TP : Diffusion.

Le phénomène de diffusion est très présent dans le domaine des transferts de particules au sein de la matière et, surtout, dans le domaine des transferts thermiques. Nous allons utiliser un montage électrique qui simule une situation de diffusion unidimensionnelle à l'aide de composants électriques simples puisque nous allons utiliser uniquement des résistances et des condensateurs.

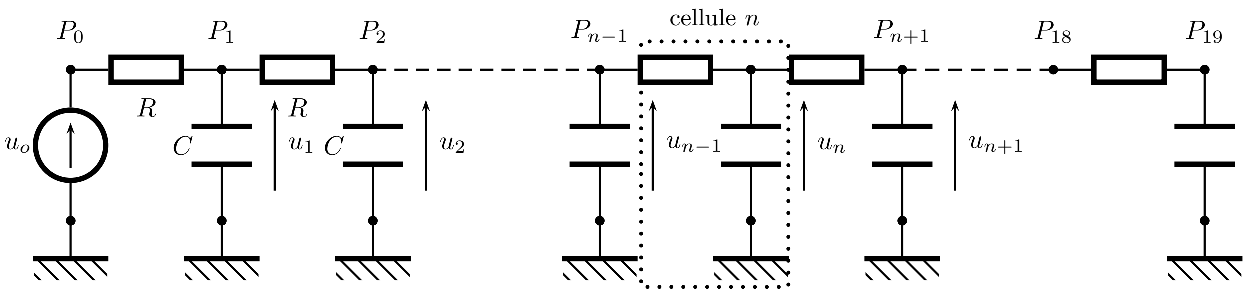

FIGURE 1 – Ligne de cellules *RC*

1 Objectifs

Dans ce TP, nous chercherons à caractériser l'évolution d'une tension électrique dans l'ensemble de 20 cellules *RC* constitué sur la plaquette mise à votre disposition. Nous étudierons la réponse de la ligne de cellule *RC* lorsque le générateur de début de ligne fournit une tension continue u_0 d'une part et lorsqu'il alimente la ligne avec une tension sinusoïdale de la forme $u_0(t) = U_{0m}\cos\omega t$ en supposant que le régime sinusoïdal est installé. Nous observerons aussi la propagation d'une impulsion dans la ligne de cellules.

2 Matériel

Vous disposez d'une ligne de 19 cellules *RC* de type filtre passe-bas qui se succèdent, voir la photographie de la figure 2. L'ensemble des résistances et des condensateurs est implanté sur une plaquette *Microlab*. Toutes les résistances sont les mêmes et $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$, il en va de même pour les condensateurs qui possèdent tous la capacité $C = 100\,\mathrm{nF}$. On posera $\tau = RC = 0,1\,\mathrm{ms}$ le temps caractéristique associé à chaque cellule. On peut estimer la taille d'une cellule *RC* comme étant $\ell \simeq 0,8\,\mathrm{cm}$. ℓ peut être considéré comme la période spatiale de la ligne *RC*.

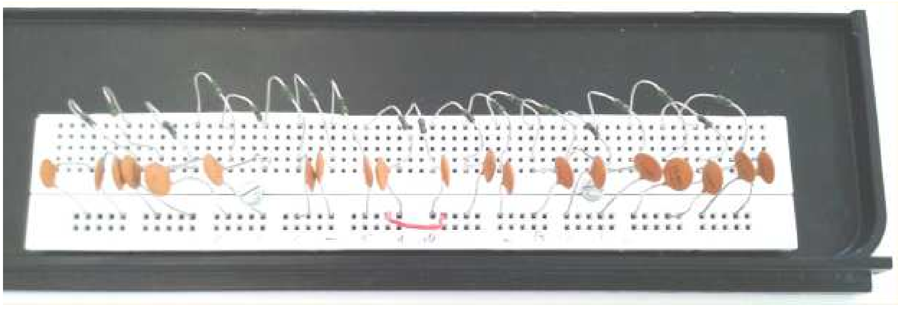

FIGURE 2 – Ligne de cellules *RC* montées sur une plaquette *Microlab*

On pourra utiliser un générateur de tension continue et un voltmètre pour effectuer les mesures en régime continu car c'est plus simple ainsi, comme on peut le voir sur le montage de la figure 3.

