}$ et $H = 1\,\text{km}$.

4. Radar de veille

Sur l'axe (Ox) on aligne $2N+1$ antennes parallèles à (Oz), équidistantes de a. Chaque antenne (numérotée par k, avec $-N \leqslant k \leqslant N$), de hauteur h, est parcourue par le courant électrique $I_k(P) = I_{m,k}(P)\exp i\omega t$ avec $I_{m,k}(P) = I_0 \exp(-ik\phi_0))$; on pose $\lambda = 2\pi c/\omega$.

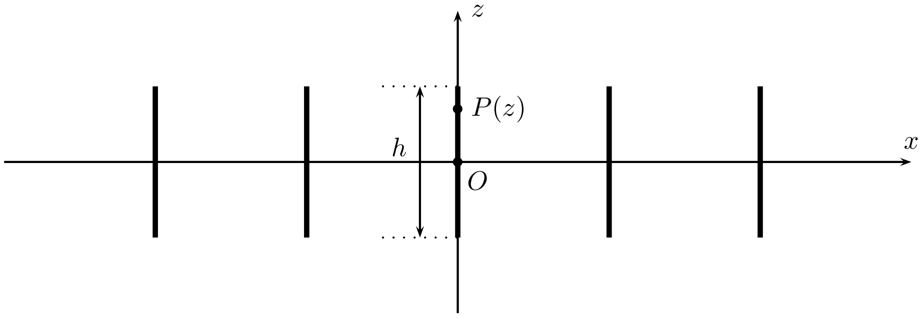

FIGURE 1 – Radar de veille

On rappelle que l'expression du champ électrique élémentaire rayonné par un élément de courant $I_k(P)\mathrm{d}z$ localisé au niveau du point P en un point M du plan (Oxz) repéré par ses coordonnées sphériques $r = OM$, $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$ est :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{i\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r} I_{m,k}(P)\mathrm{d}z \exp i(\omega(t - \frac{PM}{c}))\vec{e}_\theta$$

1. Montrer que $PM \simeq r - z\cos\theta$ dans le cadre de l'approximation dipolaire.
2. Déterminer le champ électrique rayonné en M par l'antenne centrale $k = 0$ en se plaçant dans le cadre de l'approximation dipolaire. Montrer que le rayonnement est maximal dans le plan Oxy.
3. On se place maintenant dans le plan Oxy. On repère le point M entre autres par l'angle traditionnel φ des coordonnées sphériques qui est repéré avec pour origine l'axe Ox. On raisonnera pour les différentes antennes à l'infini dans la direction φ. Montrer que le déphasage entre les champs de deux antennes consécutives est : $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a\cos\varphi - \phi_0$.
4. En déduire l'expression du champ électrique rayonné en M par l'antenne k en fonction du champ rayonné en M par l'antenne $k = 0$.
5. Déterminer le champ électrique total rayonné en M. On posera $F(u) = \dfrac{\sin((2N+1)u/2)}{\sin(u/2)}$.
6. À quelle condition sur φ aura-t-on un maximum d'émission ? Comment choisir a pour que ce maximum soit unique ?
7. Dans les conditions de la question précédente, on impose $\phi_0 = \Omega t$ où $\Omega \ll \omega$. Déterminer le vecteur de Poynting $\vec{R}$, moyenné sur une durée τ vérifiant $2\pi/\omega \ll \tau \ll 2\pi/\Omega$. Conclure.

5. Antenne demi-onde

Une antenne demi-onde est constituée d'un fil rectiligne de longueur $L = \lambda/2$ colinéaire à l'axe (Oz) et de point milieu O origine des espaces. Alimentée par un amplificateur de puissance, elle est parcourue par le courant $i(z,t) = I_0\cos(\pi z/L)\cos(\omega t)$.
On rappelle que l'expression du champ électrique élémentaire rayonné par un élément de courant $I(P)\mathrm{d}z$ localisé au niveau du point P en un point M repéré par ses coordonnées sphériques $r = OM$, $\theta = (\vec{e}_z, \overrightarrow{OM})$ est :

$$\mathrm{d}\vec{E} = \frac{i\omega}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{\sin\theta}{r} I(P)\mathrm{d}z \exp i(\omega(t - \frac{PM}{c}))\vec{e}_\theta$$

1. Exprimer le courant d'antenne en notation complexe $\underline{i}(z,t)$.
2. On souhaite déterminer le champ électrique $\vec{E}(M,t)$ en M dans la zone de rayonnement. Pour ce faire, on considère un élément de courant $\underline{i}(z,t)\,dz\,\vec{e}_z$, au point P de l'antenne à la cote z. Exprimer en fonction de z et de θ, la différence de marche δ entre les ondes rayonnées par P et par O dans la direction définie par (θ,φ) en coordonnées sphériques d'axe Oz.

