

Exercices : 27 - Rayonnement dipolaire

— Solutions —

1. Puissance d'une antenne

Réponses : l'antenne est invariante par rotation d'angle φ , E_θ ne dépend pas de φ , l'amplitude du champ diminue en $1/r$ traduisant la dilution de l'énergie pour l'onde sphérique qui diverge depuis l'antenne, l'émission n'est pas isotrope, il y a une dépendance en θ , enfin le terme $(\omega t - kr)$ représente la propagation de l'onde à la vitesse $c = \omega/k$. On a $\vec{r} \otimes \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, avec le formulaire, on obtient $\vec{B} = \frac{A}{r} \sin \theta \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$. Le vecteur de POYNTING est $\vec{\Pi} = \frac{A^2}{\mu_0 c r^2} \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - kr) \vec{e}_r$ et sa moyenne $\langle \vec{\Pi} \rangle_t = \frac{A^2}{2\mu_0 c r^2} \sin^2 \theta \vec{e}_r$. La puissance rayonnée correspond à l'intégrale sur l'hémisphère passant par M du flux de la moyenne du vecteur de POYNTING. Avec $r = d$ et $\theta = \pi/2$, on trouve $P = \frac{2\pi}{3\mu_0 c} A^2$, on trouve $A = \sqrt{\frac{3\mu_0 c}{2\pi} P}$ puis $E_{amp}(M) = \frac{1}{d} \sqrt{\frac{3\mu_0 c}{2\pi} P}$. On trouve $E = 0, 2 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

2. Puissance de Larmor

Réponses : $\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$ est un champ électrique donc $\frac{1}{2}\epsilon_0 \vec{E}^2 = \frac{q^2}{32\pi^2 \epsilon_0 r^4}$, cela fait que $\frac{q^2}{\epsilon_0 r^4}$ est en $\text{J} \cdot \text{m}^{-3}$. Si l'on multiplie par une longueur à la puissance 4 comme r^4 , on obtient $\frac{q^2}{\epsilon_0}$ qui est en $\text{J} \cdot \text{m}$. On multiplie par une accélération au carré a^2 qui est en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-4}$. on arrive à une expression $\frac{q^2 a^2}{\epsilon_0}$ qui est en $\text{J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-4} = \text{W} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{s}^{-3}$. Il ne reste plus qu'à diviser par une vitesse au cube, en l'occurrence c^3 , pour que l'on obtienne $\frac{q^2 a^2}{\epsilon_0 c^3}$ qui est une puissance en W . La bonne formule correspond à la réponse c).

3. Influence de la foudre

Réponses : Potentiels retardés, temps de propagation de M en A , zone très proche $r \ll \lambda$ qualifiée de zone *statique* où on néglige le retard, $\delta B \simeq 10^{-6} \text{ T}$ inférieur à $B_{\text{terrestre}} \simeq 2 \times 10^{-5} \text{ T}$, $\delta \vec{E} = \frac{\delta \ddot{p}}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \vec{e}_\theta$, $\delta \vec{B} = \frac{\mu_0 \delta \dot{p}}{4\pi r c} \vec{e}_\varphi$, $E/cB = 1$ structure d'onde plane, $\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r c} \int_0^H \left(\frac{dI}{dt}\right)_{t-r/c} dz \vec{e}_\varphi$, $\vec{E} = \frac{E}{c} \vec{e}_\varphi$, $\vec{E} = -\frac{0,01 I_0}{4\pi\epsilon_0 c r} \exp\left(-\frac{0,01 t}{\tau} + \frac{0,01 r}{c\tau}\right) [\exp\left(\frac{H}{c\tau}\right) - 1] \vec{e}_\theta$, $E \simeq 0, 1 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$ faible.