Pour l'étude en régime sinusoïdal forcé, on utilisera le générateur de l'oscilloscope et on visualisera les diverses tensions sur les voies de ce même oscilloscope. Pour les connexions, soit on utilisera les mêmes fils que pour les mesure en régime continu, soit on pourra utiliser des fils présents sur un autre plaquette *Microlab* pour récupérer aisément une connexion coaxiale, voir la photographie de la figure 4.

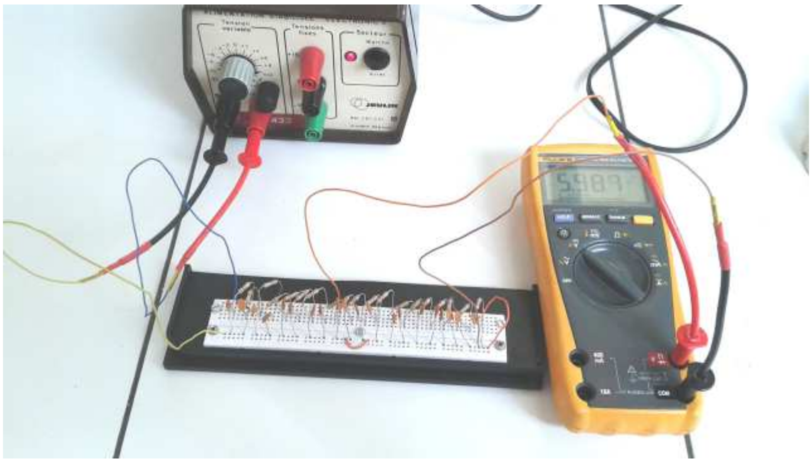

Figure 3 – Suivi de la tension continue avec un voltmètre

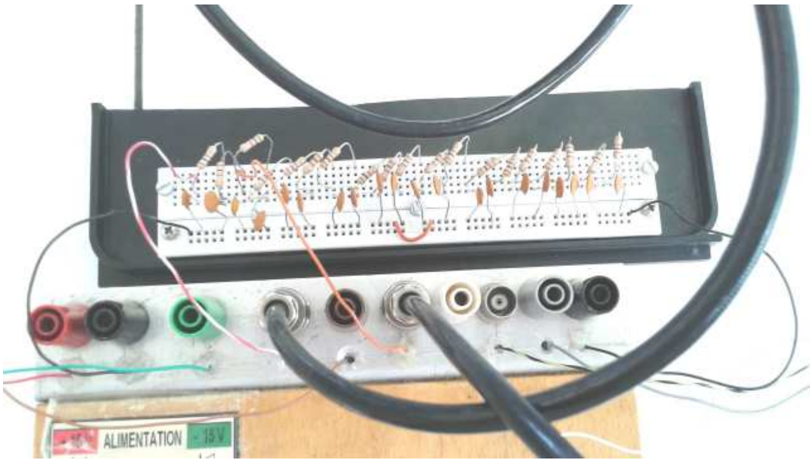

Figure 4 – Suivi de la tension sinusoïdale avec l'oscilloscope

3 Aspects théoriques

3.1 Régime indépendant du temps

1. Pour une tension u_0 fournie par le générateur indépendante du temps, prévoir l'état permanent de la tension u_n mesurée entre le point P_n et la masse dans le cas où l'on utilise la ligne telle qu'elle vous a été fournie.

2. On alimente toujours la ligne par une tension u_0 indépendante du temps mais, maintenant, on court-circuite le dernier condensateur en reliant par un fil le point P_{19} et la masse. Quelle est alors l'expression de la tension u_n ?