3. Déterminer en notation complexe, l'expression du champ électrique $\vec{E}(M,t)$ rayonné par l'antenne en M dans la direction (θ,φ). On donne $\displaystyle\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos x \exp(iax)\,dx = 2\frac{\cos\frac{a\pi}{2}}{1-a^2}$.
4. En déduire le champ électrique cherché, $\vec{E}(M,t) = i\mu_0 c I_0 \dfrac{\cos(\frac{\pi}{2}\cos\theta)}{2\pi r\sin\theta}\exp i(\omega t - kr)\vec{e}_\theta$.
5. Donner l'expression du champ magnétique $\vec{B}(M,t)$ rayonné par l'antenne.
6. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{R}(M,t)$ et la moyenne temporelle de sa norme $\langle R\rangle$.
7. Sachant que $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}\cos\theta\right)}{\sin\theta}d\theta = 1,22$, calculer la puissance moyenne P rayonnée par cette antenne.
8. La résistance de rayonnement d'une antenne demi-onde est la grandeur R_a définie par $P = \dfrac{1}{2}R_a I_0^2$ où I_0 est l'intensité au ventre d'intensité de l'antenne. Déterminer R_a pour une antenne demi–onde et justifier la dénomination de résistance de rayonnement. Calculer numériquement R_a.
9. Quelle serait la valeur de l'intensité maximale I_0, pour une antenne demi-onde dont la puissance moyenne de rayonnement est $P = 2100\,\mathrm{kW}$ (puissance de l'émetteur Grande Ondes de France Inter à Allouis) ? Quelle est l'intensité du champ électrique rayonné dans le plan équatorial de cette antenne ($\theta = \pi/2$) à la distance $d = 100\,\mathrm{km}$ de l'antenne ?

6. Antenne en T

On étudie un modèle simplifié d'une antenne en T. Ses deux conducteurs rectilignes et perpendiculaires sont parallèles respectivement aux axes Oy et Oz du repère dont l'origine O est placée sur l'antenne. Le champ électromagnétique qu'elle émet est semblable à celui de deux dipôles oscillants placés en O et de moments dipolaires $\vec{p}_1 = p_0\cos(\omega t)\,\vec{e}_z$ et $\vec{p}_2 = p_0\sin(\omega t)\,\vec{e}_y$. On rappelle que le champ électrique $\vec{E}_1$, créé par le dipôle $\vec{p}_1$ dans sa zone de rayonnement s'écrit, en un point M de coordonnées sphériques r, θ et φ axées par le dipôle :

$$\vec{E}_1(M,t) = -\frac{\mu_0\,\omega^2}{4\pi\,r}\,p_0\,\sin\theta\,\cos(\omega\,t - \omega\,r/c)\,\vec{e}_\theta$$

1. Donner les conditions que doit satisfaire une antenne réceptrice pour que l'on puisse dire qu'elle se trouve dans la zone de rayonnement de l'antenne émettrice. On désignera par a la taille de chaque antenne.
2. L'antenne réceptrice se trouve au point M_1 tel que $\overrightarrow{OM}_1 = x\,\vec{e}_x$ avec $x > 0$. Représenter le champ électromagnétique $(\vec{E}_1,\vec{B}_1)$ au point M_1. Donner l'expression des champs en coordonnées cartésiennes, c'est-à-dire en fonction notamment de x et des vecteurs de base du repère cartésien.
3. Déterminer le champ électromagnétique total $(\vec{E},\vec{B})$ en M_1. Discuter son état de polarisation.
4. Calculer le vecteur de Poynting $\vec{R}$ au point M_1, ainsi que sa moyenne temporelle $\langle\vec{R}\rangle$. Commenter.
5. L'antenne réceptrice est parabolique et on la modélise par un disque de rayon a dans le plan M_1yz. On supposera $a \ll x$. Calculer la puissance électromagnétique moyenne $\langle P\rangle$ reçue par cette antenne.
6. Si l'on prend cette fois un point M_2 tel que $\overrightarrow{OM}_2 = x\,\vec{e}_y$ (même x que pour M_1), quel est l'état de polarisation de l'onde reçue en ce lieu ? Si l'antenne réceptrice précédente est placée en M_2, dans le plan M_2xz, comparer la puissance moyenne $\langle P'\rangle$ reçue à $\langle P\rangle$.

