

## Exercices : 28 - Les outils de la Mécanique quantique

### A. Dualité

#### 1. Classique ou quantique

Ce critère ne figure pas au programme. On s'aidera du cours pour répondre. On note  $S$  l'action qui est, rappelons-le, le produit d'une énergie par un temps ou le produit d'une quantité de mouvement par une longueur.

1. On considère un pendule évoluant dans le champ de pesanteur de longueur  $\ell = 20$  cm, de masse  $m = 10$  g. Évaluer l'action  $S$  qui lui correspond. Doit-on l'étudier de façon classique ou bien relève-t-il de la Mécanique quantique ?
2. Un horloger qui répare des montres mécaniques doit-il connaître la Mécanique quantique dans le cadre de son travail ?
3. L'atome d'hydrogène possède une énergie d'ionisation de 13,6 eV. Rappeler la loi donnant les niveaux d'énergie de cet atome. Quel est le domaine des longueurs d'ondes émises par celui-ci ? Quelle est la plus petite longueur d'onde émise ? Doit-on utiliser la Mécanique quantique pour le décrire ?
4. Le critère quantique est-il cohérent avec le critère basé sur la longueur d'onde de DE BROGLIE ?

#### 2. Gaz quantique ou gaz classique

On considère de l'hélium gazeux à température ambiante et à la pression atmosphérique. L'énergie cinétique moyenne d'un atome d'hélium est  $E_c = \frac{3}{2}k_B T$ .

1. Déterminer et évaluer numériquement la vitesse quadratique moyenne d'un atome d'hélium.
2. Calculer la longueur d'onde de DE BROGLIE correspondante. La comparer à la distance moyenne entre atomes d'hélium.
3. L'étude de l'hélium gazeux relève-t-il de la Mécanique quantique ?
4. Lors de la formation d'un cristal métallique, on suppose que chaque atome du cristal fournit un électron. L'ensemble de ces électrons libres constitue un gaz où l'énergie de chaque électron est de l'ordre de l'électronvolt. La distance moyenne entre électrons est supposée égale à la distance moyenne entre atomes. Évaluer la longueur d'onde de DE BROGLIE et la distance moyenne entre les électrons libres. Conclure en indiquant si la conduction électrique relève ou non de la Mécanique quantique.

#### 3. Quantique ou classique

Dites si l'étude des systèmes suivants vous semble relever du domaine de la physique quantique ou de la physique classique

1. Un oscillateur électrique  $LC$  portant une charge  $q = 5,0 \cdot 10^{-7}$  C avec  $L = 40$  mH et  $C = 1,0 \cdot 10^{-7}$  F.
2. Une personne de masse  $m = 70$  kg en chute libre dans le champ de pesanteur terrestre. Même étude pour un neutron de masse  $m = 1,7 \cdot 10^{-27}$  kg.
3. Une box Wi-Fi de puissance  $P = 0,1$  W émettant à la fréquence  $f = 2,4$  GHz. On considérera que la box émet des photons.
4. Un vase rempli d'hélium superfluide est mis en rotation. On observe que l'hélium reste au repos hormis à l'intérieur de tourbillons filiformes parallèles à l'axe de rotation du vase. Chaque tourbillon est caractérisé par un diamètre de l'ordre du dixième de millimètre et une fréquence de rotation de l'ordre de 10 Hz. On s'intéresse aux mouvements des atomes d'hélium des tourbillons.

#### 4. Diffraction de neutrons

Un faisceau parallèle de neutrons parvient avec une vitesse  $V$  sur une petite ouverture circulaire de diamètre  $d$ . Les neutrons reçus par un détecteur situé à une distance  $L$  en aval de l'ouverture se répartissent principalement sur un disque de diamètre  $D \ll L$ . Quel serait le diamètre du disque avec des neutrons de vitesse  $2V$ , une ouverture de diamètre  $2d$ , et une distance ouverture-détecteur  $2L$  ?

Proposition de réponses :

- a)  $2D$       b)  $4D$       c)  $D/2$       d)  $D/4$

### 5. Le mystère des fentes d'Young

Soit le dispositif des trous d'YOUNG utilisé ici avec une source ponctuelle  $S$  de particules quantiques mono-énergétiques placée sur la médiatrice des deux fentes  $F_1$  et  $F_2$  distantes de  $2a$ . Les particules sont émises une à une (c'est-à-dire séparément). La distance entre le plan des fentes et l'écran, qui lui est parallèle, est  $D \gg a$ . L'observation est effectuée en un point  $M$  quelconque de l'écran repéré par  $d \ll D$ . Voir la figure 1. Pour tenter de savoir par quelle fente passe chaque particule, on mesure par un dispositif non représenté la translation de l'écran suivant  $Ox$  induite par chaque impact de particule, l'écran gagnant alors la quantité de mouvement suivant  $Ox$  de la particule absorbée.