4. Radar de veille

Réponses : $PM^2 = (\vec{OM} - \vec{OP})^2 = r^2 - 2rOP \cos \theta$ d'où $PM \simeq r - z \cos \theta$, $\vec{E}_{k=0} = i \frac{I_0}{2\epsilon_0 c} \frac{h \sin \theta}{\lambda} \text{sinc} \frac{\pi h \cos \theta}{\lambda} \exp i\omega(t - \frac{r}{c}) \vec{e}_\theta$, rayonnement maximal en $\theta = \pi/2$, $\phi = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos \varphi - \phi_0$, $\vec{E}_k = \vec{E}_{k=0} \exp ik(\frac{2\pi}{\lambda} a \cos \varphi - \phi_0)$, $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_{k=0} F(u)$ avec $u = \frac{2\pi}{\lambda} a \cos \varphi - \phi_0$, les maxima principaux sont obtenus pour $u = m2\pi$ avec m entier donc $\cos \varphi = m \frac{\lambda}{a} + \frac{\phi_0}{2\pi} \frac{\lambda}{a}$ ou encore $-\frac{a}{\lambda} - \frac{\phi_0}{2\pi} \leq m \leq \frac{a}{\lambda} - \frac{\phi_0}{2\pi}$, maximum unique pour $\frac{1}{2} < \frac{a}{\lambda} < 1$, $\vec{R} = \frac{I_0^2}{4\epsilon_0 c} \frac{h^2}{\lambda^2} F^2(u) \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$, le maximum unique tourne dans le plan Oxy à la vitesse Ω .

5. Antenne demi-onde

Réponses : $\vec{i}(z, t) = I_0 \cos(\pi z/L) \exp(i\omega t)$, $\delta = z \cos \theta$, $\vec{E} = \vec{e}_\theta \frac{i\omega I_0}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{\sin \theta}{r} \exp i(\omega(t - \frac{r}{c})) \int_{-L/2}^{L/2} \exp i\frac{\omega}{c} z \cos \theta \cos \frac{\pi z}{L} dz$, $\vec{E} = i\mu_0 c I_0 \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{2\pi r \sin \theta} \exp i(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$, $\vec{B} = \frac{E}{c} \vec{e}_\varphi$, $\langle \vec{R} \rangle = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2 r^2 \sin^2 \theta} \cos^2(\frac{\pi}{2} \cos \theta) \vec{e}_r$, $P = \iint \langle \vec{R} \rangle r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, $P = \frac{\mu_0 c I_0^2}{4\pi} 1, 22$, $R_a = \frac{1,22\mu_0 c}{2\pi} = \frac{1,22}{2\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 73 \Omega$, $I_0 = 240 \text{ A}$, $E = 0, 144 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$.

6. Antenne en T

Réponses : l'antenne réceptrice se trouve dans la zone de rayonnement si tout point A' de cette antenne se trouve à une distance AA' de tout point A de l'antenne émettrice telle que $AA' \gg a$ et $AA' \gg \lambda$ où λ est la longueur d'onde de l'onde émise. La première condition est celle d'approximation dipolaire et la seconde est celle de zone de rayonnement. L'onde rayonnée par le dipôle \vec{p}_1 est, comme vu en cours, localement plane et vérifie la relation de structure locale $\vec{B}_1(M, t) = \frac{\vec{e}_r \wedge \vec{E}_1(M, t)}{c}$ donc $\vec{B}_1(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} p_0 \sin \theta \cos(\omega t - \omega r/c) \vec{e}_\varphi$. Le point M_1 a pour coordonnées sphériques ($r = x, \theta = \pi/2, \varphi = 0$), vis-à-vis du dipôle \vec{p}_1 , et la base locale en ce point est ($\vec{e}_r = \vec{e}_x, \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi = \vec{e}_y$). Ainsi, le champ électromagnétique en M_1 est $\vec{E}_1(M_1, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \cos(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_z$ et $\vec{B}_1(M_1, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 \cos(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_y$. Les directions des champs sont conformes aux symétries de la source dipolaire \vec{p}_1 : le champ électrique en M_1 est orthogonal au plan M_1xy d'antisymétrie de la source et le champ magnétique en M_1 est orthogonal au plan M_1xz qui est de symétrie de la source ! Commençons par déterminer le champ produit par le dipôle \vec{p}_2 dans la zone de rayonnement. Une façon de faire consiste à expliciter d'abord le champ magnétique précédent du dipôle \vec{p}_1 de façon vectorielle : $\vec{B}_1(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} \vec{p}_1(t - r/c) \wedge \vec{e}_r$. Par analogie, on déduit le champ magnétique rayonné par le dipôle \vec{p}_2 , $\vec{B}_2(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r c} \vec{p}_2(t - r/c) \wedge \vec{e}_r$ et, par relation de structure locale, le champ électrique associé est $\vec{E}_2(M, t) = -\frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi r} (\vec{p}_2(t - r/c) \wedge \vec{e}_r) \wedge \vec{e}_r$. On