7. Stabilité d'un atome

Un électron de charge $-e = -1,6\times10^{-19}\,\mathrm{C}$ et de masse $m = 9,1\times10^{-31}\,\mathrm{kg}$ est en orbite circulaire de rayon $r_0 = 53\,\mathrm{pm}$ autour d'un proton supposé fixe au point O. Un tel atome constitue à la fois un dipôle électrique rayonnant et un dipôle magnétique rayonnant. Toutefois, on pourrait montrer que le rayonnement dipolaire magnétique est négligeable devant le rayonnement dipolaire électrique.

1. Déterminer la vitesse v_0 et l'énergie E_0 de l'électron. Exprimer aussi son accélération γ_0.
2. Donner l'expression du moment dipolaire électrique $\vec{p}$ et du moment dipolaire magnétique $\vec{m}$ de ce dipôle.
3. Préciser l'état de polarisation du rayonnement émis par l'électron dans le plan de l'orbite d'une part, et sur l'axe de révolution de cette orbite d'autre part.
4. Exprimer la puissance moyenne P_0 émise par l'électron ; en déduire l'énergie perdue par révolution ΔE.
5. Calculer aussi $\Delta E/E$ et la variation $\Delta r/r$ du rayon de l'orbite par tour.
6. Déterminer la loi d'évolution du rayon r de la trajectoire. Calculer la durée de vie τ de ce niveau fondamental ; comparer à la période du mouvement initial ; conclure.

7. Les durées des transitions $2p \hookrightarrow 1s$ et $6h \hookrightarrow 5g$ de l'atome d'hydrogène sont (expérimentalement) mesurées à $\tau_{2p\hookrightarrow 1s} = 1,6\,\mathrm{ns}$ et $\tau_{6h\hookrightarrow 5g} = 0,61\,\mu\mathrm{s}$. Comparer au modèle ci-dessus ; commenter.

8. Durée de vie d'un atome classique

On représente un atome par un noyau immobile de charge $+e$ autour duquel gravite un électron de masse m et de charge $-e$, en orbite circulaire de rayon r.

1. Que vaut l'énergie mécanique d'un électron sur une telle orbite ?
2. L'électron émet-il un rayonnement électromagnétique sur cette orbite ? Quelles approximations peut-on alors mener : on proposera des ordres de grandeurs concernant les atomes des sources visibles que l'on utilise et on se contentera des ordres de grandeurs ? Écrire la puissance rayonnée sachant qu'elle est donnée par $P_{ray} = \dfrac{1}{6\pi\varepsilon_0}\dfrac{e^2\gamma^2}{c^3}$ où γ est l'accélération de la particule chargée.
3. Écrire le théorème de la puissance cinétique. Trouver l'évolution du rayon de l'orbite de l'électron en supposant que, pendant une révolution, le rayon de l'orbite ne varie que peu. Application numérique.
4. Où est l'erreur ? Citer un autre exemple d'incompatibilité entre la mécanique classique et le comportement de l'atome.

9. Rayonnement d'un électron diffusé

Un électron de masse m, de charge $-q$ et de position repérée par le point mobile M se rapproche d'un proton supposé immobile en un point O. L'électron, de vitesse initiale $\vec{v}_0$, est dévié en suivant une trajectoire hyperbolique d'équation polaire :

$$OM = \rho(\theta) = \frac{\delta}{1 + e\,\cos\theta}$$

Une étude mécanique (non demandée) permet de montrer que le paramètre δ et l'excentricité e sont donnés par les relations :

$$\delta = \frac{{v_0}^2\,d^2}{c^2\,b} \qquad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{\delta^2}{d^2}}$$

où d désigne le paramètre d'impact (voir la figure 2), c est la célérité de la lumière dans le vide et b est une longueur caractéristique telle que $m\,c^2 = q^2/(4\pi\varepsilon_0\,b)$ (avec ε_0 la permittivité du vide). On donne $v_0/c = 1{,}0.10^{-2}$, $d = 2{,}8.10^{-11}\,\mathrm{m}$ et $d/b = 1{,}0.10^4$.