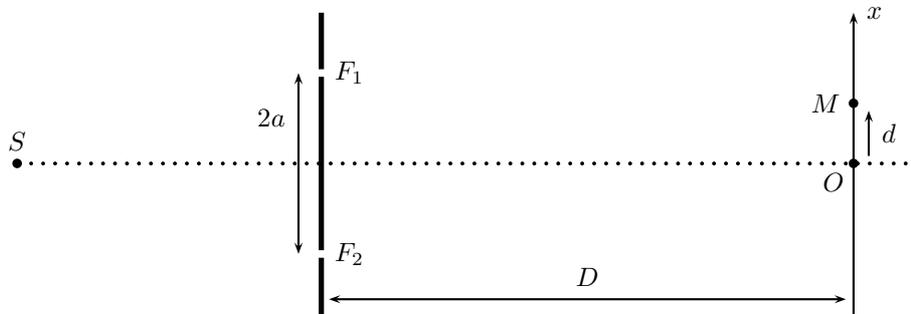


FIGURE 1 – Les fentes d'YOUNG

1. Exprimer la quantité de mouvement  $p_{1x}$  selon  $Ox$  d'une particule parvenant en  $M$  après être passée par la fente  $F_1$  en fonction de la valeur  $p_0$  de son impulsion (ou quantité de mouvement), de  $d$ ,  $a$  et  $D$ .
2. Faire de même pour le cas d'une particule passant par la fente  $F_2$  et en déduire que l'on sait de quelle fente provient la particule seulement si l'indétermination sur la quantité de mouvement de l'écran est très inférieure à une valeur fonction de  $p_0$ ,  $a$  et  $D$ .
3. Que peut-on dire alors de l'indétermination sur la position de l'écran  $\Delta x$ . En déduire que si on peut déterminer par quelle fente est passée la particule, l'observation des franges est impossible...

### 6. Expérience de Davisson et Germer

DAVISSON et GERMER ont validé le concept des ondes de DE BROGLIE pour des électrons en 1927. Pour ce faire, ils ont fait parvenir, en incidence normale, un faisceau parallèle incident d'électrons accélérés par une différence de potentiel  $V$  sur un cristal de nickel dans le vide. Un détecteur était chargé de mesurer pour divers angles de diffusion  $\theta$  à l'infini l'intensité électronique  $I(\theta)$  correspondante. La figure 2 précise le diagramme angulaire d'intensité relevée pour la tension  $V = 54 \text{ V}$  (sachant que des mesures pour d'autres tensions ont aussi été effectuées).

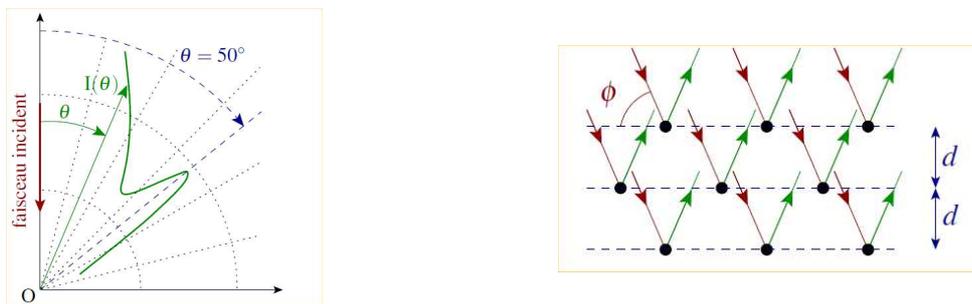


FIGURE 2 – Diffusion d'électrons dans l'expérience de DAVISSON et GERMER

1. Les physiciens BRAGG, père et fils, ont proposé en 1912, lors de l'étude de la diffraction de rayons X par un cristal (prix NOBEL 1915), la formule de BRAGG  $n \lambda = 2 d \sin \phi$  où  $n$  est un entier,  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $d$  est la distance entre deux plans réticulaires du cristal et  $\phi$  est l'angle formé entre chaque plan réticulaire et un faisceau parallèle émergent intense.
  - (a) Expliquer pourquoi le rayonnement obtenu par réflexion spéculaire sur les atomes d'un même plan réticulaire est particulièrement intense.

- (b) En déduire la formule de BRAGG en considérant les interférences entre les ondes issues de la réflexion spéculaire (selon les lois de DESCARTES) sur les atomes pour l'ensemble des plans réticulaires.
2. L'utilisation de rayons  $X$  permet de connaître la distance  $d = 0,091$  nm entre les plans réticulaires.
- (a) En exploitant la formule de BRAGG, déterminer les longueurs d'onde équivalentes  $\lambda_{eq,n}$  envisageables du faisceau électronique.
- (b) Confronter ces longueurs d'onde avec la longueur d'onde de DE BROGLIE  $\lambda_{DB}$  du faisceau électronique. Conclure.