explicité ces champs au point M_1 , d'où $\vec{E}_2(M_1, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \sin(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_y$ et $\vec{B}_2(M_1, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 \sin(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_z$. On vérifie que les directions de ces champs sont cohérentes avec les symétries de la source \vec{p}_2 (même principe qu'à la question précédente). Par théorème de superposition (problème linéaire), on déduit le champ électromagnétique total en M_1 : $\vec{E}(M_1, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 [\sin(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_y + \cos(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_z]$ et $\vec{B}(M_1, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 [-\cos(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_y + \sin(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_z]$. Au point M_1 , la propagation de l'onde rayonnée s'effectue dans la direction et le sens de l'axe Ox . On voit que les composantes du champ électrique sont déphasées de $\pi/2$ l'une par rapport à l'autre (quadrature) et leurs amplitudes sont identiques : le champ électrique tourne donc avec sa pointe décrivant un cercle et on parle d'état de polarisation circulaire droite (la rotation se faisant dans le sens horaire quand on regarde l'onde venir vers soi). En fait, l'état de polarisation est une image de la rotation du dipôle source total $\vec{p}_1 + \vec{p}_2$ qui décrit lui aussi un cercle en sens horaire ! On pourrait même démontrer que cette vision des choses est générale pour tout point M de la zone de rayonnement : on a en M un état de polarisation image de la trajectoire suivie par la pointe du dipôle source vue depuis un observateur placé en M . Le vecteur de POYNTING au point M_1 est $\vec{R}(M_1, t) = \frac{\vec{E}(M_1, t) \wedge \vec{B}(M_1, t)}{\mu_0}$. En remplaçant les expressions précédentes des champs en M_1 et en notant que $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$, il vient $\vec{R}(M_1, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16 \pi^2 c x^2} \vec{u}_x = \langle \vec{R}(M_1, t) \rangle$. La moyenne temporelle a été facile à calculer puisque ce vecteur est constant. C'est pour le moins particulier (on n'a pas la même chose avec un seul dipôle). Comme $a \ll x$, on peut approximer le vecteur de POYNTING moyen en tout point sur le disque à sa valeur au centre M_1 . Ainsi, la puissance électromagnétique moyenne reçue est $\langle P \rangle \simeq \langle R_x(M_1, t) \rangle \pi a^2 = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2 a^2}{16 \pi c x^2}$. Cette puissance moyenne décroît en l'inverse du carré de la distance à l'antenne émettrice. Le point M_2 étant placé dans la direction du dipôle \vec{p}_2 , il ne reçoit aucun rayonnement de ce dipôle. Ainsi, on y relève le champ électromagnétique produit seulement par le dipôle \vec{p}_1 . Le point M_2 a pour coordonnées sphériques ($r = x, \theta = \pi/2, \varphi = \pi/2$), vis-à-vis du dipôle \vec{p}_1 , et la base locale en ce point est ($\vec{e}_r = \vec{e}_y, \vec{e}_\theta = -\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi = -\vec{e}_x$). Ainsi, le champ électromagnétique en M_2 est $\vec{E}(M_2, t) = \vec{E}_1(M_2, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x} p_0 \cos(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_z$ et $\vec{B}(M_2, t) = \vec{B}_1(M_2, t) = \frac{\mu_0 \omega^2}{4\pi x c} p_0 \cos(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_x$. Le champ électrique est le même que celui produit par \vec{p}_1 en M_1 , ce qui est cohérent vu l'invariance par rotation d'axe Oz autour de ce dipôle et la direction selon \vec{e}_z de ce champ. On observe un état de polarisation rectiligne suivant \vec{e}_z (dans le plan dipôle-observateur (O, M_2, \vec{p}_1)). Le vecteur de POYNTING en M_2 est $\vec{R}(M_2, t) = \frac{\vec{E}(M_2, t) \wedge \vec{B}(M_2, t)}{\mu_0}$. En remplaçant les expressions précédentes des champs en M_2 , il vient $\vec{R}(M_2, t) = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16 \pi^2 c x^2} \cos^2(\omega t - \omega x/c) \vec{e}_y$. La moyenne temporelle associée est $\langle \vec{R}(M_2, t) \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32 \pi^2 c x^2} \vec{e}_y$. Par la même démarche que précédemment, il vient la puissance moyenne détectée par l'antenne réceptrice $\langle P' \rangle = \frac{1}{2} \langle P \rangle$. Ce résultat n'est pas très étonnant : les dipôles orthogonaux produisent des rayonnements incohérents entre eux (champs électriques orthogonaux) ; en M_1 , on cumule les puissances moyennes des deux dipôles (sans terme d'interférences) et en M_2 , on ne récupère que la puissance moyenne d'un seul.