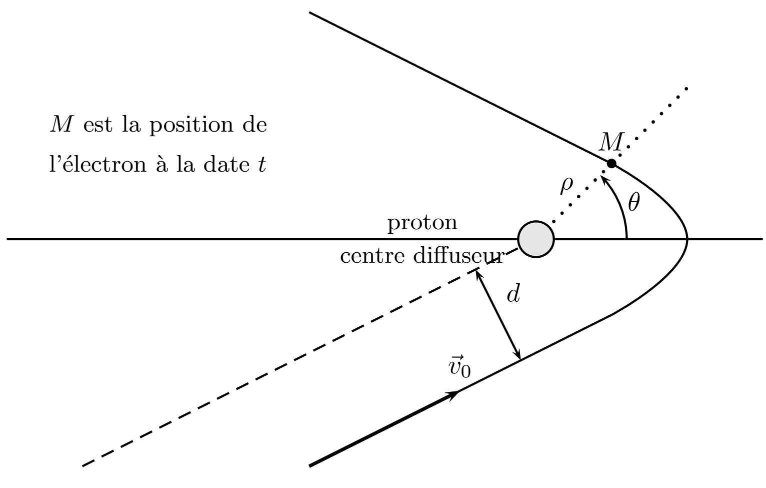

FIGURE 2 – Trajectoire d'un électron diffusé par un proton

1. Calculer l'excentricité e et les angles polaires $\theta_M > 0$ et $-\theta_M$ des asymptotes.
2. Au cours de la diffusion de l'électron par le proton, l'ensemble des deux constitue un dipôle rayonnant. On suppose, en première approximation, que ce rayonnement ne modifie par le mouvement précédent de l'électron. On rappelle l'expression du champ électromagnétique rayonné en un point P éloigné par un dipôle d'origine O et de moment dipolaire $\vec{p}$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\ddot{\vec{p}}(t - r/c) \wedge \vec{e}_r}{r\,c}$$

avec $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\vec{e}_r$.

(a) Établir l'expression de la puissance rayonnée par le dipôle à travers une sphère de rayon R (suffisamment grand) en fonction de ε_0, c et $\ddot{\vec{p}}(t - R/c)$.

(b) En déduire que, pour l'électron diffusé, cette puissance s'écrit :

$$P(R,t) = \frac{2}{3}\,m\,c^2\,\frac{b^3\,c}{\rho^4}$$

où ρ est pris à l'instant $t - R/c$.

3. L'expression de $P(R,t)$, comme celle du champ électromagnétique précédent, n'est valable que si R est notamment très supérieur à l'extension spatiale du dipôle.

(a) Expliquer brièvement pourquoi, dès que R est très supérieur à d, on peut néanmoins calculer l'énergie totale rayonnée E_R au cours du mouvement par l'intégrale :

$$E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} P(R,t)\,\mathrm{d}t$$

En déduire l'expression du rapport K de l'énergie totale rayonnée E_R sur l'énergie cinétique initiale de l'électron en fonction de d, b, v_0, c et de l'intégrale I définie par :

$$I = \int_{-\theta_M}^{\theta_M} (1 + e\,\cos\theta)^2\,\mathrm{d}\theta$$

(b) Calculer I et K avec les données numériques fournies. Conclure.

10. Rayonnement d'un dipôle électrique tournant

Un dipôle électrique variable $\vec{p}(t)$ situé en O rayonne, à grande distance r, un champ électromagnétique

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi\,r}\left(\ddot{\vec{p}}^* \wedge \vec{u}\right) \wedge \vec{u} \qquad \vec{B}(\vec{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi\,r\,c}\left(\ddot{\vec{p}}^* \wedge \vec{u}\right)$$

où $\ddot{\vec{p}}^* = \dfrac{\mathrm{d}^2\vec{p}}{\mathrm{d}t^2}(t^*)$ avec $t^* = t - \dfrac{r}{c}$ et $\vec{r} = r\,\vec{u}$. Le dipôle considéré (en O) est un dipôle tournant dans le plan Oxy avec $p_x = p_0\,\cos\omega\,t$, $p_y = p_0\,\sin\omega\,t$ et $p_z = 0$. Voir la figure 3.