s

### 7. Diffraction de molécules par une onde lumineuse

On considère une expérience de diffraction de molécules de fullerène  $C_{60}$  par une onde stationnaire lumineuse. Un four contenant la poudre de fullerène est chauffé à une température proche de 900 K. Un dispositif permet de sélectionner dans le faisceau de fullerène sortant du four des molécules de vitesse moyenne égale à  $v = 120 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et dont la dispersion relative de vitesse est  $\frac{\Delta v}{v} = 0,17$ . Le faisceau est collimaté par deux fentes verticales successives de largeur respectivement égales à  $a = 7 \mu\text{m}$  et  $b = 5 \mu\text{m}$  et séparées de  $D' = 1,13$  m. Le faisceau de molécules est ensuite diffracté par une onde stationnaire lumineuse. On admettra que du point de vue des molécules de fullerène, l'onde stationnaire lumineuse, agit comme un réseau plan de diffraction, constitué de  $N$  fentes, infiniment fines et équidistantes de  $d = 257$  nm. Un détecteur, situé à une distance  $D = 1,20$  m après le réseau, permet de compter les molécules de  $C_{60}$ . Le dispositif expérimental est représenté à la figure 3.

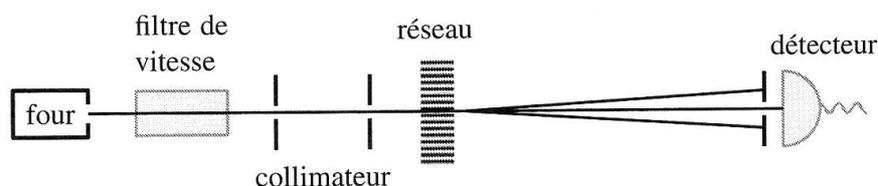


FIGURE 3 – Diffraction de  $C_{60}$  par un réseau

- Déterminer la longueur d'onde de DE BROGLIE  $\lambda_{DB}$  des molécules de fullerène qui sont sélectionnées par le filtre de vitesse.
- Déterminer la dispersion  $\Delta\lambda_{DB}$  de cette longueur d'onde de DE BROGLIE.
- Que représente la longueur  $\ell_c = \frac{\lambda_{DB}^2}{\Delta\lambda_{DB}}$  ? Calculer sa valeur numérique.
- Expliquer quel est l'intérêt des fentes de collimation. Préciser l'influence de la diffraction du faisceau moléculaire par chacune des deux fentes.

La figure 4 représente un exemple de figure d'interférences obtenue expérimentalement.

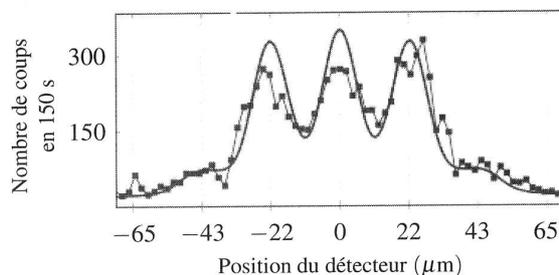


FIGURE 4 – Expérience d'interférences

- On suppose que le détecteur permet d'observer les interférences à l'infini du faisceau moléculaire diffracté. Pour interpréter les résultats expérimentaux, on se ramène au schéma de la figure 3. On suppose que la longueur d'onde de DE BROGLIE n'est pas modifiée par le passage à travers le réseau. Déterminer les directions  $\theta$  pour lesquelles il y a interférences constructives des faisceaux diffractés.

6. Interpréter l'allure de la courbe expérimentale de la figure 4. En déduire la valeur numérique de la vitesse moyenne des molécules de  $C_{60}$  et la comparer à la valeur donnée par les auteurs de l'expérience.
7. Montrer, en utilisant des arguments similaires à ceux développés dans le cours d'optique, que le défaut de cohérence temporelle du faisceau permet d'expliquer le nombre limité de franges visibles.

**8. Expérience de Franck et Hertz**

Soit l'expérience de FRANCK et HERTZ<sup>1</sup> (1914) de dispositif fourni sur la figure 5. Il comporte notamment une ampoule fermée contenant une vapeur de gaz monoatomique sous faible pression et dans laquelle se trouvent un filament, une grille et une électrode collectrice.