3.2 Régime dépendant du temps

On utilise maintenant une tension d'alimentation en entrée de ligne du dépend du temps. On la note $u_0(t)$.

3. En appliquant la loi des nœuds et la loi des mailles autour du point P_n caractérisant la cellule n, montrer que l'on a la relation :

$$u_{n+1} + u_{n-1} - 2u_n = RC\frac{\mathrm{d}u_n}{\mathrm{d}t}$$

4. On effectue l'approximation des milieux continus en considérant que pour une abscisse $x(t)$, la tension est $u(x,t)$. Pour faire le lien avec la ligne discrète étudiée, on considérera que $u(x = n\ell, t) = u_n(t)$. Montrer que la tension $u(x,t)$ vérifie l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\tau}{\ell^2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{a}\frac{\partial u}{\partial t}$$

où a est le coefficient de diffusion. Faire l'analyse dimensionnelle du coefficient a et conclure.

5. On impose en entrée de ligne, une tension $u_0(t) = U_{m0}\cos\omega t$. En travaillant en complexes avec $\underline{u}(x,t) = U_m \exp j(\omega t - kx)$. Établir la relation de dispersion :

$$k^2 = -i\frac{\omega}{a}$$

6. Rechercher les solutions de l'équation de dispersion précédente [1] et montrer que la tension $u(x,t)$ est donnée par l'expression :

$$u(x,t) = U_{m0}\,\exp -\sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,x\,\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2a}}\,x\right)$$

7. Montrer qu'en repassant au modèle discret, on obtient l'expression de la tension $u_n(P_n,t)$ suivante :

$$u_n(P_n,t) = U_{m0}\,\exp -\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\,n\,\cos\left(\omega t - \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\,n\right)$$

On peut relever alors que l'amplitude de la tension est $U_{\text{amp}}(P_n) = U_{m0}\,\exp -\sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\,n$. On peut encore écrire que :

$$\ln\frac{U_{m0}}{U_{\text{amp}}(P_n)} = \sqrt{\frac{\omega\tau}{2}}\,n$$

4 Expériences

4.1 Consignes

Lors de vos activités expérimentales en TP, vous devrez systématiquement :

* Élaborer un protocole et m'appeler pour que je le valide.
* Mettre en œuvre ce protocole et m'appeler pour que j'évalue vos activités.
* Communiquer les résultats dans le compte rendu sous forme de descriptions, de tableaux de mesures, de graphiques…
* Valider les résultats en comparant les développements théoriques et les résultats expérimentaux en ayant le souci permanent de présenter de façon rigoureuse les résultats avec leur incertitude.
* Remettre en fin de séance votre compte-rendu.

Vous serez évalué sur l'ensemble de ces exigences.

4.2 Régime indépendant du temps

8. Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant de vérifier les prévisions théoriques sur la valeur de la tension u_n dans les deux cas envisagés à savoir lorsque le condensateur relié au point P_{19} est court-circuité et lorsqu'il ne l'est pas. Lorsque le dernier condensateur est court-circuité, on pourra proposer de valider le modèle linéaire fonction de n grâce à un programme *Python*.

4.3 Régime sinusoïdal

Le condensateur situé en P_{19} n'est pas court-circuité pour la suite de l'étude. Pour réaliser les manipulations, on fera attention à la connectique de la plaquette utilisée, les connexions sont représentées sur la figure 5.

9. Pour vérifier les prévisions théoriques concernant $u_n(P_n,t)$, on utilisera une tension sinusoïdale de fréquence $f = 100\,\text{Hz}$ ou d'une fréquence avoisinante. Observer l'évolution de l'amplitude de l'onde en fonction de n et en déduire une mesure de τ et de son incertitude-type par une méthode utilisant chaque mesure effectuée à l'aide d'un programme *Python*. Comparer avec la valeur attendue.