7. Stabilité d'un atome

Réponses : $v_0 = \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0 m}} = 2,2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\gamma_0 = \frac{v_0^2}{r_0} = 9 \times 10^{22} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, $E_0 = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_0} = -2,2 \times 10^{-18} \text{ J} = -13,6 \text{ eV}$; $\vec{p} = -er_0 \vec{e}_r$, $\vec{m} = -\frac{1}{2} ev_0 r_0 \vec{e}_z$; polarisation rectiligne dans le plan de l'orbite, polarisation circulaire sur l'axe de l'orbite ; $P_0 = \frac{\mu_0 e^2 v_0^4}{12\pi c r_0^3}$, $\Delta E = -\frac{\mu_0 e^2 v_0^3}{6cr_0}$; $\frac{\Delta E}{E} = -\frac{8\pi}{6} \frac{v_0^3}{c^3} \simeq -1,65 \times 10^{-6}$, $\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta r}{r}$; $E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$, $\frac{dE}{dt} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r^2} \frac{dr}{dt} = -P$, $\frac{dr}{dt} = -\frac{2}{3} \frac{v^4}{c^3}$, $m \frac{v^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $r^3 - r_0^3 = -\frac{e^4}{8\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3} t$, $\tau = \frac{8\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 r_0^3}{e^4} = 3 \times 10^{-11} \text{ s}$, $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0} = 1,5 \times 10^{-16} \text{ s}$, le raisonnement sur des orbites circulaires est justifié ; le modèle de BOHR ne convient pas, il faut un modèle quantique.

8. Durée de vie d'un atome classique

Réponses : $m\vec{\gamma} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r = -m \frac{v^2}{r} \vec{e}_r$, $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$, $E_{pot} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ et $E_m = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$; l'électron émet car son mouvement est accéléré, $r = 10^{-9} \text{ m}$, $\lambda = 10^{-7} \text{ m}$ pour des distances macroscopiques $d = 1 \text{ cm}$, on a bien les hypothèses $r \ll \lambda \ll d$, on est dans la zone de rayonnement, $P_{ray} = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{e^2 \gamma^2}{c^3}$ avec l'expression de γ $P_{ray} = \frac{e^6}{96\pi^3 \epsilon_0^3 c^3 r^4 m^2}$, le théorème de la puissance cinétique dit que $\frac{dE_m}{dt} = -P_{ray}$ d'où $r^2 \frac{dr}{dt} = -\frac{e^4}{12\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3}$, en intégrant le rayon tend vers 0 en une durée finie $r^3 = r_0^3 - \frac{e^4}{4\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3} t$ d'où une durée de vie $\tau = \frac{4\pi^2 \epsilon_0^2 m^2 c^3 r_0^3}{e^4}$.

9. Rayonnement d'un électron diffusé

Réponses : on calcule $\delta/d = 1,0$, donc $e = 1,4$. Les directions des asymptotes sont telles que le dénominateur de $\rho(\theta)$ s'annule, soit $1 + e \cos \theta_M = 0$ d'où $\theta_M = \arccos(-\frac{1}{e}) = 2,4 \text{ rad} = 135^\circ$. On sait que le champ électromagnétique rayonné est une onde localement plane vérifiant la relation de structure locale $\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r$. Par conséquent, le vecteur de POYNTING associé est $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{c}{\mu_0} (\vec{B} \wedge \vec{e}_r) \wedge \vec{B}$. On développe le double produit vectoriel en pensant à la transversalité magnétique locale, d'où $\vec{\Pi} = \frac{c}{\mu_0} B^2 \vec{e}_r$. Si l'on choisit un axe