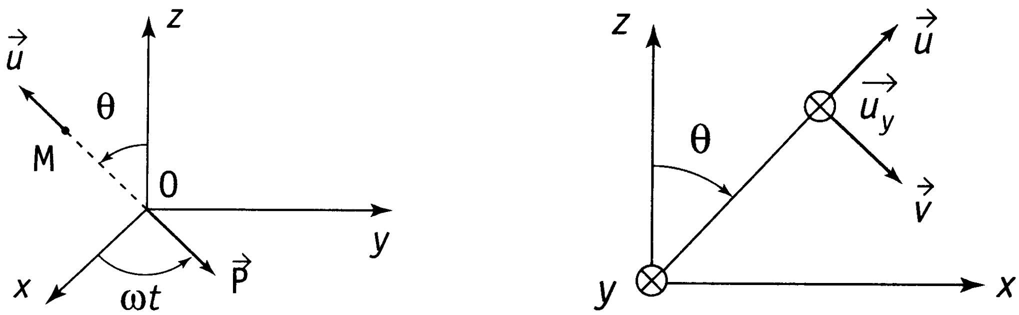

FIGURE 3 – Dipôle électrique tournant

1. Calculer les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ rayonnés en un point M du plan Oxz, repéré par r et θ, en explicitant leurs composantes dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{u_y})$. Quelle remarque peut-on faire ?
2. Décrire la polarisation du champ rayonné pour θ variant de 0 à π.
3. Fournir l'indicatrice de rayonnement de ce dipôle tournant et la comparer à celle d'un dipôle rayonnant en O fixe et selon $\vec{u_y}$.
4. Quelle est la puissance moyenne rayonnée par le dipôle tournant ?

11. Rayonnement d'un dipôle magnétique oscillant

Soit un dipôle magnétique oscillant (pulsation ω), placé en un point O fixe, dont le moment dipolaire est $\vec{M}(t) = M_0 \cos(\omega t)\,\vec{e_z}$ où M_0 est une constante, tout comme le vecteur unitaire $\vec{e_z}$. On raisonne dans un système de coordonnées sphériques d'axe (Oz).

1. Si l'on suppose le dipôle magnétique réalisé par une petite spire circulaire de courant (rayon a, courant $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$), proposer une disposition cohérente de celle-ci et l'expression à adopter pour M_0 en fonction de I_0 et a.
2. On admet que le dipôle magnétique produit dans sa zone de rayonnement un champ électromagnétique dont les expressions sont, avec $k = \omega/c$:

$$\frac{\mu_0\, M_0\, \omega^2\, \sin\theta}{4\pi\, r\, c} \cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\varphi} \qquad \text{et} \qquad -\frac{\mu_0\, M_0\, \omega^2\, \sin\theta}{4\pi\, r\, c^2} \cos(\omega t - kr)\,\vec{e_\theta}$$

   Identifier le champ électrique et le champ magnétique en donnant le plus possible d'arguments pour justifier la réponse.
3. Commenter la structure du champ électromagnétique rayonné et la comparer à celle du champ rayonné par un dipôle électrique oscillant de la forme $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\,\vec{e_z}$.
4. Quelle est la puissance moyenne rayonnée dans l'espace par le dipôle magnétique oscillant ?
5. En utilisant le modèle planétaire d'un atome d'hydrogène où l'électron décrit une trajectoire circulaire de rayon $a = 53\,\text{pm}$ à la vitesse $v = c/137$ (orbitale $1s$), évaluer les ordres de grandeurs des moments dipolaires électrique ou magnétique d'un atome. Comparer alors les importances respectives des rayonnements de ces deux types de dipôles, à fréquence d'oscillation identique (on rappelle que la puissance moyenne rayonnée dipolaire électrique est $\frac{\omega^4\, {p_0}^2}{12\,\pi\,\epsilon_0\, c^3}$).