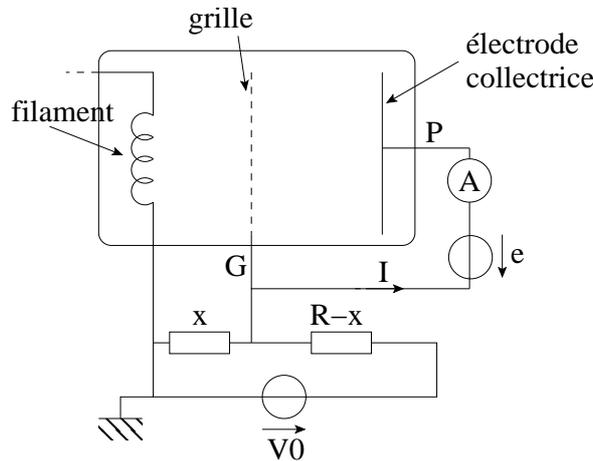


FIGURE 5 – Dispositif de l'expérience de FRANCK et HERTZ

1. La grille est portée au potentiel électrique  $V_G$  positif obtenu grâce à un circuit contenant deux résistances variables ( $x$  et  $R - x$ , avec  $x$  compris entre 0 et  $R$ ) et un générateur de tension  $V_0$ . Quelle est la tension de la grille  $V_G$  en fonction de  $V_0$ ,  $x$  et  $R$  sachant que  $I \ll V_0/R$ ? À quoi servent les résistances réglables? Comment peut-on réaliser pratiquement ce dispositif?
2. Le filament chauffé émet des électrons (masse  $m_e$ ) de vitesse quasi-nulle. Quelle est la vitesse  $v$  des électrons au niveau de la grille?
3. L'électrode collectrice est au potentiel  $V_P = V_G - \epsilon$  où  $\epsilon$  est une constante positive supposée petite devant  $V_G$ . Quelle est la vitesse  $v'$  des électrons au niveau de cette électrode (dans l'hypothèse où la traversée de la grille, à maille large, s'effectue sans changement de vitesse et où la vapeur de gaz est sans influence)?

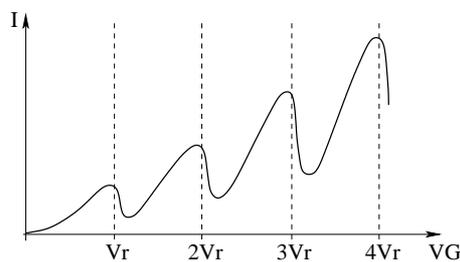


FIGURE 6 – Résultats de l'expérience de FRANCK et HERTZ

On suppose maintenant que la vapeur de gaz contenue dans l'ampoule influence le mouvement des électrons. Ces derniers peuvent subir deux types de collisions avec les atomes du gaz : soit une collision élastique (où l'électron conserve son énergie cinétique), soit une collision inélastique (où l'électron peut transférer de l'énergie à l'atome ; on note  $W$  l'énergie transférée à l'atome de gaz sous forme d'énergie potentielle). La figure 6 précise la courbe de  $I$  en fonction de  $V_G$ . Interpréter cette courbe sur le domaine  $0 \leq V_G \leq V_r$ . Que se passe-t-il quand  $V_G$  franchit  $V_r$ ? Interpréter la suite de la courbe.

1. Gustav Hertz était le neveu de Heinrich Hertz qui a donné son nom à l'unité de fréquence.

- En déduire que l'atome ne peut prendre à l'électron qu'une quantité d'énergie parfaitement déterminée  $W_r$  que l'on exprimera.
- Accord avec le modèle de Bohr...

Dans les expériences faites avec de la vapeur de mercure, on mesure la tension  $V_r = 4,9 \text{ V}$  (le potentiel d'ionisation est  $10,5 \text{ V}$ ). Qu'arrive-t-il aux atomes de mercure dès que  $V_G$  est supérieur à  $V_r$ ? On constate aussi que lorsque  $V_G$  dépasse  $V_r$ , une lumière de longueur d'onde  $\lambda_r = 253,7 \text{ nm}$  est émise par le gaz. Préciser quel est son domaine spectral et interpréter le phénomène. Commenter la phrase suivante : *Le fait que l'électron ne puisse pas céder à l'atome une quantité d'énergie inférieure à  $W_r$  vient confirmer la notion des niveaux d'énergie discontinus introduite à partir de la condition de quantification de Bohr.*

## 9. Effet Compton

En 1923, ARTHUR COMPTON confirme que la lumière peut être décrite par de petits paquets d'énergie et d'impulsion photons par anachronisme) et mérite ainsi le prix NOBEL 1927. Il dirige un faisceau de rayons X quasi-monochromatique (longueur d'onde caractéristique  $\lambda$ ) sur une bloc cible de graphite et mène une analyse spectrale des rayons X diffusés à divers angles de diffusion  $\theta$  grâce à un spectromètre exploitant la diffraction de BRAGG par un cristal de calcite. Voir la figure 7.

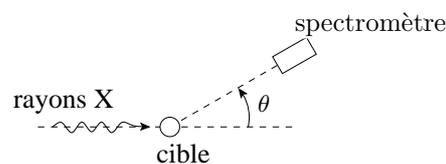


FIGURE 7 – Expérience de COMPTON

Il est observé expérimentalement l'apparition d'un second pic de diffusion dont l'écart en longueur d'onde avec le premier ne dépend ni de  $\lambda$ , ni du matériau diffuseur. Des graphiques d'intensités spectrales  $I(\lambda)$  relevées sont donnés sur la figure 8.