\vec{e}_z de coordonnées sphériques (r, θ_s, φ_s) centrées sur le dipôle et tel que $\ddot{\vec{p}}(t - r/c) = f_p(r, t) \vec{e}_z$, il vient $\vec{\Pi} = \frac{\mu_0}{16\pi^2 c r^2} f_p^2 \sin^2 \theta_s \vec{e}_r$. On passe à la puissance rayonnée à travers la surface d'une sphère (\mathcal{S}_R) de centre O et de rayon R (assez grand pour être en zones d'approximation dipolaire et de rayonnement) : $P(R, t) = \iint_{(\mathcal{S}_R)} \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{ext}$ soit $P(R, t) = \int_{\theta_s=0}^{\pi} \int_{\varphi_s=0}^{2\pi} \frac{\mu_0}{16\pi^2 c R^2} f_p^2 \sin^2 \theta_s R^2 \sin \theta_s d\theta_s d\varphi_s$. Or, l'intégration sur φ_s donne 2π et celle sur θ_s d'un sinus cube donne $4/3$, d'où $P(R, t) = \frac{\mu_0}{6\pi c} f_p^2$. On termine en utilisant $\mu_0 \varepsilon_0 c^2 = 1$, soit $P(R, t) = \frac{1}{6\pi \varepsilon_0 c^3} \left[\ddot{\vec{p}}(t - R/c) \right]^2$. Il s'agit là d'une formule de LARMOR. Il ne faut pas s'emmêler entre les divers systèmes de repérage (dont celui de repérage de l'électron dans le sujet). On applique la seconde loi de NEWTON à l'électron (de notation de charge $-q$ imposée par le sujet) dans le référentiel galiléen où le proton est fixe. La force majoritaire est due à l'attraction électrique du noyau, d'où $m\vec{a} = -\frac{q^2}{4\pi \varepsilon_0 \rho^2} \vec{e}_\rho$. Alors, $\left[\ddot{\vec{p}} \right]^2 = (-q\vec{a})^2 = \left(\frac{q^3}{4\pi \varepsilon_0 m \rho^2} \right)^2 = \frac{q^2 c^4 b^2}{\rho^4}$. On injecte cela dans le résultat de la question précédente, d'où effectivement, après simplification, $P(R, t) = \frac{2}{3} m c^2 \frac{b^3 c}{[\rho(t-R/c)]^4}$. L'expression de P est non négligeable lorsque l'électron est proche du proton, là où il est fortement dévié (donc accéléré). La distance ρ a alors le même ordre de grandeur que le paramètre d'impact d . Dès que $\rho \gg d$, P est négligeable. Dès lors, on peut calculer l'énergie totale rayonnée par l'électron sur toute la trajectoire et écrire $E_R = \int_{-\infty}^{+\infty} P(R, t) dt$. Cette intégrale s'explicité en $E_R = \frac{2}{3} m c^3 b^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{[\rho(t-R/c)]^4} = \frac{2}{3} m c^3 b^3 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\rho(t)^4}$. Le mouvement de l'électron étant à force centrale, on peut exploiter la constante des aires $C = \rho^2 \dot{\theta} = v_0 d$ donc $dt = \frac{\rho^2}{v_0 d} d\theta$. L'intégrale précédente devient $E_R = \frac{2 m c^3 b^3}{3 v_0 d} \int_{-\theta_M}^{+\theta_M} \frac{d\theta}{\rho(\theta)^2} = \frac{2 m c^3 b^3}{3 v_0 d \delta^2} \int_{-\theta_M}^{+\theta_M} (1 + e \cos \theta)^2 d\theta$ donc $E_R = \frac{2 m c^3 b^3 I}{3 v_0 d \delta^2} = \frac{2 m c^7 b^5 I}{3 v_0^5 d^5}$. On peut conclure que le ratio demandé est $K = \frac{E_R}{\frac{1}{2} m v_0^2} = \frac{4}{3} \left(\frac{c}{v_0} \right)^7 \left(\frac{b}{d} \right)^5 I$. On obtient $I = 12$ et $K = 1,7 \cdot 10^{-6}$. L'énergie rayonnée par l'électron au cours de son mouvement est donc extrêmement faible devant l'énergie cinétique qu'il avait avant sa diffusion.