10. On s'intéresse maintenant au déphasage entre $u_n(P_n,t)$ et $u_0(t)$. Effectuer des mesures appropriées pour déterminer τ d'une seconde manière en suivant le même protocole qu'à la question précédente. Comparer les deux mesures en étudier leur compatibilité ou non par un calcul d'écart normalisé ou de Zscore que l'on peut effectuer à la main ou en utilisant un programme *Python*.

1. L'équation de diffusion et cette forme de relation de dispersion se rencontrent aussi dans le cadre de la diffusion thermique.

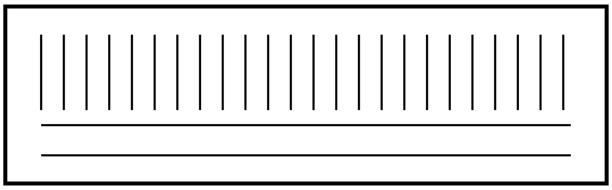

FIGURE 5 – Connexions sur la moitié de la plaquette *Microlab* utilisée

4.4 Pour aller plus loin

11. On pourra essayer de voir l'effet de la dispersion sur une impulsion envoyée dans la ligne de cellules RC comme cela est illustré par la photographie de la figure 6. Pour y parvenir, on utilisera la fonction générateur de l'oscilloscope. On effectuera les réglages pour obtenir une impulsion d'amplitude 5 V de 100 µs possédant une fréquence de répétition de 100 Hz. On imposera un décalage de 2, 5 V au signal proposé par le générateur de telle sorte que l'impulsion envoyée dans la ligne soit comprise entre 0 V et 5 V car une impulsion est fournie par défaut avec une moyenne nulle. On pourra essayer d'estimer la vitesse de groupe du paquet d'ondes.

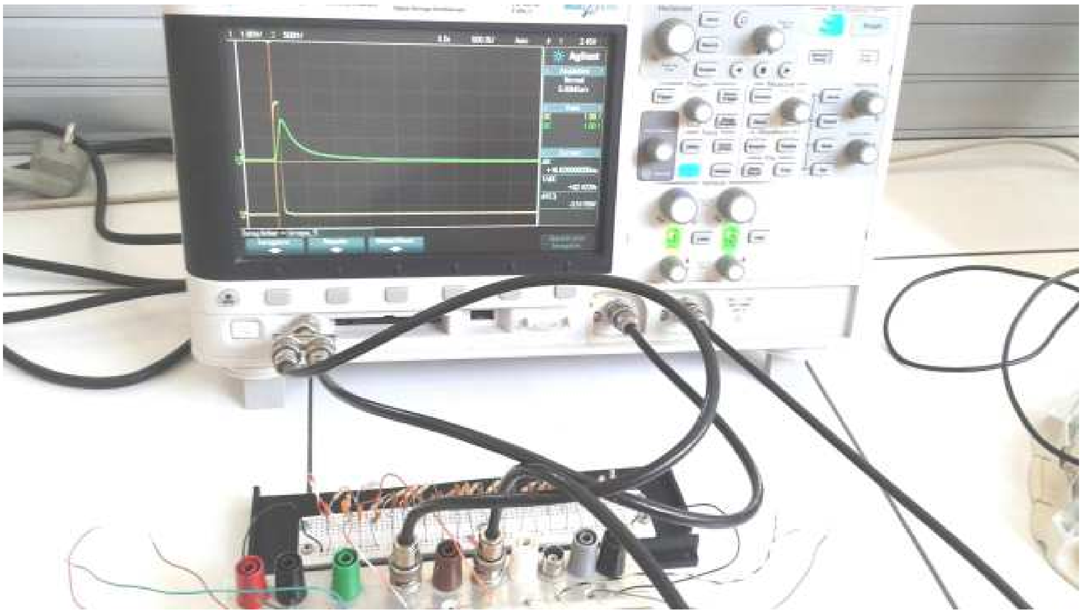

FIGURE 6 – Impulsion dans la ligne de cellules RC