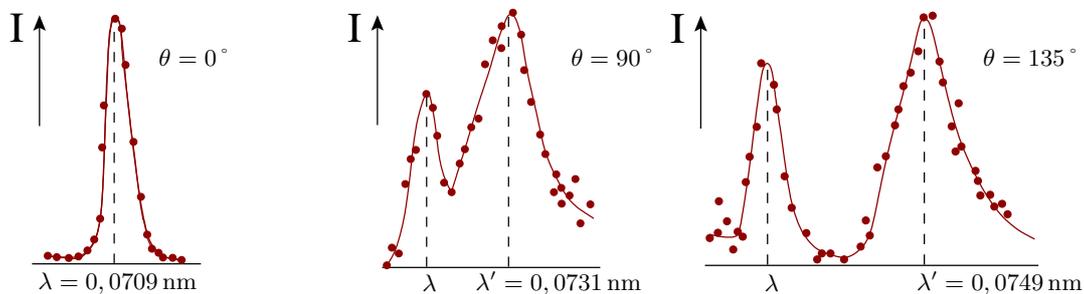


FIGURE 8 – Diffusion angulaire des photons dans l'expérience de COMPTON

- Expliquer sans calcul l'échec de la physique classique pour justifier de tels résultats expérimentaux.
- On suppose à présent que le faisceau incident de rayons X est en fait constitué de photons et que ceux-ci rentrent en collision avec les électrons libres du bloc de graphite (ces électrons ont une énergie de liaison négligeable devant l'énergie des photons incidents). Dans ce cas, on adopte le modèle suivant de diffusion COMPTON : un photon de longueur d'onde  $\lambda$  frappe un électron (masse  $m_e$ ) au repos dans le référentiel galiléen d'étude et, lors de la collision, il subit une diffusion d'un angle  $\theta$  avec une longueur d'onde  $\lambda'$ , alors que l'électron s'éloigne dans la direction  $\varphi$  avec une impulsion  $\vec{p}$  (voir figure 9). L'électron est traité avec une approche relativiste :  $\vec{p} = \gamma m_e \vec{v}$  et  $\mathcal{E}_c = (\gamma - 1) m_e c^2$  représente son énergie cinétique, où  $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ . Que peut-on dire qualitativement du signe de  $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda$ , appelé décalage COMPTON ?
- Pour la courbe expérimentale avec  $\theta = 135^\circ$ , l'électron est-il relativiste ?
- Avec une démarche énergétique et relativiste, obtenir une première équation entre  $\lambda$ ,  $\lambda'$  et  $p = \|\vec{p}\|$ . On notera  $m_e$  la masse au repos de l'électron et son énergie totale  $\mathcal{E}_e$  pour une impulsion  $p_e$  vérifie  $\mathcal{E}_e^2 = p_e^2 c^2 + m_e^2 c^4$ .



FIGURE 9 – Choc relativiste

5. Le système du photon et de l'électron est considéré isolé pendant la collision dans le référentiel d'étude. En déduire deux autres équations entre  $\lambda$ ,  $\lambda'$ ,  $p$ ,  $\varphi$  et  $\theta$ . Expliquer, sans l'effectuer, la démarche qui permet de parvenir à l'expression suivante du décalage COMPTON :

$$\Delta\lambda = \Lambda (1 - \cos \theta) \quad \text{où} \quad \Lambda = \frac{h}{m_e c}$$

6. Le décalage COMPTON ainsi obtenu est-il cohérent avec les résultats expérimentaux ? On pourra notamment calculer à dessein la longueur d'onde COMPTON  $\Lambda$ .
7. Quelle explication peut-on donner pour expliquer la présence du pic à la longueur d'onde  $\lambda$ , en plus de celui à la longueur d'onde  $\lambda'$ , sur les graphiques expérimentaux ?

## B. Fonction d'onde

### 10. Interférences

On considère une expérience d'interférences, où un faisceau de quantons est dirigé vers trois fentes contenues dans un même plan. La détection des particules est effectuée en un point  $M$  à grande distance du plan contenant les trois fentes.

- Lorsque la fente n°1 est la seule ouverte, l'amplitude de probabilité en  $M$  vaut  $\psi_1(M) = \frac{2}{3}$ .
- Lorsque la fente n°2 est la seule ouverte, l'amplitude de probabilité en  $M$  vaut  $\psi_2(M) = \frac{1}{3} \exp i \frac{3\pi}{4}$ .
- Enfin, lorsque la fente n°3 est la seule ouverte, l'amplitude de probabilité en  $M$  vaut  $\psi_3(M) = -\frac{1}{4} \exp i \frac{\pi}{4}$ .

1. Déterminer la probabilité de détection d'un quanton au voisinage du point  $M$  lorsque la fente n°1 est la seule ouverte.
2. Reprendre la question précédente pour les fentes n°2 et n°3 ouvertes.
3. Reprendre la question précédente pour toutes les fentes ouvertes. Commenter.