10. Rayonnement d'un dipôle électrique tournant

Réponses : Les expressions données dans l'énoncé pour le champ électromagnétique correspondent au rayonnement dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique et de la zone de rayonnement : on doit avoir la hiérarchie $a \ll \lambda \ll r$ (où a est la taille caractéristique de la distribution dipolaire et λ est la longueur d'onde caractéristique associée aux ondes générées). On a $\vec{p}^* = p_0 [\vec{u}_x \cos \omega t^* + \vec{u}_y \sin \omega t^*]$ avec $\vec{u}_x = \vec{u} \sin \theta + \vec{v} \cos \theta$. On en déduit la dérivée seconde $\ddot{\vec{p}}^* = -\omega^2 p_0 [(\vec{u} \sin \theta + \vec{v} \cos \theta) \cos \omega t^* + \vec{u}_y \sin \omega t^*]$. On calcule alors les produits vectoriels nécessaires : $\ddot{\vec{p}}^* \wedge \vec{u} = -\omega^2 p_0 [-\vec{u}_y \cos \theta \cos \omega t^* + \vec{v} \sin \omega t^*]$ et $(\ddot{\vec{p}}^* \wedge \vec{u}) \wedge \vec{u} = -\omega^2 p_0 [-\vec{v} \cos \theta \cos \omega t^* - \vec{u}_y \sin \omega t^*]$. En définitive, on tire les expressions des champs \vec{E} et \vec{B} : $\vec{E} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r} [\vec{v} \cos \theta \cos \omega t^* + \vec{u}_y \sin \omega t^*]$ et $\vec{B} = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r c} [-\vec{v} \sin \omega t^* + \vec{u}_y \cos \theta \cos \omega t^*]$. On remarque que les champs ont, en M , la structure vectorielle locale d'une onde plane progressive monochromatique dont la pulsation est ω , la célérité est c et de vecteur unitaire de propagation \vec{u} , c'est-à-dire $\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$. La notion de polarisation évoquée à la question suivante prend donc tout son sens. On dessine la courbe décrite par l'extrémité du vecteur \vec{E} dans le plan (\vec{v}, \vec{u}_y) perpendiculaire à la direction de propagation (en posant $\alpha = \frac{\mu_0 \omega^2 p_0}{4\pi r}$). Voir la figure 1.

Les polarisations cherchées sont par conséquent : circulaire gauche pour $\theta = 0$; elliptique gauche pour $\theta \in]0; \frac{\pi}{2}[$; rectiligne pour $\theta = \frac{\pi}{2}$; elliptique droite pour $\theta \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$; et circulaire droite pour $\theta = \pi$. On peut remarquer que l'extrémité du vecteur champ électrique décrit la même courbe (à une homothétie près), et dans le même sens, que le vecteur \vec{p} vu en perspective depuis le point M : la polarisation observée donne une vue en perspective du mouvement du dipôle ! Ce résultat est logique le champ électrique obtenu est la superposition des champs électriques rayonnés par les dipôles $p_x \vec{u}_x$ et $p_y \vec{u}_y$ (linéarité des équations de MAXWELL). Le vecteur de POYNTING $\vec{\Pi}$ en M à l'instant t vaut (en utilisant la structure locale de l'onde) : $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\vec{E} \wedge (\vec{u} \wedge \vec{E})}{\mu_0 c} = \frac{\vec{E}^2}{\mu_0 c} \vec{u}$ soit $\vec{\Pi} = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{16\pi^2 c r^2} (\cos^2 \theta \cos^2 \omega t^* + \sin^2 \omega t^*) \vec{u}$. Sa valeur moyenne dans le temps, compte tenu des égalités $\langle \cos^2 \omega t^* \rangle = \langle \sin^2 \omega t^* \rangle = 1/2$, est $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32\pi^2 c r^2} [\cos^2 \theta + 1] \vec{u}$. L'indicatrice de rayonnement du dipôle tournant est la représentation spatiale en sphériques de la surface définie par $R(\theta, \varphi) = \frac{\| \langle \vec{\Pi} \rangle \|(\theta, \varphi)}{\| \langle \vec{\Pi} \rangle \|_{max}}$ pour une distance r fixée. En l'occurrence, r ne joue pas et $R(\theta, \varphi) = \frac{\cos^2 \theta + 1}{2}$. L'indicatrice de rayonnement est donc invariante par rotation autour de (Oz) et l'on peut se contenter d'effectuer sa représentation dans un plan méridien ($\varphi = Cte$). On superpose en pointillés à cette représentation celle de l'indicatrice dans ce même plan pour le dipôle non tournant placé en O , horizontal et dans le plan de la figure (indicatrice en $\cos^2 \theta$ quand on pense à tourner de 90° par rapport au cours. Les angles indiqués correspondent à θ , voir la figure 2.