### 11. Interférométrie neutronique et gravité

On considère l'interféromètre à neutrons réalisé par COLELLA, OVERHAUSER et WERNER en 1975 (expérience COW). Un faisceau incident de neutrons, monochromatique, est émis par une source  $S$ . Un cristal de silicium, placé en  $A$  et représenté par un rectangle grisé sur la figure 10, joue le rôle d'une lame séparatrice : une partie du faisceau est transmise, avec un facteur d'amplitude de probabilité de transmission  $t$ , vers une lame  $D$ . Une autre partie est réfléchi, avec un facteur d'amplitude de probabilité de réflexion  $r$ , vers une lame  $C$ . Les deux faisceaux sont ensuite réfléchis par deux lames cristallines en  $C$  et  $D$ , puis sont recombinaés par une troisième lame en  $B$ . Toutes ces lames  $B$ ,  $C$  et  $D$  possèdent les mêmes coefficients  $r$  et  $t$  que la lame séparatrice  $A$ . Ils vérifient  $|r|^2 + |t|^2 = 1$  avec  $r$  réel et  $t = i |t|$  (où  $i^2 = -1$ ). Deux compteurs  $D_1$  et  $D_2$  permettent de détecter les neutrons.

1. On admet qu'il existe une différence de phase  $\Delta\varphi$  du trajet supérieur par rapport au trajet inférieur ; l'interférométrie neutronique a pour but de mesurer cette différence de phase et de l'exploiter.
  - (a) Montrer que l'amplitude de probabilité qu'un neutron soit détecté par  $D_1$  s'écrit

$$\psi_1 = \psi_0 r^2 t (1 + \exp i\Delta\varphi)$$

où  $\psi_0$  est une constante. En déduire la probabilité  $P_1$  de détection d'un neutron par le détecteur  $D_1$  en fonction de  $|\psi_0|^2$ ,  $R = |r|^2$  et  $\Delta\varphi$ .

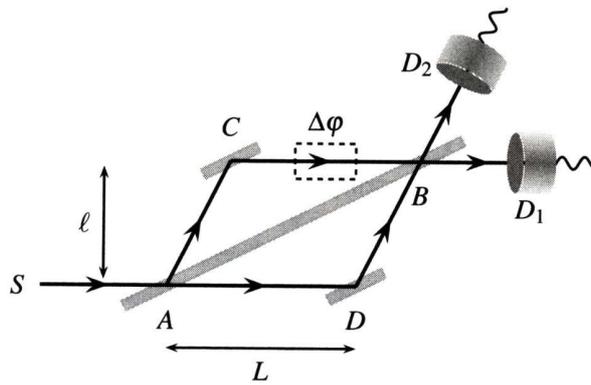


FIGURE 10 – Expérience COW

- (b) Exprimer de même l'amplitude de probabilité  $\psi_2$  correspondant à la détection d'un neutron par  $D_2$ . En déduire la probabilité de détection associée  $P_2$ .
- (c) Normaliser les probabilités  $P_1$  et  $P_2$ .
2. Dans l'expérience COW, le retard de phase  $\Delta\varphi$  est lié à la gravité. On note  $\lambda_{DB_0}$  la longueur d'onde de de Broglie des neutrons incidents et  $k_0 = 2\pi/\lambda_{DB_0}$  la norme du vecteur d'onde correspondant. On précise les valeurs numériques  $\lambda_{DB_0} = 1,4 \cdot 10^{-10}$  m,  $S = L\ell = 9,2 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup> (aire du losange ABCD) et  $m_n = 1,67 \cdot 10^{-27}$  kg (masse d'un neutron).
- (a) Expliciter l'énergie cinétique d'un neutron (supposé non relativiste) en fonction de  $m_n$ ,  $\hbar$  et de la norme  $k$  du vecteur d'onde associé.
- (b) En utilisant la conservation de l'énergie, déterminer l'expression de la norme  $k(z)$  du vecteur d'onde à une altitude  $z$  en fonction de sa valeur  $k_0$  en  $z = 0$ , de  $m_n$ ,  $\hbar$ ,  $z$  et  $g$  (accélération de la pesanteur). Comparer les valeurs numériques des termes constituant  $k(z)$  en prenant  $z = 1$  cm (condition associée à l'expérience COW). En déduire une simplification de la loi  $k(z)$ .
- (c) Le plan ABCD est initialement horizontal. On le fait tourner autour de l'axe (AD) d'un angle  $\theta$  par rapport à la position horizontale. Le bras (AD) reste à l'altitude  $z = 0$  tandis que le bras (CB) de l'interféromètre se retrouve à l'altitude  $z = \ell \sin \theta$ . On admet que le chemin de phase sur chacun des deux bras s'identifie à  $k(z)L$  où  $z$  est l'altitude du bras considéré. Montrer que la rotation induit un retard de phase pour le trajet supérieur par rapport au trajet inférieur :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi m_n^2 g S \lambda_{DB_0}}{\hbar^2} \sin \theta$$

- (d) La figure 11 représente le nombre de neutrons détectés par  $D_1$  en fonction de l'inclinaison  $\theta$  du plan (ABCD). Qu'observe-t-on ? En déduire une évaluation numérique de  $g$  et de l'incertitude associée.