On voit que le dipôle tournant ne possède aucune direction sans émission (indicatrice en cacahuète) alors que le dipôle fixe ne rayonne pas dans sa direction (indicatrice en huit). Calculons maintenant la puissance moyenne

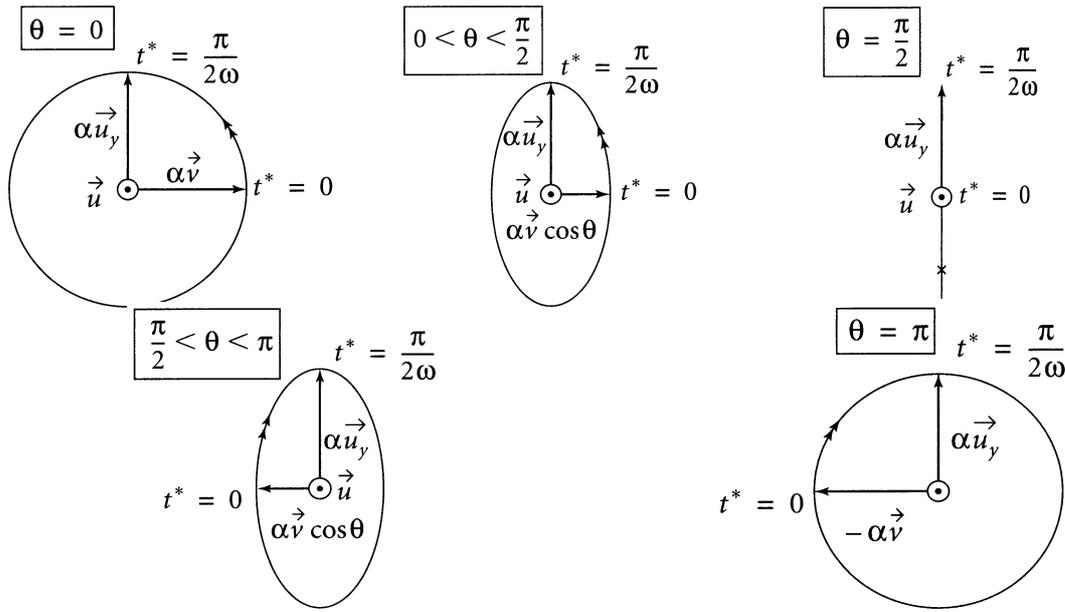


FIGURE 1 – Polarisation du rayonnement

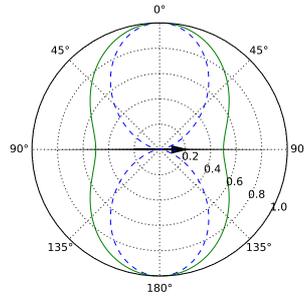


FIGURE 2 – Indicatrice de rayonnement du dipôle électrique tournant

qui traverse un élément de surface $\delta\Sigma$ (orthogonal à \vec{u} et orienté par \vec{u}) au voisinage de M : $d\langle\mathcal{P}\rangle = \langle\vec{\Pi}\rangle \cdot \vec{u} \delta\Sigma$, $d\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32 \pi^2 c r^2} [\cos^2 \theta + 1] \delta\Sigma$. On aurait obtenu le même résultat pour un point M appartenant au plan $Ox'z$ ($\varphi = \text{Cte}$) ; il suffit alors de changer dans les calculs précédents ωt^* par $\omega t^* - \varphi$, ce qui ne modifie pas les résultats après la moyenne temporelle. Sachant que $\delta\Sigma = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, on intègre $d\langle\mathcal{P}\rangle$ pour θ variant de 0 à π et φ variant de 0 à 2π (coordonnées sphériques !), et on trouve $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{32 \pi^2 c} \frac{16 \pi}{3}$ soit $\langle\mathcal{P}\rangle = \frac{\mu_0 \omega^4 p_0^2}{6 \pi c}$. On retrouve la proportionnalité bien connue signalée en cours avec ω^4 (diffusion atomique de RAYLEIGH).

11. Rayonnement d'un dipôle magnétique oscillant

Réponses : pour constituer le dipôle $M_0 \cos(\omega t) \vec{e}_z$ en O , la spire circulaire doit déjà avoir son centre en O et son axe confondu avec (Oz) . De plus, la valeur de M_0 est fixée par la relation $M_0 = \pi a^2 I_0$ en choisissant l'orientation du courant en accord avec l'axe (Oz) . Soit un point M quelconque dans la zone de rayonnement. Le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ (qui contient l'axe (Oz)) est un plan d'antisymétrie de la source (le moment magnétique est un pseudo-vecteur et on le retrouve avec la spire !). Par conséquent, le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ est orthogonal à ce plan : $\vec{E}(M, t) = E(M, t) \vec{e}_\varphi$. Par la même argumentation, on déduit que le champ magnétique $\vec{B}(M, t)$ est contenu dans le plan $(M, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$. Cela permet donc déjà de trancher en faveur de l'identification suivante : $\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 M_0 \omega^2 \sin \theta}{4 \pi r c} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\varphi$ et $\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 M_0 \omega^2 \sin \theta}{4 \pi r c^2} \cos(\omega t - kr) \vec{e}_\theta$. On peut aussi argumenter sur les dimensions des expressions proposées. Le plus direct est de voir que le second champ a la dimension $\left[\frac{\mu_0 M_0^2 \omega^2}{r c^2} \right] = \left[\frac{\mu_0 I_0 a^2 \omega^2}{r c^2} \right] = \left[\frac{\mu_0 I_0}{r} \right] = \left[\frac{\mu_0 I_0}{2 \pi r} \right]$ et c'est bien la dimension d'un champ magnétique puisque l'on reconnaît la forme du champ magnétostatique créé par un fil rectiligne infini. Ce champ possède localement une structure d'onde plane qui se propage radialement puisque $\vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{e}_r$. Les orientations des champs \vec{E} et \vec{B} sont interverties par rapport au cas du dipôle électrique rayonnant (polarisations orthogonales), voir la figure 3.

En complexes, on peut calculer la moyenne du vecteur de POYNTING $\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{1}{2 \mu_0} \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{\mu_0}{32 \pi^2 c^3} \frac{\omega^4 M_0^2 \sin^2 \theta}{r^2} \vec{e}_r$ d'où la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère de rayon r $\mathcal{P}_{\text{moy}} = \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \langle\vec{\Pi}\rangle \cdot \vec{e}_r r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$ soit

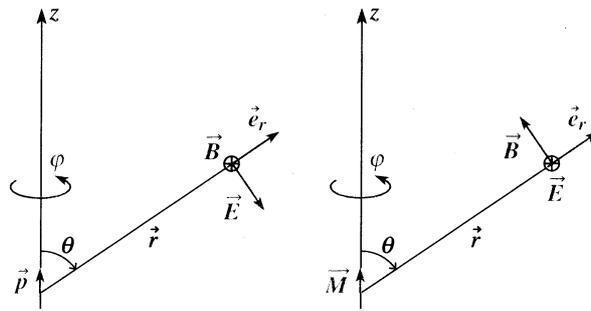


FIGURE 3 – Comparaison des champs sur les dipôles électrique et magnétique

$\mathcal{P}_{moy} = \frac{\mu_0 \omega^4 M_0^2}{12 \pi c^3}$. On remarque que comme pour le dipôle électrique rayonnant, la puissance moyenne est en carré de l'accélération (soit en ω^4) et est indépendante de la distance r (conservation de l'énergie moyenne rayonnée dans le vide). On estime $p_0 \simeq e a$ et $M_0 = \pi a^2 I = \pi a^2 e/T = e v a/2$ (car $vT = 2\pi a$). De plus, la puissance moyenne rayonnée par un dipôle électrique est $\mathcal{P}'_{moy} = \frac{\omega^4 p_0^2}{12 \pi \epsilon_0 c^3}$ donc $\frac{\mathcal{P}_{moy}}{\mathcal{P}'_{moy}} \simeq \frac{v^2}{4c^2} \ll 1$. Le rayonnement électrique domine largement devant le rayonnement magnétique, ce qui explique son étude privilégiée en cours.