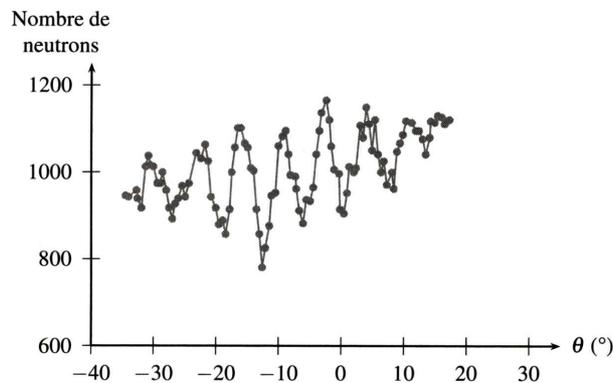


FIGURE 11 – Résultats de l'expérience COW

### 12. Potentiel harmonique

Soit  $\psi(x, t)$  la fonction d'onde d'une particule de masse  $m$  pouvant se déplacer sur l'axe  $Ox$  :

$$\psi(x, t) = A \exp\left(-\frac{m\omega_0 x^2}{2\hbar} - i\frac{\omega_0}{2}t\right)$$

1. Quelles sont les dimensions des constantes  $A$  et  $\omega_0$  ?
2. Quelles sont les valeurs possibles de  $A$  ?
3. Quel type d'état est représenté par cette fonction d'onde ? Quelle est l'énergie de la particule ?
4. À quelle énergie potentielle  $V(x)$  est soumise cette particule ?
5. Dans quel(s) type(s) de situation rencontre-t-on cette énergie potentielle ?
6. Quelle est la valeur moyenne  $\langle x \rangle$  de la position  $x$  de la particule ? Plus précisément, si on prépare  $N \gg 1$  systèmes dans cet état et que l'on mesure pour chacun d'entre eux la position  $x$  de la particule, quelle est la moyenne des mesures réalisées ?
7. Qu'en est-il de la moyenne quadratique  $\langle x^2 \rangle$  ?
8. Que dire de l'étalement des mesures en quantité de mouvement dans cet état ?

On donne pour  $\alpha > 0$  :  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$  et  $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$ .

### 13. Paquet d'ondes gaussien libre

Une onde gaussienne est décrite par la densité  $g(k)$  donnée par :

$$g(k) = A \exp\left(-\frac{(k - k_0)^2}{q^2}\right)$$

où  $A$ ,  $k_0$  et  $q$  sont des constantes positives. La particule concernée est libre et de masse  $m$ .

1. Écrire la forme de la fonction d'onde  $\psi(x, t)$  correspondante.
2. Commenter la nature physique de cette onde.
3. Évaluer explicitement l'onde à  $t = 0$ . On donne  $\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\alpha u^2 - \beta u) du = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right)$  pour  $\alpha > 0$  et  $\beta \in \mathbb{C}$ .
4. Commenter le résultat précédent.
5. Quels types de paramètres doit-on choisir pour que la particule soit localisée très précisément à l'instant initial  $t = 0$  ? Pour répondre à cette question, on évaluera  $\langle x^2 \rangle$ . Faire le lien avec l'indétermination de HEISENBERG ? On donne l'intégrale :  $\int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp(-\alpha u^2) du = \sqrt{\frac{\pi}{4\alpha^3}}$ .

Réponse

### 14. Atome d'hydrogène

Dans l'état fondamental, un électron en orbite autour d'un proton fixe en  $O$  est décrit par la fonction d'onde à symétrie sphérique  $\psi(r) = A \exp\left(-\frac{r}{a}\right)$ , où  $a$  et  $A$  sont des constantes positives.

1. Quel est au premier ordre en  $dr$ , le volume  $d\tau$  compris entre les rayons  $r$  et  $r + dr$  ?
2. En déduire la probabilité  $dP = f(r)dr$  que la position de l'électron soit mesurée entre  $r$  et  $r + dr$ .
3. Proposer une valeur de  $A$ .
4. Pour quelle valeur  $r_0$  de  $r$  la probabilité de trouver l'électron est-elle maximale (à  $dr$  près fixé) ?
5. Quelle est la valeur moyenne  $\langle r \rangle$  dans cet état ?
6. Quelle quantité physique représente  $a$  ?

On donne :  $\int_0^{\infty} x^n \exp(-\alpha x) dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}$  pour  $\alpha > 0$ .

### 15. États isotropes de l'atome d'hydrogène

Les niveaux d'énergie des états à symétrie sphérique de l'atome d'hydrogène peuvent se retrouver par le modèle simplifié suivant : on considère un électron de masse  $m$  dans un potentiel  $V(x)$  tel que  $V(x \leq 0) \rightarrow \infty$  et  $V(x > 0) = -A/x$  où  $A$  est une constante.

1. Expliciter  $A$  sachant que  $V(x > 0)$  a la forme de la loi d'énergie potentielle d'interaction électrostatique entre un proton et un électron. On fera intervenir la constante de structure fine  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) \simeq 1/137$  où  $e$ ,  $\epsilon_0$ ,  $\hbar$  et  $c$  sont les constantes traditionnelles de la physique.
2. Vérifier que l'un des états isotropes de l'hydrogène admet pour fonction d'onde spatiale  $\varphi(x) = C x \exp^{-x/a}$  dans le domaine  $x \geq 0$  où  $a$  et  $C$  sont des constantes réelles positives. Exprimer  $a$  et l'énergie  $E$  associée en fonction de  $m$ ,  $\alpha$ ,  $\hbar$  et  $c$ .
3. Obtenir l'expression de  $C$  en fonction de  $a$ .
4. Représenter l'allure en fonction de  $x$  de la densité de probabilité de présence associée à l'état isotrope étudié. Que caractérise  $a$  ?
5. On donne  $m = 0,511 \text{ MeV}/c^2$  et  $\hbar c = 197 \text{ eV} \cdot \text{nm}$ . Calculer numériquement  $a$  en picomètres et  $E$  en électron-volts. Commenter.
6. Déterminer l'énergie potentielle moyenne associée à l'état  $\varphi$  précédent en fonction de  $A$  et  $a$ . Commenter le résultat en relation avec le modèle semi-classique de BOHR de l'atome d'hydrogène.

### 16. Particule libre sur un cercle

Une particule quantique de masse  $m$  est libre de se déplacer sur un cercle de rayon  $R$ . La position d'un point  $M$  sur le cercle est repérée par l'angle  $\theta$ .

1. Proposer une équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps pour ce problème.
2. Quelle condition aux limites pour une fonction d'onde stationnaire  $\psi$  peut-on proposer ?
3. En déduire l'ensemble des solutions stationnaires  $\psi_n(\theta)$  où  $n$  est un entier relatif.
4. Quelles sont les solutions associées  $\psi_n(\theta, t)$  ?
5. Comment expliquer que les états correspondants à  $\pm n$  aient même énergie ?

### 17. Potentiel quadrique

Un quanton de masse  $m$  est soumis au potentiel (rappel : énergie potentielle)  $V(x) = gx^4$ . Le quanton est limité dans ces déplacements à l'axe  $Ox$ . On donne  $g > 0$ .

1. Expliquer pourquoi une énergie nulle est impossible et, par conséquent, qu'une énergie minimale non nulle est indispensable.
2. Estimer l'énergie du fondamental en utilisant l'indétermination d'HEISENBERG. On considérera dans cette partie que  $\langle x^4 \rangle = \alpha(\Delta x)^4$  où  $\alpha$  est un coefficient dont l'ordre de grandeur est l'unité.

### 18. Boîte unidimensionnelle

On considère un quanton, de masse  $m$ , d'énergie  $E$  confiné dans un intervalle  $x \in [0; L]$  où son potentiel  $V(x) = 0$  (rappel : il s'agit d'une énergie potentielle).

1. On adopte dans cette partie uniquement un traitement classique, c'est-à-dire non quantique. On admet que la probabilité de présence classique  $dP$  de la particule entre  $x$  et  $x + dx$  est proportionnelle à la durée de passage  $dt$  entre ces deux abscisses. Exprimer la vitesse  $v(x)$  de cette particule. Montrer qu'après normalisation, la densité de probabilité de présence classique s'exprime ainsi :

$$\frac{dP_{cl}}{dx} = \frac{1}{L}$$

Calculer la probabilité de présence de la particule entre les abscisses 0 et  $L/4$ .

2. On adopte maintenant un traitement quantique du problème. L'énergie  $E$  du quanton correspond à un état stationnaire représenté par la fonction d'onde :

$$\psi_n(x, t) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \exp -i \frac{Et}{\hbar}$$

où  $n$  est un entier strictement positif. Déterminer la constante  $A_n$ . Calculer la probabilité de présence du quanton entre les abscisses 0 et  $L/4$ . Que devient ce dernier résultat dans la limite où  $n \gg 1$  ? Comment ce résultat se compare-t-il au résultat de la théorie classique ?

**19. Énergie minimale de confinement**

On considère une particule quantique (non relativiste), de masse  $m$ , pouvant se déplacer librement suivant  $Ox$  dans un domaine de largeur  $L_x$ .

1. Quelle est la limite supérieure de l'indétermination sur sa position  $\Delta x$  ?
2. En déduire une limite inférieure pour l'indétermination sur son impulsion (ou quantité de mouvement)  $\Delta p_x$ .
3. Que vaut  $\langle p_x \rangle$  pour cette particule ? En déduire une limite inférieure pour  $\langle p_x^2 \rangle$ .
4. En étendant ce raisonnement à une particule confinée dans une boîte parallélépipédique de longueurs  $L_x$ ,  $L_y$  et  $L_z$ , montrer que l'énergie cinétique moyenne de la particule vérifie :

$$\langle \mathcal{E}_c \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m} \left( \frac{1}{L_x^2} + \frac{1}{L_y^2} + \frac{1}{L_z^2} \right)$$